第二章　拉普拉斯变换

傅里叶变换在许多领域发挥了重要作用，特别是在信号处理领域，直到今天它仍然是最基本的分析和处理工具，甚至可以说信号分析本质上即傅里叶分析（谱分析）．但任何方法总有它的局限性，傅里叶变换也是如此，因此，人们对傅里叶变换的一些不足之处进行了各种各样的改进．这些改进大体上分为两个方面：一方面是提高它对问题的刻画能力，如窗口傅里叶变换、小波变换等；另一方面是扩大它本身的适用范围．本章要介绍的是后者．

拉普拉斯变换理论（亦称为算子微积分）是在19世纪末发展起来的．首先是英国工程师海维赛德（O. Heaviside）发明了用运算法解决当时电工计算中出现的一些问题，但是缺乏严密的数学论证．后来由法国数学家拉普拉斯（P. S. Laplace）给出了严密的数学定义，称之为拉普拉斯变换（简称拉氏变换）方法．由于拉普拉斯变换对象原函数 $f(t)$ 约束条件比起傅里叶变换要弱，因而在电学、力学等众多的工程技术与科学研究领域中得到广泛的应用．

本章先从傅里叶变换的定义出发，推导出拉普拉斯变换的定义，并研究它的一些基本性质；然后给出其逆变换的积分表达式——拉普拉斯反演积分公式，并得出象原函数的求法；最后介绍拉普拉斯变换的应用．

第一节　拉普拉斯变换的概念

一、问题的提出

上一章介绍了傅里叶变换，即可以进行傅里叶变换的函数必须在整个数轴上有定义．在许多物理现象中，常考虑以时间 t 为自变量的函数，例如，一个外加电动势 $E(t)$ 从某一个时刻起接到电路中去，假如把接通的瞬间作为计算时间的原点 $t=0$，那么要研究的是电流在 $t>0$（接通以后）时的变化情况，而对于 $t<0$ 的情况，就不必考虑了．因此，常会遇到仅定义于 $[0,+\infty)$ 的函数，或者约定当 $t<0$ 时函数值恒为零的函数．

另外，一个函数除了满足狄利克雷条件外，还要在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积才存在古典意义上的傅里叶变换，但绝对可积的要求是比较苛刻的，很多常用的函数如单位阶跃函数、正弦函数、余弦函数以及线性函数等，都不满足这个条件，所以傅里叶变换的应用范围受到了较大的限制．

为解决上述应用中遇到的问题，人们研究发现，对一个函数 $\varphi(t)$，若乘以 $u(t)$，则可以使积分区间 $(-\infty,+\infty)$ 变成半实轴 $[0,+\infty)$；用 $e^{-\beta t}$ 乘以 $\varphi(t)$，由于 $e^{-\beta t}$ 的指数衰减性，只要 β 选得合适，总可以满足绝对可积的条件．因此，函数 $\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}$ 显然可以克服傅里叶变换的上述两个缺点．

事实上，对 $\varphi(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}(\beta>0)$ 作傅里叶变换，可得

$$G_\beta(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

其中

$$f(t)=\varphi(t)u(t),\quad s=\beta+\mathrm{j}\omega.$$

再令

$$F(s)=G_\beta\left(\frac{s-\beta}{\mathrm{j}}\right),$$

则

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

此式所确定的函数 $F(s)$，实际上是由 $f(t)$ 通过一种新的变换得来的，这种新的变换就是拉普拉斯变换. 下面给出它的定义.

二、拉普拉斯变换的定义及存在定理

定义 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，如果对复参量 $s=\beta+\mathrm{j}\omega$，积分

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在 s 的某一域内收敛，则称 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的象函数或拉普拉斯变换，记作 $\mathscr{L}[f(t)]$，即

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的象原函数或拉普拉斯逆变换，记作 $\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$，即

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)].$$

由式(2.1)可以看出，$f(t)(t\geqslant0)$ 的拉普拉斯变换实际上就是函数 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的傅里叶变换.

例 2.1 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0,\end{cases}$ 符号函数 $\operatorname{sgn}t=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -1, & t<0\end{cases}$ 和函数 $f(t)=1$ 的拉普拉斯变换.

解：根据定义，当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},$$

$$\mathscr{L}[\operatorname{sgn}t]=\int_0^{+\infty}(\operatorname{sgn}t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s},$$

$$\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}.$$

该例表明，这三个函数经过拉普拉斯变换后，象函数是一样的，这一点应不难理解. 现在的问题是对象函数 $F(s)=\dfrac{1}{s}(\mathrm{Re}(s)>0)$ 而言，其象原函数到底是哪一个呢？根据公式，所有在 $t>0$ 时为 1 的函数均可作为象原函数，这是因为在拉普拉斯变换所应用的场合，并不需要关心函数 $f(t)$ 在 $t<0$ 时的取值情况. 但为讨论和描述方便，一般约定，在拉普拉斯

变换中所提到的函数 $f(t)$ 均理解为当 $t<0$ 时，$f(t)=0$.

例 2.2 求函数 $f(t)=\mathrm{e}^{kt}$ 和函数 $g(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的拉普拉斯变换(k,ω 为实数).

解：由定义得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{kt}]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-k}\mathrm{e}^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-k},\quad \mathrm{Re}(s)>k,$$

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

本题的结果也可根据例 2.1 中的积分结果直接得出.

从上面的例子可以看出，拉普拉斯变换的确扩大了傅里叶变换的使用范围，而且变换存在的条件也比傅里叶变换弱得多，但是并非对任何一个函数都能进行拉普拉斯变换. 那么一个函数究竟满足什么条件时，它的拉普拉斯变换一定存在呢？下面的定理回答了这个问题.

定理 2.1(拉普拉斯变换存在定理) 若函数 $f(t)$ 满足下列条件：

(1) 在 $t\geqslant 0$ 的任一有限区间上分段连续；

(2) 存在常数 $M>0$ 与 $c\geqslant 0$，使得

$$|f(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{ct},\quad t\geqslant 0,$$

即当 $t\to+\infty$ 时，函数 $f(t)$ 的增长速度不超过某一个指数函数(称函数 $f(t)$ 的增大是不超过指数级的，c 称为函数 $f(t)$ 的增长指数)，则函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在，此时上式右端的积分绝对收敛而且一致收敛，同时在此半平面内，$F(s)$ 是解析函数.

***证**：设 $\beta=\mathrm{Re}(s)$，$\beta-c\geqslant\delta>0$，由条件(2)有

$$|f(t)\mathrm{e}^{-st}|=|f(t)|\mathrm{e}^{-\beta t}\leqslant M\mathrm{e}^{-(\beta-c)t}\leqslant M\mathrm{e}^{-\delta t},$$

所以

$$|F(s)|=\left|\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right|\leqslant M\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t=\frac{M}{\delta}.$$

由 $\delta>0$ 可知，积分式 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c+\delta$ 上绝对且一致收敛，因此，$F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上存在.

若在积分式 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 的积分号内对 s 求导数，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

等式右端的积分在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c+\delta$ 上，也是绝对且一致收敛的. 因此在 $F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 中，积分与微分的运算次序可以交换，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[f(t)\mathrm{e}^{-st}]\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}-tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

由拉普拉斯变换的定义，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)=\mathscr{L}[-tf(t)].$$

故 $F(s)$在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c+\delta$ 上可导. 由 δ 的任意性可知 $F(s)$在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上是解析函数.

关于该定理需要说明几点.

(1) 对于该定理,可如下简单地理解,即一个函数,即使其模随着 t 的增大而增大,但只要不比某个指数函数增长得快,则其拉普拉斯变换就存在. 这一点可以从拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系中得到一种直观的解释. 常见的大部分函数都是满足该条件的,如幂函数、三角函数、指数函数等. 所以拉普拉斯变换的应用比较广泛,但 e^{t^2},$t\mathrm{e}^{t^2}$ 等这类函数是不满足定理的条件的,因为定理条件中的 M,c 不存在.

(2) 象函数 $F(s)$在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 内是解析的,根据复变函数的解析开拓的理论,还可以把它解析开拓到全平面上去(奇点除外). 这样,在应用上有时求出 $\mathscr{L}[f(t)]$,后面就不再附注条件 $\mathrm{Re}(s)>c$. 例如,$\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}$可看成在全平面上除了 $s=0$ 点以外的解析函数. 所以拉普拉斯变换把一定类型的分段连续的函数转化成解析函数,这样就可以在拉普拉斯变换的理论研究中运用复变函数中的有关定理.

(3) 拉普拉斯变换存在定理的条件仅是充分的,而不是必要的,即在不满足存在定理的条件下,拉普拉斯变换仍可能存在.

另外,对于满足拉普拉斯变换存在定理条件的函数 $f(t)$,在 $t=0$ 附近有界时,$f(0)$取什么值与讨论 $f(t)$的拉普拉斯变换毫无关系,因为 $f(t)$在一点上的值不会影响积分

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

这时积分下限取 0^+ 或 0^- 都可以. 但是,假如 $f(t)$在 $t=0$ 包含了单位脉冲函数,就必须区分这个积分区间包含 $t=0$ 这一点,还是不包含 $t=0$ 这一点. 假如包含,把积分下限记为 0^-;假如不包含,把积分下限记为 0^+,于是得出不同的拉普拉斯变换. 记

$$\mathscr{L}_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,$$

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\mathscr{L}_+[f(t)].$$

当 $f(t)$在 $t=0$ 处不含单位脉冲函数时,$t=0$ 不是无穷间断点,可以发现,若 $f(t)$在 $t=0$ 附近有界,则 $\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=0$,即

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\mathscr{L}_+[f(t)].$$

若 $f(t)$在 $t=0$ 处包含了脉冲函数,则 $\int_{0^-}^{0^+}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\neq 0$,即

$$\mathscr{L}_-[f(t)]\neq\mathscr{L}_+[f(t)].$$

为考虑这一情况,需要把进行拉普拉斯变换的函数 $f(t)$的定义区间从 $t\geqslant 0$ 扩大为 $t>0$ 和 $t=0$ 的任意一个邻域,这样上述的拉普拉斯变换定义

$$\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

应为

$$\mathscr{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

但是为书写方便起见，仍把它写成

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$

例 2.3 求单位脉冲函数 $\delta(t)$的拉普拉斯变换.

解：根据上面的讨论，并利用筛选性质式(1.15)，可得

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_0^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\mathscr{L}_+[\delta(t)].$$

显然

$$\mathscr{L}_+[\delta(t)]=0,$$

而

$$\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st}\mid_{t=0}=1,$$

所以

$$\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$$

例 2.4 求函数 $f(t)=\sin kt$(k 为实数)的拉普拉斯变换.

解：由拉普拉斯变换的定义，得

$$\mathscr{L}[\sin kt]=\int_0^{+\infty}\sin kt\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s^2+k^2}(-s\sin kt-k\cos kt)\Big|_0^{+\infty}=\frac{k}{s^2+k^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

由例 2.2 结论 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}(\mathrm{Re}(s)>0)$，本题还有以下解法.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin kt]&=\int_0^{+\infty}\sin kt\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kt}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}k}-\frac{1}{s+\mathrm{j}k}\right)=\frac{k}{s^2+k^2}.\end{aligned}$$

同理，$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$，$\mathrm{Re}(s)>0$.

例 2.5 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=\delta(t)\cos t-u(t)\sin t$；

(2) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<\frac{\pi}{2},\\ \cos t, & t\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

解：(1) 由拉普拉斯变换的定义，并根据 $\delta(t)$和 $u(t)$的性质，得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f(t)]&=\int_0^{+\infty}\delta(t)\cos t\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}u(t)\sin t\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\cos t\cdot\mathrm{e}^{-st}\mid_{t=0}+\frac{\mathrm{j}}{2}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1},\quad \mathrm{Re}(s)>0.\end{aligned}$$

(2) 由拉普拉斯变换的定义,得

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos t \cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \frac{3}{s}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi s}) - \frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi s}.$$

***例 2.6** 求函数 $f(t)=t^m$(常数 $m>-1$)的拉普拉斯变换.

解:由拉普拉斯变换的定义,当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时,有

$$\mathscr{L}[t^m] = \int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

为求此积分,若令 $st=u$,由于 s 为右半平面内任一复数,因此经过此变量代换得到的关于积分变量 u 的积分是一个复变量积分,即

$$\mathscr{L}[t^m] = \int_L \left(\frac{u}{s}\right)^m \mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{s}\mathrm{d}u = \frac{1}{s^{m+1}}\int_L u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u. \tag{2}$$

其中,积分路线 L 是沿着射线 $\arg u=\theta$,$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

但对于积分式(2),当 $-1<m<0$ 时,$u=0$ 是 u^m 的奇点,所以先考虑积分

$$\int_{\overline{AB}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u,$$

其中的积分路线是沿着直线段$\overline{AB}$,如图 2.1 所示.

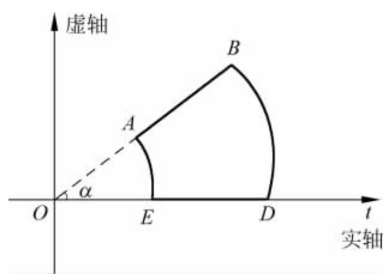

图 2.1

设 A,B 分别对应的复数为 $r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$,$R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$,这里 α 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$中,是一个常数,且 $r<R$. 取图中直线段$\overline{AB}$、圆弧$\widehat{DB}$($u=R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$,$0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$)、$\widehat{EA}$($u=r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$,$0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$)和实轴上线段$\overline{ED}$所组成的闭曲线 C. 因为 $u^m\mathrm{e}^{-u}$在 C 内解析,所以

$$\oint_C u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 0,$$

即

$$\int_{\overline{ED}} + \int_{\widehat{DB}} + \int_{\overline{BA}} + \int_{\widehat{AE}} = 0,$$

也就是

$$\int_{\overline{AB}} = -\int_{\widehat{EA}} + \int_{\overline{ED}} + \int_{\widehat{DB}}. \tag{3}$$

对于式(3)右端第一个积分,有

$$\left|\int_{\widehat{EA}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right| = \left|\int_0^{\alpha} r^m \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}\mathrm{j}r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{d}\varphi\right| \leqslant r^{m+1}\int_0^{\alpha} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right|\mathrm{d}\varphi$$

$$= r^{m+1}\int_0^{\alpha}\left|\mathrm{e}^{-r(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)}\right|\mathrm{d}\varphi = r^{m+1}\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-r\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

由积分中值定理,可得

$$\left|\int_{\widehat{EA}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right| \leqslant r^{m+1}\mathrm{e}^{-r\cos\xi}\cdot\alpha,\quad 0<\xi<\alpha.$$

当 $r \to 0$ 时，

$$r^{m+1}\mathrm{e}^{-r\cos\xi}\cdot\alpha \to 0,$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{\widehat{EA}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 0.$$

对于式(3)右端第三个积分,同样有

$$\left|\int_{\widehat{DB}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\right| = \left|\int_0^{\alpha} R^m \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\mathrm{e}^{-R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}\mathrm{j}R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{d}\varphi\right| \leqslant R^{m+1}\int_0^{\alpha}\mathrm{e}^{-R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = R^{m+1}\mathrm{e}^{-R\cos\xi}\cdot\alpha,\quad 0<\xi<\alpha.$$

由于 α 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 中,所以 $\cos\xi>0$,从而当 $R\to+\infty$ 时,$R^{m+1}\mathrm{e}^{-R\cos\xi}\cdot\alpha\to 0$,即

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\widehat{DB}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 0.$$

因此

$$\int_L u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}}\int_{\overline{AB}} u^m \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}}\left[-\int_{\widehat{EA}}+\int_{\overline{ED}}+\int_{\widehat{DB}}\right]u^m\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

也就是说,求沿射线 L 的复变量积分(2),可转化为计算沿正实半轴 t 从 0 到 $+\infty$ 的实变量积分式(4). 于是有

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^{+\infty} t^m \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

当 m 为正整数时,有

$$\mathscr{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

在实际工作中,为使用方便,有现成的拉普拉斯变换表可查. 通过查表可以很容易地知道由象原函数到象函数的变换,或由象函数到象原函数的逆变换. 本书已将工程中常遇到的一些函数及其拉普拉斯变换列于附录Ⅱ中,以备读者查用.

例 2.7 求 $\sin 2t\sin 3t$ 的拉普拉斯变换.

解:根据附录Ⅱ公式 20,在 $a=2,b=3$ 时,得

$$\mathscr{L}[\sin 2t\sin 3t] = \frac{12s}{(s^2+5^2)(s^2+1^2)} = \frac{12s}{(s^2+25)(s^2+1)}.$$

例 2.8 求 $\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt-\sin bt)$ 的拉普拉斯变换.

解:这个函数的拉普拉斯变换,在本书给出的附录Ⅱ中找不到现成的公式,但是

$$\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt-\sin bt) = \mathrm{e}^{-bt}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos bt-\cos\frac{\pi}{4}\sin bt\right) = \mathrm{e}^{-bt}\sin\left(-bt+\frac{\pi}{4}\right).$$

根据附录Ⅱ中公式 17,在 $a=-b,c=\frac{\pi}{4}$ 时,得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{-bt}}{\sqrt{2}}(\cos bt-\sin bt)\right] = \mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-bt}\sin\left(-bt+\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{(s+b)\sin\frac{\pi}{4}+(-b)\cos\frac{\pi}{4}}{(s+b)^2+(-b)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}s}{2(s^2+2bs+2b^2)}.$$

第二节　拉普拉斯变换的性质

上一节中，利用拉普拉斯变换的定义已求得一些简单的常用函数的拉普拉斯变换，但对于复杂的函数，用定义求其象函数很不方便，因此要研究拉普拉斯变换所具备的性质，以便简化计算. 为叙述方便，都假定性质中所涉及的函数的拉普拉斯变换是存在的，并假设 $\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，$\mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s)$.

一、线性性质

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s),\\ \text{或}\quad&\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

该性质的证明可由拉普拉斯变换和逆变换的公式直接推出，此处从略.

例 2.9　求函数 $f(t)=\cos 3t+6\mathrm{e}^{-3t}$ 的拉普拉斯变换.

解：

$$\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[\cos 3t]+6\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-3t}]=\frac{s}{s^2+3^2}+\frac{6}{s+3}.$$

例 2.10　求函数 $F(s)=\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ $(a>0,b>0,a\neq b)$ 的拉普拉斯逆变换.

解：因为

$$F(s)=\frac{1}{(s-a)(s-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right),$$

应用线性性质，有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{a-b}\left(\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right)=\frac{1}{a-b}(\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{bt}).$$

二、相似性质

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\\ \text{或}\quad&\mathscr{L}^{-1}[F(as)]=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right),\quad a>0.\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

证：对积分作变量代换 $u=at$，得

$$\mathscr{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)\mathrm{e}^{-\frac{s}{a}u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

利用上式，得

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as),$$

两边取拉普拉斯逆变换，得

$$\mathscr{L}^{-1}[F(as)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

因为函数 $f(at)$的图形可由 $f(t)$的图形沿 t 轴正向经相似变换得到，所以把这个性质称为相似性质.在工程技术中，常希望改变时间的比例尺，或者将一个给定的时间函数标准化后，再求它的拉普拉斯变换，此时就要用到这个性质，因此这个性质在工程技术中也称尺度变换性质.

三、微分性质

1．象原函数的微分性质

若 $f(t)$在$[0,+\infty)$上可微，则

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0). \tag{2.4}$$

证：根据拉普拉斯变换的定义，有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

对上式右端利用分部积分，可得

$$\mathscr{L}[f'(t)] = f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = s\mathscr{L}[f(t)] - f(0), \quad \mathrm{Re}(s) > c,$$

所以

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0).$$

这个性质表明：一个函数求导后取拉普拉斯变换，等于这个函数的拉普拉斯变换乘以参数 s，再减去函数的初值.

利用上式分部积分两次，可得

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s\mathscr{L}[f'(t)] - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

以此类推，可得如下推论.

推论　若 $f(t)$在 $t \geqslant 0$ 中 n 次可微，并且 $f^{(n)}(t)$满足拉普拉斯变换存在定理中的条件，又因为 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\\ &= s^nF(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}f^{(i)}(0), \quad \mathrm{Re}(s) > c.\end{aligned} \tag{2.5}$$

特别地，当初值 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 时，有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s).$$

需要指出，当 $f(t)$在 $t=0$ 处不连续时，$f'(t)$在 $t=0$ 处有脉冲 $\delta(t)$存在，按前面的规定取拉普拉斯变换时，积分下限要从 0^- 开始，这时，$f(0)$应写成 $f(0^-)$，即

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-).$$

这个性质在运用拉普拉斯变换解线性常微分方程的初值问题时起着重要的作用，它可将关于 $f(t)$的微分方程转换为关于 $F(s)$的代数方程.

例 2.11　已知 $\mathscr{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2+k^2}$，利用象原函数的微分性质求 $\mathscr{L}[\cos kt]$.

解法一：由于 $\cos kt = \dfrac{1}{k}(\sin kt)'$，根据象原函数的微分性质与线性性质，有

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{1}{k}\mathscr{L}[(\sin kt)']=\frac{1}{k}\{s\mathscr{L}[\sin kt]-0\}=\frac{1}{k}\left(s\frac{k}{s^2+k^2}\right)=\frac{s}{s^2+k^2}.$$

解法二：令 $f(t)=\cos kt$，则

$$f'(t)=-k\sin kt,\quad f''(t)=-k^2\cos kt,\quad f(0)=1,\quad f'(0)=0.$$

根据式(2.5)，可得

$$\mathscr{L}[f''(t)]=s^2\mathscr{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0),$$

$$-k^2\mathscr{L}[\cos kt]=s^2\mathscr{L}[\cos kt]-s,$$

整理得

$$\mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}.$$

2. 象函数的微分性质

$$F'(s)=-\mathscr{L}[tf(t)]. \tag{2.6}$$

证：$F(s)$在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 内解析，因此可对 s 求导，

$$F'(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}tf(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\mathscr{L}[tf(t)].$$

上式可以在积分号下求导，是因为 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 对 s 来说是一致收敛的.

这个性质表明：对象函数求导，等于其象原函数乘以 $-t$ 的拉普拉斯变换. 一般地，有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)],\quad n=1,2,3,\cdots.$$

或者写成

$$\mathscr{L}[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(s),\quad n=1,2,3,\cdots. \tag{2.7}$$

例 2.12 $\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2}$，求 $\mathscr{L}[t\sin kt]$，$\mathscr{L}[t^2\sin kt]$.

解：由式(2.6)，可知

$$\mathscr{L}[t\sin kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathscr{L}[\sin kt]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{k}{s^2+k^2}=\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}.$$

由式(2.7)，可知

$$\mathscr{L}[t^2\sin kt]=(-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathscr{L}[\sin kt]=\frac{2k(3s^2-k^2)}{(s^2+k^2)^3}.$$

同理可得

$$\mathscr{L}[t\cos kt]=\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}.$$

四、积分性质

1. 象原函数的积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s). \tag{2.8}$$

证：令 $g(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$，则有 $g'(t)=f(t)$ 且 $g(0)=0$. 由象函数的微分性质，