第 1 章作业题

一、选择与填空题

1. 若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=6$，则$\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11} & 0 \\ a_{22} & 2a_{21} & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$的值为 (　　).

A. 18　　B. −12　　C. 12　　D. 0

2. 已知$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 2 \end{vmatrix}$的代数余子式$A_{12}=0$，则代数余子式$A_{21}=$ (　　).

A. 4　　B. −4　　C. 2　　D. −2

3. 排列 4365721 的逆序数为______________.

4. 在三阶行列式中展开式$a_{13}a_{31}a_{22}$的符号为______________.

5. 设$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$，则方程$f(x)=0$的根为______________.

6. 若$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$，则$A_{41}+A_{43}+2A_{44}=$______________.

7. 已知齐次线性方程组$\begin{cases} \lambda x+y+z=0, \\ \lambda x+3y-z=0, \\ -y+\lambda z=0 \end{cases}$有非零解，则$\lambda=$______________.

二、计算行列式$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$.

三、计算行列式$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

四、计算行列式$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$，其中$a_0a_1\cdots a_{n-1}\neq 0$.

五、求下面的λ：

(1) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=0$；(2) $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ 6 & 4-\lambda & -9 \\ 5 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix}=0$.

六、求 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

七、设平面上二次曲线 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 过三点(1,2), (2,3), (3,5)，请用克莱姆法则证明此曲线是唯一的，并求 a_0.

第 2 章作业题（一）

一、选择与填空题

1. 设有矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times4}, \boldsymbol{B}_{3\times3}, \boldsymbol{C}_{4\times3}$ 和 $\boldsymbol{D}_{3\times1}$，则下列运算中没有意义的是（　　）.

A. $\boldsymbol{BAC}$　　B. $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}}$　　C. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{C}$　　D. $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，k,l 为不等于 0 的常数，则下列等式正确的是（　　）.

A. $(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{l}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　　B. $(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+l\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

C. $(k\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　　D. $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^2)^{\mathrm{T}}$

3. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，且满足等式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，则必有（　　）.

A. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$　　B. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$　　C. $|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{B}|=0$　　D. $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2=$__________，$\boldsymbol{A}^3=$__________，$\boldsymbol{A}^n=$__________.

5. 如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$__________，$\boldsymbol{BA}=$__________.

6. 已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $|-2\boldsymbol{B}|=$__________.

二、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$.

三、已知 $f(x)=x^2-3x+5$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

四、若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{P}^{2017}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{2018}$.

五、已知矩阵$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\end{pmatrix}$. 又$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$，求$\boldsymbol{A}^{100}$.

六、设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶对称矩阵，证明$\boldsymbol{AB}$是对称矩阵的充分必要条件是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

七、某石油公司所属的三个炼油厂A_1，A_2，A_3在 2015 年和 2016 年生产的 4 种油品B_1，B_2，B_3，B_4的产量如下表（单位：万吨）.

炼油厂	2015 年				2016 年			
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	97	38	27	9	87	67	23	7
A_2	74	31	14	6	90	23	56	8
A_3	89	45	23	7	92	43	39	4

（1）作矩阵$\boldsymbol{A}_{3\times4}$和$\boldsymbol{B}_{3\times4}$分别表示三个炼油厂 2015 年和 2016 年各种油品的产量；

（2）计算$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，并说明其经济意义.

第 2 章作业题（二）

一、选择与填空题

1. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，且 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=($　　$)$.

A. a　　B. $\dfrac{1}{a}$　　C. a^{n-1}　　D. a^n

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，下列运算正确的是 (　　).

A. $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$　　B. $|-\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$

C. $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$　　D. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$k\neq 0$，则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有 (　　).

A. 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$　　B. 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$

C. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$　　D. 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$，则 (　　).

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆　　B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆　　D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为三阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=($　　$)$.

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}3&2&0\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三阶可逆矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|5\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|=$______________.

二、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\\1&5&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

三、求矩阵 $\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\1&-1&1&1&2\\7&2&-2&4&a\\7&-1&1&5&8\end{pmatrix}$ 的秩，并化为行最简形，其中 a 为常数.

四、用伴随矩阵法求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

五、已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. (1) 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$；(2) 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

六、设三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BA}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.

七、若方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，试证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}$.

第 3 章作业题（一）

一、选择与填空题

1. 向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分条件是 (　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$均不是零向量

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意两个向量都不成比例

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意一个向量均不能由其余$m-1$个向量线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中有一个部分组线性无关

2. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$|\boldsymbol{A}|=0$，则 (　　).

A. $\boldsymbol{A}$中必有两行（列）的对应元素成比例

B. $\boldsymbol{A}$中任意一行（列）向量是其余行（列）向量的线性组合

C. $\boldsymbol{A}$中必有一行（列）向量是其余行（列）向量的线性组合

D. $\boldsymbol{A}$中至少有一行（列）向量为零向量

3. 设向量组（1）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与向量组（2）：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$等价，则必有 (　　).

A. 向量组（1）线性相关　　B. 向量组（2）线性无关

C. 向量组（1）线性无关　　D. 向量组（2）线性相关

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，下列向量中可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出的是 (　　).

A. $(2,0,0)^{\mathrm{T}}$　　B. $(-3,2,4)^{\mathrm{T}}$　　C. $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$　　D. $(0,-1,0)^{\mathrm{T}}$

5. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩是______________.

二、设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,0)$. (1) 求$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$；(2) 请判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性相关性.

三、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)$的秩为 2，求$t$.

四、已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$线性相关，求$a$.

五、设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)$.

(1) 问t为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关；

(2) 问t为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关；

(3) 当向量组线性相关时，将$\boldsymbol{\alpha}_3$表示为$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$的线性组合.

六、已知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，证明$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关.

七、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关，$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 证明：如果$k_1\neq 0$，则向量组$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2$也线性无关.

第 3 章作业题（二）

一、选择与填空题

1. 在$\mathbb{R}^3$中，与向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$都正交的单位向量是 (　　).

A. $(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$　　C. $(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}$

2. 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ a & b & \frac{-4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$为正交矩阵，则$a=$____________，$b=$____________.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$是正交的两个n维非零列向量，记n阶矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，则$\boldsymbol{A}^2=$______________.

4. 设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，则它的单位向量为______________.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数为 2，则$a=$______________.

二、求向量$\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)^{\mathrm{T}}$的夹角.

三、设有向量空间$\mathbb{R}^3$中的向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$. (1) 证明此向量组为$\mathbb{R}^3$的一个基；(2) 求向量$\boldsymbol{\alpha}=(-1,2,1)^{\mathrm{T}}$在此基下的坐标.

四、$\mathbb{R}^2$中两个基$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=(2,5)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{e}_2=(1,3)^{\mathrm{T}}\end{cases}$及$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1)^{\mathrm{T}}, \\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,7)^{\mathrm{T}}.\end{cases}$求由前一个基到后一个基的过渡矩阵.

五、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2+a,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3+a,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,4,4,4+a)^{\mathrm{T}}$.

(1) a 为何值时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关? (2) 当 $a=0$ 时, 求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

六、已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}7\\3\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}.$$

求：(1) 向量组的秩；(2) 向量组的一个极大线性无关组，并把其余的向量用该极大线性无关组表示.

七、设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵，证明：

(1) $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$；(2) $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

八、设 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别为 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明：

(1) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$；(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<2$.