

| 第 1 章 |

CHAPTER 1 |

绪 论

控制理论包含经典控制理论和现代控制理论,进一步可分为线性控制理论与非线性控制理论.与经典控制理论相关的教材有《自动控制理论》《自动控制原理》《控制工程》《自动控制系统》等,与现代控制理论相关的教材有《现代控制理论》《线性系统》《线性系统理论》《非线性控制理论》《现代控制系统理论》等.

系统辨识、控制理论、状态估计是现代控制论的基本内容.控制理论是研究基于动态系统数学模型的控制系统的分析、综合与设计,也就是说它是假设系统模型参数已知,在分析系统动态行为的基础上,为达到期望效果,对系统进行反馈综合与控制器设计;系统辨识是研究建立系统数学模型的理论与方法,其最基本内容是利用系统的观测(输入输出)数据,研究辨识方法估计系统模型的参数,因此模型辨识是控制理论与状态估计的基础;而状态估计或状态滤波是基于系统的状态空间模型,假设模型参数已知,考虑在噪声干扰环境下,利用系统的观测输入输出数据,估计系统的状态.最近作者出版了 4 部系统辨识学术专著^[1-4].

1.1 控制论的产生和发展

自动控制思想渊源很早,可以追溯到几千年前,但真正形成控制理论这门学科还是在 20 世纪 20 年代的事情.后来由于基于状态空间的现代控制理论的产生,而把 20 世纪 60 年代前发展的控制理论称为经典控制理论,把 20 世纪 60 年代后基于状态空间的控制理论称为现代控制理论.经典控制理论的研究对象主要为线性时不变单输入单输出(SISO)系统,其分析方法有时域法、根轨迹法、频域分析法等.1788 年,英国人詹姆斯·瓦特(James Watt, 1736—1819)在他发明的蒸汽机上使用了离心调速器,解决了蒸汽机的速度控制问题,引起了人们对控制技术的重视.然而在使用过程中发现在某些情况下,蒸汽机的速度可能自发地产生剧烈的振荡.实践中出现的问题,促使科学家们从理论上进行探索研究.1868 年,英国物理学家詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(James Clerk Maxwell, 1831—1879)通过对调速系统线性常微分方程的建立和分析,解释了瓦特蒸汽机速度控制系统中出现的剧烈振荡的不稳定问题,提出了简单的稳定性代数判据,开辟了用数学方法研究控制系统稳定性的途径.

此后,英国数学家爱德华·约翰·劳斯(Edward John Routh, 1831—1907)和德国数学家阿道夫·胡尔维茨(Adolf Hurwitz, 1859—1919)把麦克斯韦的思想扩展到用高阶微分方程描述的更复杂的系统中,分别在 1877 年和 1895 年各自提出了直接根据代数方程的系数判别系统稳定性的两个著名的稳定性判据——劳斯判据和胡尔维茨判据.这些方法奠定了经典控制理论中时域分析法的基础.

1932 年美国物理学家哈利·奈奎斯特(Harry Nyquist, 1889—1976)提出了在频域内研究系统的频率响应法,建立了以频率特性为基础的稳定性判据,为具有高质量的动态品质和

静态准确度的军用控制系统提供了所需的分析工具. 随后, 韦德·波德 (Hendrik Wade Bode, 1905—1982) 和迈克·尼科尔斯 (Nathaniel B. Nichols, 1914—1997) 在 1930—1940 年进一步将频率响应法加以发展, 形成了经典控制理论的 **频域分析法**.

1948 年, 沃尔特·理查德·埃文斯 (Walter Richard Evans, 1920—1999) 提出了 **根轨迹法**, 用作图的方法表示特征方程的根与系统某一参数的变化关系, 当这一参数取特定值时, 对应的特征根可在上述关系图中找到, 并且在控制系统的分析与设计中得到了广泛的应用. 根轨迹法具有直观的特点, 利用系统的根轨迹可以分析结构和参数已知的闭环系统的稳定性和瞬态响应特性, 还可分析参数变化对系统性能的影响. 钱学森在他的《工程控制论》中用两节介绍这一方法, 现在几乎所有的自动控制理论、自动控制原理或控制工程的有关书籍都详细介绍了根轨迹方法.

1948 年美国数学家诺伯特·维纳 (Norbert Wiener, 1894—1964) 把控制论引起的自动化技术同第二次产业革命联系起来, 出版了《控制论——关于在动物和机器中控制与通信的科学》, 书中论述了控制理论的一般方法, 推广了反馈的概念, 为控制理论这门学科的发展奠定了基础. 1954 年, 钱学森发表《工程控制论》, 并形成了控制科学在 20 世纪 50 年代和 60 年代的研究高潮. 这一时期的主要代表人物如下.

詹姆斯·克拉克·麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831—1879), 英国理论物理学家和数学家. 经典电动力学的创始人, 统计物理学的奠基人之一. 麦克斯韦最伟大的成就是用数学公理化的方法把经典电磁学理论形式化、系统化, 把前人互不相关的观测、实验和电学、磁学、光学的方程, 融合成一个自洽的理论, 即 **麦克斯韦方程组**. 麦克斯韦在电磁学上取得的成就被誉为继**艾萨克·牛顿** (Isaac Newton, 1642—1726) 之后, “物理学的第二次大统一”. 麦克斯韦被普遍认为是 20 世纪最有影响力的 19 世纪物理学家. 他对基础自然科学的贡献仅次于艾萨克·牛顿、**阿尔伯特·爱因斯坦** (Albert Einstein, 1879—1955). 在自动控制领域, 他提出了简单的稳定性代数判据, 开辟了用数学方法研究控制系统的途径.

哈利·奈奎斯特 (Harry Nyquist, 1889—1976), 美国物理学家, 通信工程师. 1914 年毕业于北达科他大学电气工程系, 获理学学士学位, 1915 年获理学硕士学位, 1917 年在耶鲁大学物理系获哲学博士学位. 1917—1919 年任美国电话电报公司工程部工程师, 1919—1934 年任开发研究部工程师. 1934—1954 年任贝尔电话实验研究所通信系统开发部咨询工程师. 奈奎斯特为近代信息理论做出了突出贡献. 他总结的 **奈奎斯特采样定理** 是信息论, 特别是通信与信号处理学科中的一个重要基本结论. 1928 年发现信道带宽和传输速率间的关系, 提出著名的奈奎斯特定理, 在现代通信工程中得到广泛的应用. 1932 年发现负反馈放大器的稳定性条件, 即著名的奈奎斯特稳定判据, 可用于各种线性反馈系统的设计.

沃尔特·理查德·埃文斯 (Walter Richard Evans, 1920—1999), 著名的控制理论家和根轨迹方法的创立者, 1941 年于华盛顿大学获得电气工程学士学位, 于 1951 年加利福尼亚大学获得电气工程硕士学位. 曾在通用电气、洛克威尔国际公司以及福特航空公司工作, 主要代表著作是与 McGraw-Hill 合著的《控制系统动态》, 主要学术贡献是提出 **根轨迹方法** (Root Locus Method). 获得美国机械工程师学会 “Rufus Oldenburger Medal” 奖以及 1988 年美国自动控制委员会 “Richard E. Bellman Control Heritage Award” 奖.

亨德里克·韦德·波德 (Hendrik Wade Bode, 1905—1982), 美国科学家, 1924 年于俄亥

俄州立大学获得学士学位, 1926 年在同一所大学获得数学硕士学位, 1935 年于哥伦比亚大学获得物理学博士学位. 曾任贝尔实验室的项目主管. 主要学术贡献是提出了控制系统频域的 **波德图**. 1979 年成为首位获得美国自动控制委员会 “The Richard E. Bellman Control Heritage Award” 奖.

诺伯特 维纳 (Norbert Wiener, 1894—1964), 美国数学家, 控制论的创始人. 1894 年 11 月 26 日生于密苏里州的哥伦比亚, 在其 50 年的科学生涯中, 先后涉足哲学、数学、物理学和工程学, 最后转向生物学, 在各个领域中都取得了丰硕成果, 称得上是恩格斯颂扬过的、本世纪多才多艺和学识渊博的科学巨人. 他一生发表论文 240 多篇, 著作 14 本. 他的主要著作有《控制论》(1948 年)、《维纳选集》(1964 年) 和《维纳数学论文集》(1980 年). 维纳还有两本自传《昔日神童》和《我是一个数学家》.

爱德华 约翰 劳斯 (Edward John Routh, 1831—1907), 1849 年在伦敦获得学士学位, 1853 年获得硕士学位, 英国数学家, 主要学术贡献是提出了 **劳斯稳定判据**, 根据系统特征方程式来判断特征根在 S 平面的位置, 从而决定系统的稳定性. 由于不必求解方程, 为系统的稳定性的判断带来了极大的便利.

克劳德 艾尔伍德 香农 (Claude Elwood Shannon, 1916—2001), 美国数学家、电子工程师和密码学家, 被誉为信息论的创始人, 1916 年出生于密歇根州的 Petoskey, 1932 年进入密歇根大学学习, 1936 年毕业于密歇根大学并获得数学和电子工程学士学位, 1940 年获得麻省理工学院 (MIT) 数学博士学位和电子工程硕士学位, 1941 年加入贝尔实验室数学部, 工作到 1972 年. 1956 年成为麻省理工学院 (MIT) 客座教授, 并于 1958 年成为终身教授, 1978 年成为名誉教授. 香农对奈奎斯特采样定理加以明确地说明并正式作为定理引用, 因此在许多文献中又称为 **香农采样定理**, 这是不恰当的, 至少应该称为 **奈奎斯特—香农采样定理**^①.

纳撒尼尔 B. 尼科尔斯 (Nathaniel B. Nichols, 1914—1997), 美国控制工程师, 在控制理论领域做出了杰出贡献. 1968 年担任 IEEE 控制系统社团主席 (IEEE Control Systems Society), 1974 年和 1975 担任美国自动控制委员会 (American Automatic Control Council) 会长, 1969 年获得 “Rufus Oldenburger Medal” 奖, 1980 年获得 “Richard E. Bellman Control Heritage Award” 奖. 主要贡献有控制系统的尼科尔斯图.

1.2 现代控制理论的分支

从 20 世纪 50 年代末开始, 随着科学技术的突飞猛进, 尤其是航空航天技术的飞速发展, 系统结构和完成的任务越来越复杂, 控制理论的研究对象由单输入单输出、线性、定常系统, 拓展为多输入多输出、非线性、时变系统. 对系统的控制性能要求也更高, 很多情况下要求系统的某些性能是最优的, 对环境的变化有一定的适应能力等. 这些新的控制性能用经典控制理论往往难以实现, 因此现代控制理论应运而生. 现代控制理论主要包括下面几个分支.

(1) **线性系统理论** (Linear System Theory). 线性系统理论是现代控制理论中应用最广泛

^① 奈奎斯特—香农采样定理是信息论的基础, 采样信号频率是唯一恢复连续时间信号的条件. 它不是基于离散时间模型重构连续时间系统的条件, 连续时间系统离散化是模型的离散化, 不涉及信号采样. 对于连续时间系统从其离散模型重构问题, 我们总结出的条件称为 **扩展奈奎斯特—香农采样定理**. 最近的研究表明, 连续时间系统可以唯一从其离散模型重构的条件是连续系统有实极点, 或者任意两个采样周期比为无理数, 参见本书 8.2 节、第 9 章和文献 [5, 6].

的分支,也是现代控制理论的基础.与经典控制理论不同,线性系统理论采用的数学模型是状态方程或状态空间模型.

(2) **最优控制理论** (Optimal Control Theory). 最优控制理论是在多种约束条件下寻找使系统某个性能指标泛函取极值的控制规律.以贝尔曼提出的“动态规划”和庞特里亚金提出的“极大值原理”为代表.

(3) **系统辨识** (System Identification). 系统辨识是研究建立系统数学模型的理论与方法.由于控制理论是对基于对象的数学模型进行分析和控制,因此系统辨识是现代控制理论的基础和重要研究内容之一.辨识广泛应用于许多科学和工程领域,如化工过程、电力系统、航空航天、社会经济系统、生物生态系统等.

(4) **自适应控制** (Adaptive Control). 系统模型参数未知是对基于已知参数数学模型的传统控制理论的挑战.自适应控制是实时辨识系统的数学模型参数,并按辨识获得的模型调整最优控制律.自适应控制包括模型参考自适应控制 (Model Reference Adaptive Control) 和自校正控制 (Self-tuning Control). 自校正控制是基于参数估计的单步预测控制.

(5) **鲁棒控制** (Robust Control). 鲁棒控制理论主要解决模型参数的不确定性的控制问题,在设计控制器时利用模型确定性信息 (即标称模型参数已知,忽略不确定部分) 来设计一个控制器,使得参数的不确定部分变化小时,仍能满足系统性能指标要求.鲁棒控制与系统辨识相结合便产生基于参数估计的鲁棒控制和自适应鲁棒控制.

(6) **预测控制** (Predictive Control). 预测控制理论是模型参数已知时的多步预测自校正控制.预测控制包括基于模型的预测控制和基于脉冲响应和阶跃响应的预测控制.预测控制是针对模型参数已知时,极小化多步预测误差准则函数,计算控制律.预测控制与系统辨识相结合便产生基于参数估计的预测控制和自适应预测控制.

1.3 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论的基础,用状态空间法描述诸变量之间的因果关系,不但反映了系统的输入输出外部特性,而且揭示了系统的内部结构特性.线性系统理论包括动态系统的状态空间描述、状态方程的求解、能控性、能观测性和稳定性分析、状态反馈以及状态观测器设计等.动力学系统稳定性与线性系统理论的主要代表人物如下.

亚历山大 米哈伊洛维奇 李雅普诺夫 (Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857—1918), 1857 年 6 月 6 日生于俄罗斯的雅罗斯拉夫尔, 1880 年圣彼得堡大学毕业, 1892 年获博士学位并成为教授. 1893 年起任哈尔科夫大学教授. 1916 年当选为巴黎科学院外籍院士. 李雅普诺夫是常微分方程运动稳定性理论的创始人, 1884 年他完成了“论一个旋转液体平衡之椭球面形状的稳定性”一文, 1888 年他发表了“关于具有有限个自由度的力学系统的稳定性”. 特别是 1892 年的博士学位论文 *The General Problem of the Stability of Motion* (运动稳定性的一般问题) 已经成为经典著作, 在其中开创性地提出求解非线性常微分方程的李雅普诺夫函数法, 也称直接法, 奠定了常微分方程稳定性理论的基础, 也是常微分方程定性理论的重要手段.

鲁道夫 卡尔曼 (Rudolf Emil Kalman, 1930—2016), 匈牙利裔美国数学家, 1930 年出生于匈牙利首都布达佩斯. 1943 年移居到美国. 分别于 1953 年、1954 年在麻省理工学院获得

学士、硕士学位。1957 年于哥伦比亚大学获得博士学位。1964—1971 年担任斯坦福大学教授。1971—1992 年任佛罗里达大学数学系统理论中心 (Center for Mathematical System Theory) 主任。1972 起任瑞士苏黎世联邦理工学院数学系统理论中心主任直至退休。2009 年获美国国家科学奖章。主要学术贡献是提出了卡尔曼滤波理论。

托马斯 凯拉斯 (Thomas Kailath, 1935—), 1935 年 6 月 7 日生于印度浦那。1956 年 6 月于浦那大学获得学士学位, 1959 年 6 月及 1961 年 6 月于麻省理工学院电气工程系获得硕士和博士学位。美国斯坦福大学教授、世界著名的控制与系统科学专家、美国科学院和工程院院士、第三世界科学院院士和印度工程院院士、IEEE Fellow。他的研究兴趣涉及信息理论、通信系统、计算、控制、线性系统、统计信号处理、大规模集成电路等。凯拉斯在多个研究领域做出了伟大的贡献, 也是名著 *Linear Systems* (1980 年)^[7] 以及 *Linear Estimation* (2000 年) 的作者, 于 1991 年获得了 IEEE 信号处理分会的最高分会奖, 在 2000 年获得了 IEEE 信息理论分会的香农奖等。

1.4 最优控制理论

最优控制理论是现代控制理论的重要组成部分, 它是在 20 世纪 50 年代中期在空间技术的推动下形成和发展起来的。最优控制理论所研究的主要问题是: 对一个受控的动力学系统或运动过程, 根据已建立的被控对象的数学模型, 选择一个容许的控制律, 使得被控对象达到预定的目标, 并使给定的某一性能指标达到最优。从数学上看, 最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题。

解决最优控制问题的主要研究方法包括经典变分法、动态规划和极大值原理。变分法是研究最优控制问题的很有力的数学工具之一, 但只能解决控制无约束, 即容许控制属于开集的一类优化控制问题, 而工程实践中遇到更多的是有约束的控制问题, 因此现代变分理论发展起来, 其中动态规划和极大值原理是最常用的两种方法。“动态规划”是美国学者贝尔曼 (R. Bellman) 在 1953—1957 年逐步创立的。他依据最优性原理, 发展了变分学中的哈密顿-雅可比理论, 构成了“动态规划”。极大值原理是苏联学者庞特里亚金等人在力学哈密顿原理的启发下提出的。动态规划和极大值原理能够很好地解决控制有闭集约束的变分问题。

最优控制在航空、航天及工业过程控制等许多领域都有广泛的应用, 如确定一个最优控制规律使飞行器由一个轨道转换到另一轨道过程中燃料消耗最少。如今, 最优控制理论的研究无论在深度上, 还是在广度上都有了很大的发展, 如对分布参数系统、随机系统、大系统的最优控制理论的研究等。最优控制领域主要代表人物如下。

列夫 庞特里亚金 (Lev Semenovich Pontryagin, 1908—1988), 前苏联数学家, 1908 年生于莫斯科, 14 岁时因万用油炉爆炸而失明。1924 年进入莫斯科国立大学, 1928 年毕业, 1935 年获得同校数学、物理博士学位。虽然双目失明, 母亲 Tatyana Andreevna 为他阅读数学书籍, 成为数学家。他的研究领域涉及拓扑学、代数、控制论等。1950 年开始研究振动理论和最优控制理论, 以庞特里亚金的极值原理著称于世。

贝尔曼 (Richard Ernest Bellman, 1920—1984), 美国数学家、美国国家工程院院士 (1977 年)、美国国家科学院院士 (1983 年)、动态规划的创始人。1941 年于布鲁克林学院获得数学学士学位, 后来于威斯康星大学获得硕士学位, 1946 年于普林斯顿大学获得博士学位。他

是南加利福尼亚大学教授, 美国艺术与科学研究院成员 (1975 年). 1949 年贝尔曼在 RAND 公司工作, 并提出了动态规划, 因在研究多段决策过程中提出动态规划而闻名于世. 1957 年他的专著 *Dynamic Programming* (动态规划) 出版后, 被迅速译成俄文、日文、德文和法文, 对控制理论界和数学界有深远影响. 贝尔曼还把不变嵌入原理应用于理论物理和数学分析方面, 把两点边值问题化为初值问题, 简化了问题的分析和求解过程. 1955 年贝尔曼开始研究算法、计算机仿真和人工智能, 把建模与仿真等数学方法应用到工程、经济、社会 and 医学等方面, 取得许多成就. 贝尔曼对稳定性的矩阵理论、时滞系统、自适应控制过程、分岔理论、微分和积分不等式等方面都有过杰出的贡献.

1.5 系统辨识理论

控制科学铸造了时代的辉煌, 高集成度计算机芯片是自动化控制科学技术的杰作. 控制科学跨越时空的伟大成就——电子设备计算能力和信息处理能力的提升、自动化设备和装备的出现、自动化电子产品的普及, 彻底改变了信息社会的生活方式, 美化了人们的生活. 在这背后, 我们不禁要问: 控制科学是什么, 控制科学的基础是什么?

控制科学就是在认识事物运动规律的基础上, 通过施加特定的、奇妙的控制作用 (控制律), 以改变事物的运动轨迹, 使其向着我们期望的方向发展. 事物的运动规律用方程描述就是数学模型. 数学模型是控制科学的基础, 在控制科学发展中起到了举足轻重的作用, 是一切自然科学的基础. 系统辨识是研究建立 (动态) 系统数学模型的理论与方法. 它是通过设计适当的输入信号, 利用实验的输入输出数据, 选择一类模型, 构造一个误差准则函数, 用优化方法确定与数据拟合得最好的一个模型 (这就是我们总结出的辨识四要素)^[1]. 系统辨识包含系统结构辨识和参数估计. 系统结构辨识就是系统数学表达式的形式. 对线性单输入单输出系统而言, 模型结构就是系统的阶次; 对线性多变量系统而言, 模型结构就是系统的能控性结构指数或能观测性结构指数, 系统阶次等于系统的能控性结构指数之和或能观测性结构指数之和.

辨识广泛应用于许多工程领域, 如化工过程、电力系统、航空航天、社会经济系统、生物生态系统等. 凡是需要应用观测数据确定数学模型和估计参数的问题都要利用辨识技术. 自适应控制系统是辨识与控制结合的一个典范, 形成了**自校正控制** (Self-Tuning Control); 辨识与预测控制结合形成**自校正预测控制** (Self-tuning Predictive Control); 辨识与鲁棒控制结合形成**自校正鲁棒控制** (Self-tuning Robust Control) 等.

在系统建模、系统辨识领域, 各国科学家进行了大量的研究工作, 在理论与应用方面都取得了不少优秀成果, 发表了大量论文, 出版了许多著作. 系统辨识领域的代表人物和工作如下.

托尔斯滕 索德斯特伦 (Torsten Söderström) 1945 年生于瑞典马尔默, 1969 年获得工程物理学硕士学位, 1973 年获得自动控制博士学位, 均毕业于瑞典隆德理工学院. 他是 IEEE Fellow 及 IFAC Fellow. 1967—1974 年于隆德理工学院 (Lund Institute of Technology) 工作. 自 1974 年开始任瑞典乌普萨拉大学 (Uppsala University) 系统与控制学院自动控制教授. 他在系统辨识领域做出了卓越的贡献. 他的主要研究兴趣包括系统辨识、信号处理和控制. 主要代表著作包括 *Theory and Practice of Recursive Identification* (1983

年)^[8], *Instrumental Variable Methods for System Identification* (1983 年), *System Identification* (1989 年), 以及 *Discrete-Time Stochastic Systems: Estimation and Control* (2002 年)。

莱纳特·荣 (Lennart Ljung) 1946 年出生于瑞典马尔默, 1967 年获得学士学位, 1970 年获得工程物理硕士学位, 1974 年获得控制理论博士学位, 均毕业于瑞典隆德大学。1974—1975 年任斯坦福大学 Research Associate 职位, 1970—1975 年任瑞典隆德大学控制理论专业 Teaching and Research Assistant 职位。1975—1976 年任瑞典隆德大学控制理论专业的 Associate Professor 职位。1976 年任瑞典 Linköping 大学教授。曾任 Linköping 大学 MOVII 策略研究中心的主任。他在系统辨识领域做出了卓越的贡献, 编写了 10 多部专著, 在国际期刊上发表 150 多篇论文, 在国际会议上发表 200 余篇论文, 并且开发了 MATLAB 商业软件包——系统辨识。他在系统辨识领域的代表著作是 *Theory and Practice of Recursive Identification* (1983 年)^[8] 和 *System Identification: Theory for the User* (1999 年)^[9]。

在自适应控制与系统辨识领域, 我国学者陈翰馥院士、郭雷院士等做出了重要工作, 出版了著作 *Identification and Stochastic Adaptive Control* (1991 年)^[10]。本书作者的博士生导师清华大学方崇智教授 (1919—2012) 和作者的老师萧德云教授在工业系统辨识与应用方面做出了杰出贡献, 出版了著作《过程辨识》(1988 年)^[11]、《系统辨识理论及应用》(2014 年)^[12], 他们是我国系统辨识方法在工业应用中的代表。本书作者在学术前辈研究成果基础上, 对系统辨识方法和辨识理论进行了长期深入的研究, 发表了 512 篇学术论文, 提出了一些原创性理论和方法, 如辅助模型辨识思想、多信息辨识理论、迭代辨识原理、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念、鞅超收敛定理等, 系列研究成果发表在控制领域国际权威期刊 *Automatica*、*IEEE Transactions*、*SIAM Journals*、*Systems & Control Letters* 等上, 且被广泛引用, 得到国内外同行的认可和高度评价。应科学出版社邀请, 正在出版“系统辨识学术专著丛书”8 部, 其中已出版 4 部^[1-4]。

1.6 自适应控制理论

自适应控制系统通过不断地测量系统的输入、状态、输出或性能参数, 根据所得的信息, 按照一定的准则和标准设计控制方案, 做出决策去更新控制器的结构和参数以适应环境的变化, 达到所要求的控制性能指标。自适应控制系统应具有 3 个基本功能: ① 辨识对象的结构和参数, 以便精确地建立被控对象的数学模型; ② 给出一种控制律以使被控系统达到期望的性能指标; ③ 自动修正控制器的参数。因此自适应控制系统主要用于过程模型未知或过程模型结构已知但参数未知的系统。自适应控制系统的类型主要有自校正控制系统、模型参考自适应控制系统、自寻最优控制系统、学习控制系统等。自适应控制领域的主要代表人物如下。

伊万·朗道 (Ioan Doré Landau) 于 1968 年获维也纳发明博览会大金奖, 1982 年获国家科学研究中心银奖, 1981—1984 年获最佳综述论文奖, 2000 年获美国机械学会鲁弗斯·欧德堡奖。他是鲁汶天主教大学名誉博士。1991—1993 年任欧盟控制协会第一任主席, 欧洲控制杂志主编。1992 年起历任加州大学伯克利分校机械工程系教授, 国立格勒诺布尔理工学院教授。研究兴趣: 系统辨识、自适应控制、鲁棒数字控制和非线性系统。共发表论文 200 多篇, 主要著作 *Adaptive Control—The Model Reference Approach* (New York: Marcel Dekker, 1979), *System Identification and Control Design* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990),

Adaptive Control – Theory and Practice (Tokyo, Japan: Ohm, 1981, in Japanese). *Adaptive Control* (New York: Springer—Verlag, 1997).

卡尔 约翰 阿斯特罗姆 (Karl Johan Åström) (1934 年—), 1934 年 8 月 5 日出生于瑞典 Östersund, 1957 年在瑞典皇家理工学院获得工程物理专业硕士学位, 1960 年在瑞典皇家理工学院获得自动控制与数学博士学位. Åström 是 IEEE Fellow, 瑞典皇家科学院成员, 瑞典皇家工程院副主席, 美国工程院外籍院士, 多次获得 IEEE 和 IFAC 的大奖. Åström 教授是国际自动控制界著名的学者之一, 是自校正控制学科的开拓者, 他在自动控制的众多领域, 特别是在系统辨识、自适应控制等方面做出了杰出贡献. 主要代表作包括 *Introduction to Stochastic Control* (1970 年)、*Adaptive Control* (1989 年)、*Advanced PID Control* (2005 年) 等.

格雷厄姆 古德温 (Graham Goodwin) (1945 年—), 于 1945 年 4 月出生在新南威尔士州的小镇布罗肯希尔, 是澳大利亚电气工程师. 在新南威尔士大学获得学士、硕士和博士学位. 现为新南威尔士大学电气工程的荣誉教授, 纽卡斯尔大学复杂动态系统与控制研究中心主任. 主要代表著作包括 *Adaptive Filtering Prediction and Control* (1984 年) ^[13]、*Control System Design* (2001 年)、*Constrained Control and Estimation* (2005 年).

预备知识

本章介绍线性代数和矩阵方面的基础知识, 包括矩阵运算、矩阵行列式、基本矩阵与特殊矩阵、矩阵特征值、特征多项式、特征向量、谱映射定理、矩阵秩、矩阵迹、相似变换、拉普拉斯变换等. 在思考题中将介绍一些著名而有趣的数学猜想: Hadamard 猜想、Goldbach (哥德巴赫) 猜想、Goormaghtigh 猜想等. 此外, 还将介绍在推导一般矩阵方程和耦合矩阵方程迭代解法时, 我们引进的一种新运算: 块矩阵运算的 **星积** (Star Product or $\star$ Product) 或称 **D 积** (D Product) ^[1,14-17], 它能够大大简化迭代算法的表达形式, 有兴趣的读者可参见作者发表在国际期刊 *IEEE Transactions on Automatic Control* ^[14]、*Systems & Control Letters* ^[15]、*SIAM Journal on Control and Optimization* ^[16]、*Applied Mathematics and Computation* ^[17,18]、*Computers & Mathematics with Applications* ^[19,20]、*IET Control Theory and Applications* ^[21]、*Journal of the Franklin Institute* ^[22,23] 上求解矩阵方程的迭代方法论文.

2.1 矩阵与行列式

2.1.1 矩阵

1. 矩阵的定义

矩阵 (Matrix) 是一个阵列或一定数目的方形网格. 一个 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 具有形式

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

它有 m 行 n 列, 其中 a_{ij} 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的元或元素 (Element, Entry), 第 i 行、第 j 列的元是 a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. 矩阵 $\mathbf{A}$ 是用方括号 “[]” 把阵列围起来, 也有的书上使用圆括号 “()”; 上面矩阵右下标 $m \times n$ 表示矩阵的 **维数** (Size, Dimension): m 行 n 列, 即 $\mathbf{A}$ 是一个 $m \times n$ 维矩阵, 记作 $(\mathbf{A})_{m \times n}$. 矩阵维数下标一般都省略. 对于 $m \times n$ 维实矩阵可记作 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 对于 $m \times n$ 维复矩阵可记作 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. 元为 a_{ij} 的 $m \times n$ 维实矩阵 $\mathbf{A}$ 可简单写作 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

2. 方阵

如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的行数 m 与列数 n 相等, 就说 $\mathbf{A}$ 是一个 $n \times n$ 维方阵, 简称 n 阶 **方阵** (Square Matrix). 例如

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

是一个方阵. 方阵 $\mathbf{A}$ 中行号等于列号的元 a_{ii} 称为对角元或对角元素, 对角元所在的位置称为对角线. a_{11} 与 a_{nn} 的连线称为 (主) 对角线, a_{n1} 与 a_{1n} 的连线称为斜对角线.

当矩阵只有一列时, 就称为列矩阵, 简称 **列向量** (Column Vector); 当矩阵只有一行时, 就称为 **行向量** (Row Vector). 列向量与行向量统称为向量.

3. 零矩阵

矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 的所有元 a_{ij} 都为零: $a_{ij} = 0$, 就称为 **零矩阵** (Zero Matrix), 即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

出于方便, 特别在分块矩阵中, 经常把零矩阵 (块) 写为 $\mathbf{0}$, 其维数需根据上下文确定.

4. 单位矩阵 或 单位阵

单位阵 (Identity Matrix) 是一个方阵. 当 $i = j$ 时, 对角元 $a_{ij} = 1$; 当 $i \neq j$ 时, 非对角元 $a_{ij} = 0$ 的矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为 **单位阵**, 简称 n 阶单位阵. 也就是, 单位阵对角元都为 1, 非对角元都为 0. 本书中单位阵用符号 $\mathbf{I}$ 表示. $\mathbf{I}$ 表示适当维数单位阵 (其维数需根据上下文确定), $\mathbf{I}_n$ 表示 n 阶单位阵, 即 $n \times n$ 维单位阵. 单位阵具有下列形式,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

单位阵中有许多 0 元. 在不致于混淆的情况下, 有时省略这些 0 元. 这种省略, 经常发生在分块矩阵和 **稀疏矩阵** (Sparse Matrix) 中 (许多元为零的矩阵称为稀疏矩阵). 单位阵也可简写为

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 或 } \mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, \cdots, 1).$$

2.1.2 矩阵运算

1. 矩阵加减法

矩阵加 (减) 法 (Matrix Addition and Subtraction) 定义为两个矩阵对应元相加 (减), 只适用于维数相同的两个矩阵. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则有

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}.$$

两个 2×3 矩阵的加法例子如下,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

矩阵加减法的性质:

(1) 设 A, B, C 是适当维数的矩阵, 则有

① $A + 0 = A$;

② $A + B = B + A$;

③ $A + B + C = A + (B + C)$.

(2) 设 $A, B, \dots, C$ 是相同维数的矩阵, 则矩阵加法范数的三角不等式成立:

① $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (矩阵加法范数三角不等式);

② $\|A + B + \dots + C\| \leq \|A\| + \|B\| + \dots + \|C\|$.

(3) 如果方阵 A 与 B 是 **可交换矩阵**, 即满足 $AB = BA$ 的矩阵, 那么 $A + B$ 的矩阵指数等于它们矩阵指数之积, 即

$$e^{A+B} = e^A e^B, \text{ 或 } \exp(A+B) = \exp(A) \exp(B).$$

在一般情况下, $\exp(A+B) \neq \exp(A) \exp(B)$.

2. 矩阵乘法

就像向量运算有 **点积** (Dot Product) 与 **叉积** (Cross Product) 一样, 矩阵乘法 (Matrix Multiplication) 有多种. 如果像矩阵加减法那样, 定义矩阵乘法为两个矩阵对应元相乘, 这就是 **Hadamard 积** (Hadamard product). 通常的 **矩阵乘法** 定义为一个矩阵的列 (向量) 乘以另一个矩阵的行 (向量) 的积作为乘积矩阵的一个元, 这要求被乘矩阵的列数等于相乘矩阵的行数, 这种矩阵乘法用途最广泛, 用数学语言叙述如下. 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times r}$, 它们的积 AB 是一个 $m \times r$ 维矩阵. 令 $C := AB = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times r}$, 有时直接把 AB 的第 (i, j) 元写作 $(AB)_{ij}$, 那么有

$$(AB)_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

如果把矩阵 A 用行向量表示为

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad \mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{F}^{1 \times n}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

矩阵 B 用列向量表示为

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r) \in \mathbb{F}^{n \times r}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

那么矩阵乘法可以表示为

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, b_2, \dots, b_r) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_r \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_r \end{pmatrix} = (a_i b_j) \in \mathbb{F}^{m \times r}. \end{aligned}$$

乘积矩阵 AB , 要求 A 的列数等于 B 的行数. 显然, 矩阵乘法不满足交换律: $AB \neq BA$, 因为 BA 不一定满足维数要求, 故不可相乘. 即使都是方阵 (满足维数要求), 矩阵乘法一般也不满足交换律 (Commutative Law).

一个 2×3 矩阵与一个 3×2 矩阵相乘的例子如下. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 2},$$

它们的乘积为

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}, \\ BA &= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

对于方阵 A 和 B , 如果等式 $AB = BA$ 成立, 就称 A 与 B 是可交换矩阵.

读者可能觉得: 矩阵乘法的这种定义很特别, 然而这种定义无论在线性方程组 $Ax = b$ 求解, 还是在线性变换中都非常有用.

矩阵乘法的性质

(1) 设 A, B, C 是相同维数的矩阵, c 是一标量, 则有

- ① $ABC = (AB)C = A(BC)$;
- ② $(A+B)C = AC + BC$; $A(B+C) = AB + AC$;
- ③ $AI = IA = A$;
- ④ $cAB = c(AB) = A(cB) = (cA)B$;
- ⑤ $A^k = AA^{k-1} = A^{k-1}A$, $A^0 = I$, 其中 k 为正整数.

(2) 矩阵数乘行列式与矩阵积的行列式. 如果 $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是方阵, c 是一标量, 则

有

- ① $\det[cA] = c^n \det[A]$;
 - ② $\det[AB] = \det[A] \det[B]$;
 - ③ $\det[ABC] = \det[A] \det[B] \det[C]$.
- (3) 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, 则有
- ① $\det[I_m + AB] = \det[I_n + BA]$;

$$\textcircled{2} \det[\lambda \mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{B}] = \lambda^{m-n} \det[\lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{B}\mathbf{A}].$$

(4) 矩阵乘积的范数不等式. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{C}$ 是适当维数的矩阵, $\det[\mathbf{X}] := |\mathbf{X}|$ 表示方阵 $\mathbf{X}$ 的行列式, 则有

$$\textcircled{1} \|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|;$$

$$\textcircled{2} \|\mathbf{A}\mathbf{B} \cdots \mathbf{C}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cdots \|\mathbf{C}\|.$$

柯西—施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz Inequality)

定义矩阵 2-范数 $\|\mathbf{A}\|_2 := \sqrt{\text{tr}[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]}$ ($\mathbf{X}^T$ 表示 $\mathbf{X}$ 的转置矩阵), 即矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有元素平方和开方, 也可以记作 $\|\mathbf{A}\|^2 := \text{tr}[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]$. 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都为实对角阵, 即

$$\mathbf{A} = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}[b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

利用矩阵乘积的范数不等式, 我们可以得到 **柯西—施瓦茨不等式**:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

对于所有 i , 如果比值 $a_i : b_i$ 相同, 则不等式取等号. 同理, 可以推得实数域上的一般不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \cdots c_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \cdots \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

这是本书作者首次给出的不等式, 且把它称为 **广义柯西—施瓦茨不等式**. 如果不等式中每项都用模代替, 则该不等式在复数域也成立, 即

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \cdots c_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \cdots \sum_{i=1}^n |c_i|^2.$$

3. 逆矩阵

如果方阵 $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 与 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 满足关系 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, 那么矩阵 $\mathbf{B}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的**逆矩阵** (Inverse Matrix). 根据矩阵乘法, 如果方阵 $\mathbf{A}$ 的逆记作 $\mathbf{A}^{-1}$, 则有 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. 如果 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{B}$ 的逆, 那么 $\mathbf{B}$ 也是 $\mathbf{A}$ 的逆.

逆矩阵只是对于方阵存在, 对于非方阵, 稍后定义左逆和右逆.

逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在的前提条件是其行列式不等于零: $\det[\mathbf{A}] \neq 0$; 在这个条件下称矩阵 $\mathbf{A}$ 是可逆的, 或 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵, 或 $\mathbf{A}$ 是**非奇异矩阵** (Nonsingular Matrix).

矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆可通过下式计算,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}[\mathbf{A}]}{\det[\mathbf{A}]},$$

其中 $\text{adj}[\mathbf{A}]$ 是 $\mathbf{A}$ 的**伴随矩阵** (Adjoint Matrix). 这说明逆矩阵存在时, 其行列式不为零.

一种手工计算矩阵逆的方法是构造**增广矩阵** (Augmented Matrix) $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$, 然后使用**高斯消元法** (Gaussian Elimination), 把它左半部分变换成单位阵 $\mathbf{I}$, 那么变换后增广矩阵的右半部分就是 $\mathbf{A}^{-1}$, 也就是最后的矩阵为 $[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}]$. 这种方法实际上是用高斯消元法求解矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}_n$, 因为解为 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

例 2.1.1 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = 0$, 则 A 和 $A + 2I$ 都可逆.

解 由给定的条件可得 $A(A - I) = 2I$ 或 $A \frac{A - I}{2} = I$. 故 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).$$

同理, 有 $(A + 2I)(A - 3I) + 4I = 0$, 或

$$(A + 2I) \left[-\frac{1}{4}(A - 3I) \right] = I.$$

故 $A + 2I$ 可逆, 且

$$(A + 2I)^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 3I).$$

可逆矩阵的性质

- ① 若方阵 A 可逆, 则 A^{-1} 是唯一的; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $\det[A^{-1}] = \{\det[A]\}^{-1}$.
- ② 若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ③ 若 A 可逆, c 为非零常数, 则 cA 可逆, 且 $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.
- ④ 方阵 A 和 B 都可逆, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ⑤ 当方阵 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 都可逆时, 乘积矩阵 $A_1A_2 \cdots A_m$ 也可逆, 且

$$(A_1A_2 \cdots A_{m-1}A_m)^{-1} = A_m^{-1}A_{m-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

4. 行初等变换求逆矩阵

定理 2.1.1 设 A 为 n 阶方阵, 下列叙述等价:

- ① A 是可逆阵;
- ② A 等价于单位阵 I_n ;
- ③ A 可表示为一些初等矩阵的乘积.

当 A 可逆时, 可用矩阵的逆求解矩阵方程: $AX = B$. 设 A 为 n 阶可逆阵, $X \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则对 $AX = B$ 两边左乘 A^{-1} , 有 $X = A^{-1}B$. 由于 $A^{-1}[A, B] = [I_n, A^{-1}B]$, 而 A^{-1} 可表示为一些初等矩阵的乘积, 因此把分块矩阵 $[A, B]$ 进行行初等变换时, 在把子块 A 变为 I_n 的同时, 子块 B 也就变为 $A^{-1}B$, 这就是要求的 X . 当然也可以由 A 先求出 A^{-1} , 再作矩阵乘法 $A^{-1}B$.

在解矩阵方程 $XA = B$ 时, 则要右乘 A^{-1} , 即 $X = BA^{-1}$. 或者通过解方程 $A^T X^T = B^T$, 先求出 X^T , 然后就可以求出 X .

5. 矩阵广义逆

如果方阵 A 与其逆满足关系 $AA^{-1}A = A$, 这种矩阵逆称为矩阵常规定逆, 它要求 A 是非奇异方阵. 当 A 是长方形或奇异矩阵时, 我们把方阵的逆进行推广. 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 把满足关系 $AA^{-}A = A$ 的矩阵 A^{-} 称为 A 的广义逆 (Generalized Inverse). 它是一个 $n \times m$ 维矩阵.

例 2.1.2 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么下列形式的矩阵,

$$\mathbf{A}^- = \begin{pmatrix} 2 & -3 & a \\ -1 & 2 & b \\ c & d & e \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{C},$$

都是 $\mathbf{A}$ 的广义逆. 这种广义逆是不唯一的.

在这个例子中, 如果 $a = b = c = d = e = 0$, 那么就得到 Moore-Penrose 广义逆的例子.

Moore-Penrose 广义逆 是唯一的.

还是在这个例子中, 如果 $a = b = c = d = 0$, 但 e 是任意的, 就得到 **Drazin 逆** (Drazin Inverse).

检验这个例子的 **MATLAB** 程序 如下.

```

1 %-----*
2 % Ding Feng (Feng Ding, F. Ding) 2008/03/23 Sunday *
3 % Filename: MCT-GeneralizedInverse01.m for generalized inverse *
4 %-----*
5 %   Feng Ding (Ding Feng, F. Ding, Ding F.) *
6 %   School of Internent of Things Engineering *
7 %   Jiangnan University *
8 %   Wuxi, 214122, PR China *
9 %   Email: fding@jiangnan.edu.cn *
10 %   www.fding.org *
11 %   Copyright 2008- *
12 %   Revision Date: 2013/04/19 hh:mm:ss By Feng Ding *
13 %-----*
14 clear; % Clear variables and functions from memory
15 format short g % Set output format.
16 syms a b c d e real % Construct symbolic numbers, variables and objects
17 A=[2, 3, 0; 1, 2, 0; 0, 0, 0]
18 Ainv=[2, -3, a; -1, 2, b; c, d, e] % Generalized inverse A^{-}
19 B=A*Ainv % AA^{-}
20 C=A*Ainv*A % AA^{-}A

```

在 MATLAB 命令行输入上述程序, 或者把上述代码保存在一个扩展名为.m 的文本文件中, 如 MCT-GeneralizedInverse01.m, 在 MATLAB 中运行结果如下.

```

1 A =
2      2      3      0
3      1      2      0
4      0      0      0
5
6 Ainv =
7 [ 2, -3,  a]

```

```

8  [ -1,  2,  b]
9  [  c,  d,  e]
10
11 B =
12 [      1,      0,  2*a+3*b]
13 [      0,      1,   a+2*b]
14 [      0,      0,      0]
15
16 C =
17 [ 2, 3, 0]
18 [ 1, 2, 0]
19 [ 0, 0, 0]

```

如果 $\mathbf{A}$ 是任一 $n \times n$ 实矩阵或复矩阵, 那么存在一个可逆矩阵 $\mathbf{B}$ 任意接近 $\mathbf{A}$, 即 $\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|$ 任意小. 这种接近距离是对于任意矩阵范数.

6. Hadamard 积

Hadamard 积 定义为两个矩阵对应元素相乘, 因此两个矩阵的维数必须相同. Hadamard 积用符号 “ $\circ$ ” 表示. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 那么它们的 Hadamard 积定义为

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = [a_{ij}] \circ [b_{ij}] = [a_{ij}b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n},$$

即 Hadamard 积矩阵的第 (i, j) 元等于 $a_{ij}b_{ij}$. 两个 2×3 矩阵的 Hadamard 积例子如下,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Hadamard 积的性质

(1) 设 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 是相同维数的矩阵, c 是一标量, 则有

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A};$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{A} \circ \mathbf{C};$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{A} \circ (c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}).$$

(2) **Oppenheim 不等式** (Oppenheim Inequality): 如果 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正定矩阵, a_{ii} 是矩阵 $\mathbf{A}$ 对角线上元素, 那么 Hadamard 积的行列式满足不等式:

$$\det[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}] \geq \det[\mathbf{B}] \prod_{i=1}^n a_{ii},$$

当且仅当 $\mathbf{A}$ 是一个对角阵, 不等式取等号.

两个 **幂级数** (Power Series) 的 Hadamard 积定义为它们的对应项相乘. 级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i$ 的 Hadamard 积定义为 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i x^i$. 这个定义用处不大.

7. 直积

Kronecker 积 (Kronecker product) 用符号 “ $\otimes$ ” 表示, 它不要求两个矩阵的维数相同. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ 是 $r \times s$ 矩阵, 它们的 Kronecker 积是一个 $(mr) \times (ns)$

维矩阵:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(mr) \times (ns)}.$$

根据定义, Kronecker 积不满足乘法交换律: $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$. Kronecker 积也称为 直积 (Direct Product) 或 张量积 (Tensor Product).

一个 2×3 矩阵与一个 3×2 矩阵的 Kronecker 积例子如下. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

则有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & a_{13}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & a_{23}\mathbf{B} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{cc|cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{21} & a_{13}b_{22} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{13}b_{31} & a_{13}b_{32} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{11} & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{23}b_{31} & a_{23}b_{32} \end{array} \right), \\ \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} b_{11}\mathbf{A} & b_{12}\mathbf{A} \\ b_{21}\mathbf{A} & b_{22}\mathbf{A} \\ b_{31}\mathbf{A} & b_{32}\mathbf{A} \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{13}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{23}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{12} \\ \hline a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{13}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{23}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{22} \\ \hline a_{11}b_{31} & a_{12}b_{31} & a_{13}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{32} & a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{31} & a_{22}b_{31} & a_{23}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{22}b_{32} & a_{23}b_{32} \end{array} \right). \end{aligned}$$

直积的性质

(1) 设 c 是一标量, $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 是适当维数的矩阵, 即满足加法、乘法等运算维数要求, 下列等式成立,

- ① $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$,
- ② $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$,
- ③ $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \otimes \mathbf{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{A}$,
- ④ $c(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (c\mathbf{B})$,
- ⑤ $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$,
- ⑥ $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$.

(2) 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都是可逆矩阵, 则有

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

(3) 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别是 m 和 n 阶方阵, $\{\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值, $\{\mu_j, j = 1, 2, \dots, n\}$ 是 $\mathbf{B}$ 的特征值, 那么 $\{\lambda_i \mu_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$ 是 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 的 mn 个特征值, 且下列关系成立,

$$\textcircled{1} \det[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}] = (\det[\mathbf{A}])^n (\det[\mathbf{B}])^m,$$

$$\textcircled{2} \operatorname{tr}[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}] = \operatorname{tr}[\mathbf{A}] \operatorname{tr}[\mathbf{B}],$$

$$\textcircled{3} \operatorname{rank}[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}] = \operatorname{rank}[\mathbf{A}] \operatorname{rank}[\mathbf{B}].$$

8. Star 积 或 块矩阵内积

星积 (Star Product or $\star$ Product) 或称 D 积 (D Product), 是本书作者在推导一般矩阵迭代解法时, 引进的一种新的运算, 在简化迭代算法表达式时非常有用^[1, 15, 16]. 星积用符号 $\star$ 表示, 它不同于 Hadamard 积 (内积), 也不同于一般矩阵乘法. 令

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(mp) \times n}, \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(np) \times m},$$

$$\mathbf{A}_i := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{pi} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(mp) \times m}, \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(mp) \times n},$$

$$\mathbf{B}_i := [\mathbf{B}_{1i}, \mathbf{B}_{2i}, \dots, \mathbf{B}_{pi}] \in \mathbb{F}^{n \times (np)},$$

$$\mathbf{S}_A := [\mathbf{A}_{ij}], \quad \mathbf{S}_B := [\mathbf{B}_{ij}], \quad \mathbf{S}_{B^T} := [\mathbf{B}_{ij}^T], \quad \mathbf{S}_p := [\mathbf{B}_{ij}^T \otimes \mathbf{A}_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, p.$$

块矩阵星积 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \star \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_2 \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_p \mathbf{Y}_p \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_A \star \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \mathbf{X}_1 & \mathbf{A}_{12} \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \mathbf{X}_p \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{X}_1 & \mathbf{A}_{22} \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{2p} \mathbf{X}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{p1} \mathbf{X}_1 & \mathbf{A}_{p2} \mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{pp} \mathbf{X}_p \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X} \star \mathbf{S}_B &= \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \mathbf{B}_{11} & \mathbf{X}_1 \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{X}_1 \mathbf{B}_{1p} \\ \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_{21} & \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_p \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{X}_p \mathbf{B}_{p2} & \cdots & \mathbf{X}_p \mathbf{B}_{pp} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_A \star \mathbf{S}_B &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12} \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \mathbf{B}_{1p} \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22} \mathbf{B}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2p} \mathbf{B}_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{p1} \mathbf{B}_{p1} & \mathbf{A}_{p2} \mathbf{B}_{p2} & \cdots & \mathbf{A}_{pp} \mathbf{B}_{pp} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

块矩阵星 Kronecker 积 (Block-Matrix Star Kronecker Product) 使用符号 “ $\star$ ”, 定义为

$$\mathbf{S}_{B^T} \star \mathbf{S}_A = \mathbf{S}_p.$$

星积运算优于矩阵乘法运算. 注意 $\mathbf{AB} \star \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \star \mathbf{C}) \neq (\mathbf{AB}) \star \mathbf{C}$. 一般 $\mathbf{A} \star \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \star \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \star \mathbf{B} \star \mathbf{C} = (\mathbf{A} \star \mathbf{B}) \star \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \star (\mathbf{B} \star \mathbf{C})$.

星积的性质

令 $\mathbf{I}_{np \times n} = [\mathbf{I}_n, \mathbf{I}_n, \dots, \mathbf{I}_n]^T \in \mathbb{R}^{(np) \times n}$. 星积 (Star Product) 有下列性质.

$$\textcircled{1} \quad \mathbf{I}_{np \times n}^T \mathbf{X} \star \mathbf{Y} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p] \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^p \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{tr} \left\{ \mathbf{X}_i^T \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{pi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_p \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{1i}^T \\ \mathbf{B}_{2i}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{pi}^T \end{pmatrix} \right\} = \text{tr} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1i} \mathbf{X}_i \mathbf{B}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} \mathbf{X}_i \mathbf{B}_{2i} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{pi} \mathbf{X}_i \mathbf{B}_{pi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_p \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\textcircled{3} \quad \left\| (\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{pi} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_p \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{1i}^T \\ \mathbf{B}_{2i}^T \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{pi}^T \end{pmatrix} (\mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T)^{-1/2} \right\|^2 \leq mn \left\| \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_p \end{pmatrix} \right\|^2.$$

当块矩阵的维数都是一维, 则块矩阵星积退化 Hadamard 积. 使用块矩阵星积, 本书作者提出一般耦合矩阵 [1, 15, 16]

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \mathbf{X}_1 \mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_{12} + \dots + \mathbf{A}_{1p} \mathbf{X}_p \mathbf{B}_{1p} = \mathbf{F}_1, \\ \mathbf{A}_{21} \mathbf{X}_1 \mathbf{B}_{21} + \mathbf{A}_{22} \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_{22} + \dots + \mathbf{A}_{2p} \mathbf{X}_p \mathbf{B}_{2p} = \mathbf{F}_2, \\ \dots \\ \mathbf{A}_{p1} \mathbf{X}_1 \mathbf{B}_{p1} + \mathbf{A}_{p2} \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_{p2} + \dots + \mathbf{A}_{pp} \mathbf{X}_p \mathbf{B}_{pp} = \mathbf{F}_p. \end{cases}$$

可以简单写作

$$\mathbf{S}_A \star \mathbf{X} \star \mathbf{S}_B = \mathbf{F},$$

其中 $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 、 $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是常数矩阵, $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是未知矩阵.

2.1.3 分块矩阵

一个矩阵称为 **分块矩阵** (Partitioned Matrix or Block Matrix), 指它的“元”是由其他一些小矩阵构成的. 这些维数小的矩阵称为块 (Block) 或 **子矩阵** (Sub-matrix). 例如, 对于 5×5 矩阵

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 9 & 9 \end{array} \right),$$

通过定义一些小矩阵:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix},$$

那么矩阵 $\mathbf{A}$ 可以写作

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \text{或 } \mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right).$$

1. 分块矩阵运算

分块矩阵运算与矩阵加法、减法、乘法规则一致, 但须满足维数一致. 例如两个分块矩阵的乘法规则如下,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{31}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{32}\mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

2. 块对角矩阵

块对角矩阵用符号 blockdiag 表示. 设 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ 是方阵 (不一定维数相同), 它们构成的块对角矩阵 $\mathbf{A}$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{blockdiag}[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k] \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_k \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_1 & & & \\ \hline & \mathbf{A}_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & \mathbf{A}_k \end{array} \right), \end{aligned}$$

其中非对角块为零 (矩阵), 上面矩阵把零矩阵块 $\mathbf{0}$ 都省略了. 分块对角阵的维数是对角线上子矩阵维数之和. 在不致于混淆的情况下, 有时也将上述块对角矩阵简写成下面 3 种等价形式之一:

$$\text{blockdiag}(\mathbf{A}_i, i = 1, 2, \dots, k),$$

$$\text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k),$$

$$\text{diag}(\mathbf{A}_i, i = 1, 2, \dots, k).$$

有些资料上, 这种块对角阵也称为方阵 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ 的 **直和** (Direct Sum), 直和用符号 “ $\oplus$ ” 表示. 因此有

$$\text{blockdiag}(\mathbf{A}_i, i = 1, 2, \dots, k) = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{A}_k.$$

3. 块对角阵的幂

块对角阵 $\mathbf{A}$ 的 n 次幂为

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_k^n \end{pmatrix} =: \text{blockdiag}(\mathbf{A}_1^n, \mathbf{A}_2^n, \dots, \mathbf{A}_k^n);$$

块对角阵 $\mathbf{A}$ 的矩阵指数为

$$\exp(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{A}_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\mathbf{A}_k) \end{pmatrix}.$$

4. 舒尔补 (Schur Complement)

设矩阵 A 、 B 、 C 、 D 分别是维数为 $m \times m$ 、 $m \times n$ 、 $n \times m$ 和 $n \times n$, 矩阵

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

是一个 $(m+n) \times (m+n)$ 维矩阵. 如果矩阵 D 是可逆的, 矩阵 M 中块 D 的舒尔补 Q_1 是一个 $m \times m$ 维矩阵, 定义为

$$Q_1 := A - BD^{-1}C.$$

类似地, 如果矩阵 A 是可逆的 (Invertible), 矩阵 M 中块 A 的舒尔补 Q_2 是一个 $n \times n$ 维矩阵, 定义为

$$Q_2 := D - CA^{-1}B.$$

舒尔补源于部分高斯消去法, 在第 1 种情况 (即 D 可逆时), 它可用下三角块矩阵

$$T_1 = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix}$$

右乘 M 得到. 类似地, 在第 2 种情况 (即 A 可逆时), 它可用下三角块矩阵

$$T_2 = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}$$

左乘 M 得到.

2.1.4 行列式的定义与计算

行列式 (Determinant) 是一种代数运算 (Algebraic Operation), 它把方阵 A 映射为标量. 这个运算有许多重要性质. 例如, 如果矩阵 A 的行列式为零, 那么 A 就是奇异的 (奇异矩阵), 即 A 的逆不存在. 只有方阵才有行列式. 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

的行列式记作 $\det[A]$ 或 $|A|$. 它们可表示为

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}.$$

上式中, π 是对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的所有排列 S_n 求和, $\text{sgn}(\pi)$ 代表排列的奇偶性 (Parity of the Permutation); 对于偶排列, $\text{sgn}(\pi) = +1$; 对于奇排列, $\text{sgn}(\pi) = -1$. 行列式共有 $n!$ 项求和.

这是行列式的定义, 通常行列式不用这个公式计算, 而是按行或按列用代数余子式展开进行计算. 例如, 2×2 矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3×3 行列式有 $3! = 6$ 项, 其计算方式按第 1 行展开为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

4 阶以上的行列式可以按这种方法类推计算. 这里使用了 **余子式**. 下面介绍子式和余子式.

英文中 minor 也可以说是一个选定行号和列号的子矩阵, 不一定是行列式, 可从上下文理解. 矩阵子式 (子矩阵) 似乎还没有一个标准符号, 一个可选的符号是 $[\mathbf{A}]_{K,L}$.

如果删去一个行列式中的某些行和列, 余下的称为 **余子式** (Cofactor). 余子式包含符号 $(-1)^{i+j}$ 就称为代数余子式, 这里 i 和 j 是被删去行和列的行号与列号.

行列式性质

① 矩阵与它转置的行列式相等, 即 $\det[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{A}^T]$.

② 行列式的任意两行 (两列) 互换位置, 行列式的值改变符号.

③ 行列式等于任意一行 (列) 所有元素 a_{ij} 与其对应的代数余子式 A_{ij} 的乘积之和, 即按行展开如下,

$$\det[\mathbf{A}] = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

或按列展开如下,

$$\det[\mathbf{A}] = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

④ 行列式中任意一行 (列) 的元与另一行 (列) 的相应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 即当 $i \neq k$ 时, 有

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \quad k \neq i,$$

或

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0, \quad k \neq j.$$

⑤ 行列式一行 (列) 的公因子可以提到行列式符号的外面.

⑥ 若行列式的某一行 (列) 元都是两数之和, 则该行列式等于两个行列式之和.

⑦ 用常数乘行列式的某一行 (列) 的各元, 加到另一行 (列) 对应的元素上, 行列式的值不变.

⑧ 方阵乘积的行列式等于行列式的乘积. 也就是说, 对于任意两个方阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$, 总有

$$\det[\mathbf{AB}] = \det[\mathbf{A}] \det[\mathbf{B}].$$

⑨ 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{F}^n$ 和 $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$, c 是一个标量, 则有

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{A} + \mathbf{ab}^T] &= \det[\mathbf{A}] + \mathbf{b}^T \text{adj}[\mathbf{A}]\mathbf{a}, \\ \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} \\ \mathbf{b}^T & c \end{pmatrix} &= c \det[\mathbf{A}] - \mathbf{b}^T \text{adj}[\mathbf{A}]\mathbf{a}, \end{aligned}$$

其中 $\text{adj}[\mathbf{A}]$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 (Adjoint Matrix).

把满足 $\det[\mathbf{A}] \neq 0$ 的方阵 $\mathbf{A}$ 称为非奇异的 (或非退化的) 矩阵, 否则就称为奇异的 (或退化的).

对于 2×2 矩阵, 计算逆很简单. 设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

它的逆为

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbf{A}]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

其中设行列式不为零: $\det[\mathbf{A}] = ad - bc \neq 0$.

下列一些说法是等价的:

- ① $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是可逆矩阵 (Invertible Matrix);
- ② $\mathbf{A}$ 是可逆的 (Invertible);
- ③ $\mathbf{A}$ 是非奇异的 (Nonsingular);
- ④ $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵 (Nonsingular Matrix);
- ⑤ $\mathbf{A}$ 逆或 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在;
- ⑥ $\mathbf{A}$ 的行列式 (Determinant) 不等于零;
- ⑦ $\mathbf{A}$ 是满秩的, $\text{rank}[\mathbf{A}] = n$;
- ⑧ $\mathbf{A}$ 的列线性无关, $\mathbf{A}$ 的行线性无关;
- ⑨ $\mathbf{A}$ 没有零特征值;
- ⑩ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 只有零解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

对于矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 假设 $\det[\mathbf{A}] \neq 0$, 那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在, 上式两边左乘以 $\mathbf{A}^{-1}$ 可得

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

根据矩阵逆的定义可得 $\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, 所以解为 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. 这是一种很耗时的计算, 不鼓励这样计算, 通常是使用高斯消元法或 LU 分解 技术求解.

2.1.5 矩阵行列式性质

矩阵行列式有下列性质.

① 矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积 (行列式运算把矩阵乘转换成标量乘), 即对于维数相同的方阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$, 有

$$\det[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \det[\mathbf{A}] \det[\mathbf{B}].$$

② 下三角矩阵行列式 (上三角矩阵的行列式) 等于对角元的乘积.

③ 相似矩阵有相同的行列式. 对于方阵 $\mathbf{A}$ 和可逆矩阵 $\mathbf{X}$, 有

$$\det[\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}] = \det[\mathbf{A}].$$

④ 奇异矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式为零. 也就是说, 齐次方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\mathbf{x}$.

⑤ 转置矩阵的行列式不变. 即对于方阵 $\mathbf{A}$, 有

$$\det[\mathbf{A}^T] = \det[\mathbf{A}].$$

⑥ 方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的行列式等于其所有特征值的乘积, 包括重特征值. 设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 则有

$$\det[\mathbf{A}] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

⑦ 方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的行列式是齐次的 (Homogeneous), 其阶次为 n , 即

$$\det[c\mathbf{A}] = c^n \det[\mathbf{A}], \quad c \text{ 是标数 (标量)}.$$

2.1.6 块矩阵行列式

块矩阵行列式有下列性质

① 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{D}$ 都是方阵, 且 $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵 (Nonsingular Matrix), 则有

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det[\mathbf{A}] \det[\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}], \quad (2.1.1)$$

矩阵 $\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的舒尔补. 如果 $\mathbf{D}^{-1}$ 存在, 则有

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det[\mathbf{D}] \det[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}],$$

这里矩阵 $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ 称为矩阵 $\mathbf{D}$ 的舒尔补.

② 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{D}$ 都是方阵, 则有

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det[\mathbf{A}] \det[\mathbf{D}]$$

和

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det[\mathbf{A}] \det[\mathbf{D}].$$

③ 设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{D}$ 都是 $n \times n$ 方阵, 令

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

由于矩阵乘积行列式等于矩阵行列式之积 $\det[\mathbf{M}\mathbf{N}] = \det[\mathbf{M}] \det[\mathbf{N}]$, 所以

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{D} \end{pmatrix} \det[\mathbf{J}] = (-1)^n \det[\mathbf{A}] \det[\mathbf{D}].$$

最后一步利用了事实: $\det[\mathbf{J}] = 1$.

性质①的证明 当 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在时, 对下列矩阵等式两边取行列式,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

立即得证.

2.2 基本矩阵与特殊矩阵

2.2.1 对角矩阵、斜对角矩阵

1. 对角矩阵或对角阵

对角阵 (Diagonal Matrix) 是一个方阵. 矩阵 $\mathbf{A}$ 称为对角阵或对角矩阵, 是指它的所有非主对角元都为 0. 从这个定义可知: 一个 $n \times n$ 对角阵完全由它的对角上 n 元确定. 设对角元为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 那么对角阵 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

有时为方便起见, 把上述对角阵简单写作为

$$\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

很明显, 单位阵 (Identity Matrix) 和 零矩阵 (Zero Matrix) 是对角阵.

对角矩阵的性质

① 如果一个方阵 $\mathbf{A}$ 既是上三角阵, 又是下三角阵, 那么 $\mathbf{A}$ 是对角阵.

② 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是相同维数的对角阵, 那么它们的和 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 与积 $\mathbf{AB}$ 也是对角阵; 它们还满足矩阵乘法交换律 (Commutation): $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. 因此, 实对角矩阵或复对角矩阵是正则矩阵 (Normal Matrix).

③ 如果对角元不等于零, 对角矩阵的逆是对角阵, 其逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1} = \text{diag}[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}] = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

对角阵的幂为

$$\mathbf{A}^k = \text{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k].$$

④ 对角阵 $\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 对应的特征向量是 n 维单位向量. 对角阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$p(s) = \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n).$$

⑤ 对角矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式等于对角元的乘积:

$$\det[\mathbf{A}] = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

对角阵 $\mathbf{A}$ 的迹为

$$\mathrm{tr}[\mathbf{A}] = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

⑥ 对角阵 $\mathbf{A}$ 的 **矩阵指数** $e^{\mathbf{A}} =: \exp(\mathbf{A})$ 为

$$\exp(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} = \mathrm{diag}[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots, e^{\lambda_n}];$$

如果对角元都不为零, 对角阵的 **矩阵对数** 为

$$\mathrm{Ln}[\mathbf{A}] = 2k\pi\mathbf{I}\sqrt{-1} + \mathrm{diag}[\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \cdots, \ln \lambda_n], \quad k \in \mathbb{Z},$$

主值为

$$\ln[\mathbf{A}] = \mathrm{diag}[\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \cdots, \ln \lambda_n].$$

2. 斜对角矩阵

方阵 $\mathbf{A}$ 称为斜对角矩阵或 **斜对角阵** (Anti-Diagonal Matrix or Skew-Diagonal Matrix), 是指除斜对角线上元外, 其余元都为零. 斜对角阵具有下列形式,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & \cdots & a_3 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

将上述斜对角阵简单写作为

$$\mathbf{A} = \mathrm{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

其逆为

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{adiag}\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n-1}}, \cdots, \frac{1}{a_1}\right).$$

斜对角阵的性质

① 两个斜对角阵之积是对角阵.

② 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{\Lambda}$ 分别是斜对角阵和对角阵, 那么 $\mathbf{A}\mathbf{\Lambda}$ 和 $\mathbf{\Lambda}\mathbf{A}$ 都是斜对角阵.

③ 斜对角阵 $\mathbf{A} = \mathrm{adiag}[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 的行列式为

$$\det[\mathbf{A}] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i.$$

因此有

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = 1.$$

④ 斜对角阵 $\mathbf{A} = \text{adiag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 的 矩阵指数 为

$$\exp[\mathbf{A}] = \text{diag}[\cos(a_1), \cos(a_2), \dots, \cos(a_n)] + \text{adiag}[\sin(a_1), \sin(a_2), \dots, \sin(a_n)].$$

性质③的证明 根据行列式的定义, 斜对角阵的行列式为

$$\det[\mathbf{A}] = \text{sgn}(n, n-1, \dots, 1) \prod_{i=1}^n a_i.$$

下一步就是确定正负号. 把符号 sgn 中最后一元素移到第 1 位置, 有 $n-1$ 次变号, 即

$$\text{sgn}(n, n-1, \dots, 1) = (-1)^{n-1} \text{sgn}(1, n, n-1, \dots, 2).$$

再把最后一个元素移到第 2 位置, 有 $n-2$ 次变号, 即

$$\text{sgn}(n, n-1, \dots, 1) = (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \text{sgn}(1, 2, n, n-1, \dots, 3).$$

重复这个过程, 直到

$$\text{sgn}(n, n-1, \dots, 1) = (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \dots (-1)^1 \text{sgn}(1, 2, \dots, n-1, n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

于是有

$$\det[\text{adiag}(a_1, a_2, \dots, a_n)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i.$$

如果 n 或 $n-1$ 是 4 的倍数, 符号为正, 否则为负. 当 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$ 时, 符号依次为 $+, -, -, +, +, -, -, +, +, \dots$.

当然, 也可以通过代数余子式计算:

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{A}] &= (-1)^{1+n} a_1 \text{adiag}[a_2, a_3, \dots, a_n] \\ &= (-1)^{1+n} (-1)^{1+n-1} a_1 a_2 \text{adiag}[a_3, a_4, \dots, a_n] \\ &= (-1)^{1+n} (-1)^{1+n-1} (-1)^{1+n-2} a_1 a_2 a_3 \text{adiag}[a_4, a_5, \dots, a_n] \\ &= (-1)^{1+n} (-1)^{1+n-1} (-1)^{1+n-2} \dots (-1)^2 a_1 a_2 a_3 \dots a_n \\ &= (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

2.2.2 奇异矩阵、三角阵

1. 奇异矩阵

如果 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的行或列是线性相关的 (不是线性无关的), 那么就说 $\mathbf{A}$ 是奇异的或奇异矩阵 (Singular Matrix). 下列说法是等价的.

① $\mathbf{A}$ 的行列式为零, $\det[\mathbf{A}] = 0$.

② $\mathbf{A}$ 的秩小于 n , $\text{rank}[\mathbf{A}] < n$.

③ 齐次线性系统 (Homogeneous Linear System) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非零解.

一个矩阵的行列式等于其所有特征值之积, 故奇异矩阵至少有一个特征值为零. 因为奇异矩阵的行列式为零, 故奇异矩阵是不可逆的 (Not Invertible), 奇异矩阵的 条件数 (Condition Number) 是无穷大.

2. 三角矩阵或三角阵

三角阵 (Triangular Matrix) 也是方阵, 是 **上三角阵** (Upper Triangular Matrix) 和 **下三角阵** (Lower Triangular Matrix) 的统称. 上三角阵也称为 **右三角阵** (Right Triangular Matrix), 下三角阵也称为 **左三角阵** (Left Triangular Matrix). 上三角阵 $\mathbf{U}$ 和下三角阵 $\mathbf{L}$ 具有下列形式.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

在许多情况下, 三角阵使数值算法计算更快捷. 例如, 对于线性矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 如果 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 三角阵, 则求解只需要 n^2 次乘法运算和加法运算. 线性方程组的高斯消元法 (Gauss Elimination) 就是把系数矩阵化为 **三角阶梯形** (Echelon) 结构, 进行求解.

三角阵在线性代数和矩阵论中非常有用. 通过 **矩阵因子分解** (Matrix Factorization) 或 **矩阵分解** (Matrix Decomposition), 矩阵可以分解为三角形式因子. 例如, **Cholesky 分解** (Cholesky Factorization) 可以把一个对称正定矩阵分解为一个三角阵与其转置相乘; **LU 分解** (LU-factorization) 把一个矩阵分解为一个单位下三角阵与一个上三角阵之积.

对角线上元都为零的三角阵称为 **严格三角阵** (Strictly Triangular Matrix); 对角元都为 1 的三角阵称为 **单位三角阵** (Unit Triangular Matrix).

三角矩阵的性质

- ① 两个上 (下) 三角阵之积或和是上 (下) 三角阵.
- ② 三角阵的行列式等于对角元之积.
- ③ 三角阵的逆是三角阵 (假设逆存在).
- ④ 三角阵的特征值是对角元.
- ⑤ 严格三角阵是一个幂零矩阵. 如果 $\mathbf{A}$ 是一个 $n \times n$ 严格三角阵, 那么它的 n 次幂为零矩阵: $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.
- ⑥ 严格三角阵 $\mathbf{U}_s$ 没有矩阵对数; 严格上三角阵

$$\mathbf{U}_s = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵指数为

$$\exp[\mathbf{U}_s] = \mathbf{I}_n + \mathbf{U}_s + \frac{1}{2!}\mathbf{U}_s^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{U}_s^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{U}_s^{n-1}.$$

它也是一个严格上三角阵.

2.2.3 置换矩阵、转置矩阵

1. 置换矩阵或置换阵

置换阵 (Permutation Matrix) 是通过重排单位阵的行 (列) 得到的矩阵. 用置换阵 P 左乘矩阵 A 相当于重排 A 的行; 用置换阵 P 右乘矩阵 A 相当于重排 A 的列.

设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵, 矩阵 P 是通过交换单位阵 I_n 的两行 (第 i 行和第 j 行) 得到的置换阵, 那么 A 的第 i 行与第 j 行交换就得到积 PA ; A 的第 i 列与第 j 列交换就得到积 AP .

置换阵的性质

- ① 置换阵是正交矩阵.
- ② 置换阵是可逆矩阵.
- ③ 置换阵的积是置换阵.

置换阵的例子:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

它的第 1 行是单位阵的第 2 行, 它的第 2 行是单位阵的第 4 行, 它的第 3 行是单位阵的第 1 行, 它的第 4 行是单位阵的第 3 行, 所以 P 是一个置换阵. 用 P 左乘某个矩阵 A 得到,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

注意: PA 与 A 有相同的行, AP 与 A 有相同的列, 但顺序不一样.

2. 转置矩阵

一个矩阵是矩阵 $A = [a_{ij}]$ 的转置矩阵 (Transpose Matrix), 是指矩阵 A 的 (i, j) 元 a_{ij} 调换到 (j, i) 位置. A 的转置矩阵通常记作 A^T (也有的记作 A' 或 A^r). 根据定义, A^T 的第 (i, j) 元是 a_{ji} , 即 $A^T = [a_{ji}]$. 对于一个 $m \times n$ 矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n},$$

它的转置矩阵为

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

矩阵与其转置矩阵的第 (i, i) 元相同, 都是 a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, \min[m, n]$. 矩阵转置不要求矩阵行数与列数相同, 即非方阵也有转置矩阵.

转置矩阵的性质

① 转置运算 (Transpose Operation) 具有线性算子性质

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad (c_1 \mathbf{A})^T = c_1 (\mathbf{A})^T, \quad (c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{B})^T = c_1 \mathbf{A}^T + c_2 \mathbf{B}^T,$$

其中 c_i 为常数, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵.

② 两个矩阵之积的转置等于它们转置的倒序乘积:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

③ 矩阵转置的逆等于矩阵逆的转置. 如果方阵 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵, 则有

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T =: \mathbf{A}^{-T}.$$

④ 如果 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 实矩阵, 即 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 则 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 都是非负定矩阵:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \geqslant 0, \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^T \geqslant 0;$$

$\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 有相同的非零特征值.

⑤ 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, 则 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ 有相同的迹, 都等于 $\mathbf{A}$ 所有元的平方和:

$$\text{tr}[\mathbf{A}^T \mathbf{A}] = \text{tr}[\mathbf{A} \mathbf{A}^T] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

⑥ 转置运算也适合于向量. 设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是 n 维实列向量, 则它们的 **点积** (Dot Product) 可以表示为转置的乘积:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

这意味着

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

这是向量 **欧几里得范数** (Euclidean Norm) 平方的另一种定义.

2.2.4 对称矩阵、反对称矩阵、斜对称矩阵

1. 对称矩阵

n 阶方阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是 **对称矩阵** (Symmetric Matrix) 或对称阵, 是指它的元满足关系 $a_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$. n 阶对称阵有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立元素, 对称矩阵的例子如下,

$$\begin{pmatrix} s & -\sigma \\ -\sigma & s \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} s-a_1 & -b & -c \\ -b & s-a_2 & -d \\ -c & -d & s-a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & g & h & i & j \\ c & h & m & n & o \\ d & i & n & s & t \\ e & j & o & t & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

对称矩阵的性质

- ① 对角矩阵是对称矩阵.
- ② 如果 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 那么 $\mathbf{A}$ 是对称阵.
- ③ 如果 $\mathbf{A}$ 是方阵, 那么 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ 、 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ 和 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 都是对称矩阵.
- ④ 两个实对称矩阵乘法可交换, 当且仅当两者的特征空间相同.
- ⑤ 任何方阵可以表示为一个对称阵与一个反对称阵之和, 因为

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}.$$

⑥ 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是对称阵, 那么 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 是对称阵, 一般 $\mathbf{AB}$ 不是对称阵. 两个对称阵之积是对称阵, 当且仅当它们是乘法可交换阵 ($\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$).

⑦ 如果 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵, $\mathbf{T}$ 的维数与 $\mathbf{A}$ 相同, 那么 $\mathbf{TAT}^T$ 是一个对称矩阵.

⑧ 每个实方阵都可写作两个实对称矩阵的积, 每个复方阵都可写作两个复对称矩阵的积.

⑨ 用 $\langle \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上内积, 即 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$. 实矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称的, 当且仅当对于所有 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 等式 $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ay} \rangle$ 成立.

2. 反对称矩阵

反对称矩阵 (Anti-symmetric Matrix) 都是实方阵. 方阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 称为 **反对称阵**, 是指 $a_{ij} = -a_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$. 因此, 反对称阵对角元为零, 因为 $a_{ii} = -a_{ii}$. 除 0 元素外, 反对称阵只有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立元素. 反对称阵例子如下,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

注: 反对称阵的“反”是符号相反的意思, 而不是沿斜对角线对称.

反对称阵是复数域反赫米特矩阵 (Anti-Hermitian Matrix) 的特殊形式, 故反对称阵满足复数反赫米特矩阵的所有性质.

反对称矩阵的性质

- ① 一个矩阵同时为对称矩阵及反对称矩阵, 当且仅当所有元素都是零.
- ② 如果 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, 那么 $\mathbf{A}$ 是反对称阵. 或者说, 反对称矩阵满足 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \mathbf{0}$.
- ③ 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是反对称阵, 那么 $c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{B}$ 是反对称阵, 这里 c_1, c_2 为标量.
- ④ 反对称阵的迹为零. 如果 $\mathbf{A}$ 是反对称阵, 那么 $\text{tr}[\mathbf{A}] = 0$.
- ⑤ 对于任意方阵 $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ 是反对称矩阵.
- ⑥ 若 $\mathbf{A}$ 是反对称矩阵, 对任意向量 $\mathbf{x}$, 有 $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = 0$.

⑦ 设 $\mathbf{A}$ 是一个反对称阵, 矩阵 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{A}$ 维数相同, 那么 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$ 是反对称阵.

⑧ 反对称阵的所有特征值的实部为零, 即特征值都是纯虚数或零. 证明参见反赫米特矩阵.

⑨ 奇数阶反对称阵的行列式为零. 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是反对称矩阵, 其行列式满足

$$\det[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{A}^T] = \det[-\mathbf{A}] = (-1)^n \det[\mathbf{A}]$$

若 n 是奇数, 则行列式等于零. 这个结果称为雅可比定理, 是卡尔·古斯塔夫雅各·雅可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804—1851 年) 在 1827 年证明的. 他的主要贡献有线性方程组雅可比迭代求解方法和雅可比四平方和定理 (Jacobi's Four Square Theorem).

若 n 是偶数, 反对称阵的行列式不为零, 如一个 2 阶反对称阵的行列式为

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

但是偶数阶反对称阵的行列式可以写成部分元素的多项式的平方: $\det[\mathbf{A}] = \text{Pf}(\mathbf{A})$. 这个多项式称为 $\mathbf{A}$ 的 Pfaffian. 任意实反对称矩阵的行列式是非负数.

3. 斜对称矩阵

斜对称矩阵 (Skew-Symmetric Matrix) 沿斜对角线对称. n 阶方阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是斜对称矩阵或斜对称阵, 是指它的元素满足关系

$$a_{ij} = a_{n-j+1, n-i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

斜对称阵有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立元素, 斜对称矩阵的例子如下.

$$\begin{pmatrix} s & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} s - a_1 & -b & -c_1 \\ -d & s - a_2 & -b \\ -c_3 & -d & s - a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4 \times 4}.$$

读者可参见 <http://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian> 上反斜对称阵的性质. 当然, 可以定义反斜对称阵, 以及既对称又斜对称阵, 可以研究同时对称、反对称、斜对称、反斜对称阵的性质, 如对应行列式、特征值、特征多项式的性质.

既对称又斜对称矩阵的例子如下,

$$\begin{pmatrix} s & -\sigma \\ -\sigma & s \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3 \times 3},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & f & g & c \\ c & g & f & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{4 \times 4}.$$

从这例子可以看出, 2 阶对称又斜对称矩阵有 2 个独立元素、3 阶对称又斜对称矩阵有 4 个独立元素、4 阶对称又斜对称矩阵有 6 个独立元素. 笔者给出一般 n 阶对称又斜对称矩阵的独立元素数目为

$$N := \begin{cases} (n^2 + 2n)/4, & n \text{ 为偶数,} \\ (n+1)^2/4, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

读者可以研究对称又斜对称矩阵的行列式的计算公式, 以及随维数递增的行列式之间的关系.

2.2.5 共轭矩阵、Hermitian 矩阵

这里先介绍复数与共轭复数, 然后介绍复共轭矩阵.

1. 复数与共轭复数

设 $z \in \mathbb{C}$ 是一个复数 (Complex Number), 其实部 (Real Part) 为 a , 虚部 (Imaginary Part) 为 b , 即

$$z = a + bj,$$

其中 a 和 b 都为实数, 正体 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位. z 的 **共轭复数** (Conjugate Complex Number) 定义为

$$\bar{z} = a - bj.$$

很明显, $z + \bar{z}$ 为实数, $\bar{z} - z$ 为虚数. 复数 z 的模 (Complex Modulus) $|z|$ 是一个非负实数, 定义为

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|.$$

2. 共轭矩阵

设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是一个复数矩阵, 即 $\mathbf{A}$ 的元为复数. 那么 $\mathbf{A}$ 的**共轭矩阵** (Conjugate Matrix) 定义为

$$\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a_{ij}}] \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

共轭向量也有类似的定义, 如复数列向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ 的共轭向量定义为

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T \in \mathbb{C}^n.$$

3. 共轭转置矩阵

复矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 的**共轭转置矩阵** (Conjugate Transpose Matrix) 定义为共轭矩阵的**转置** (transpose). 共轭转置矩阵用 $\mathbf{A}^*$ 表示, 所以有

$$\mathbf{A}^* = (\overline{\mathbf{A}})^T.$$

设 c 是一个复数, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是适当维数的矩阵, 共轭矩阵的性质有

- ① $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$,
- ② $\overline{A^T} = (\overline{A})^T$, $\operatorname{tr}[\overline{A}] = \overline{\operatorname{tr}[A]}$, $\det[\overline{A}] = \overline{\det[A]}$, $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$,
- ③ $A + \overline{A}$ 是一个实矩阵,
- ④ $(A^*)^* = A$, $(cA)^* = \overline{c}A^*$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$,
- ⑤ $A^* = \overline{A^T}$, $\operatorname{tr}[A^*] = \overline{\operatorname{tr}[A]}$, $\det[A^*] = \overline{\det[A]}$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$,
- ⑥ $A + A^*$ 的迹是实数.

4. Hermitian 矩阵

矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 称为 **赫米特矩阵**(Hermitian Matrix), 是指它满足 $A = A^*$.

赫米特矩阵是在 Charles Hermite (1822—1901 年) 时命名的. 赫米特在 1855 年证明了赫米特矩阵的特征值是实数. 赫米特矩阵的例子,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+j & 1+2j & 1+3j \\ 1-j & 2 & 2+2j & 2+3j \\ 1-2j & 2-2j & 3 & 3+3j \\ 1-3j & 2-3j & 3-3j & 4 \end{pmatrix}$$

这个矩阵也是正规矩阵.

Hermitian 矩阵的性质

- ① 如果 A 是赫米特矩阵, c 是实数, 则 cA 也是赫米特矩阵;
- ② 如果 A 是方阵, 那么 $A + A^*$ 是赫米特矩阵;
- ③ 对于 $m \times n$ 矩阵 A , AA^* 和 A^*A 都是赫米特矩阵;
- ④ 设 A 与 B 都是同维数赫米特矩阵, 那么 $A + B$ 是赫米特矩阵;
- ⑤ 赫米特矩阵的特征值是实数. 实对称阵是赫米特矩阵;
- ⑥ 赫米特矩阵的对角元是实数; 赫米特矩阵的迹是实数;
- ⑦ 赫米特矩阵的共轭是赫米特矩阵;
- ⑧ 如果 A 是赫米特矩阵, T 的维数与 A 相同, 那么 TAT^* 是一个赫米特矩阵;
- ⑨ 用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上内积, 即 $\langle x, y \rangle = x^*y$. 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是赫米特矩阵, 当且仅当对于所有 $x, y \in \mathbb{C}^n$, 等式 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ 成立.

5. 反赫米特矩阵

一个方阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是 **反赫米特矩阵**(Anti-Hermitian Matrix), 是指它满足 $A = -A^*$.

反赫米特矩阵的性质

- ① 反赫米特矩阵的迹为纯虚数或零.
- ② 反赫米特矩阵的特征值为纯虚数或零.

证明 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, x_{ij} 和 y_{ij} 是矩阵元素 a_{ij} 的实部和虚部, 即 $a_{ij} = x_{ij} + jy_{ij}$. 根据定义有, $a_{ii} = -\overline{a_{ii}}$, 即 $x_{ii} + jy_{ii} = -x_{ii} + jy_{ii}$, 所以有 $x_{ii} = 0$. 又

$$\operatorname{tr}[A] = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n x_{ii} + jy_{ii} = j \sum_{i=1}^n y_{ii}.$$

性质①证毕. 下面证明性质②. 设 $\mathbf{x}$ 是对应于反赫米特矩阵 $\mathbf{A}$ 特征值 λ 的单位特征向量 ($\mathbf{x}^* \mathbf{x} = 1$), 按照定义有 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$. 两边左乘以 $\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{x}}^T$ 得到

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \lambda.$$

两边取共轭得到

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}} &= \mathbf{x}^T \overline{\mathbf{A} \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{x}^* \overline{\mathbf{A}}^T)^T \\ &= (\mathbf{x}^* \mathbf{A}^*) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

这个等式说明 $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ 为纯虚数, 所以特征值为纯虚数.

2.2.6 正定矩阵、正交矩阵、酉矩阵

1. 正定矩阵

正定矩阵、负定矩阵、正半定矩阵 (非负定阵)、负半定矩阵 (非正定阵) 都是对实对称方阵而言.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个 $n \times n$ 对称实方阵. 如果对任意非零实向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ 成立, 那么 $\mathbf{A}$ 是 **正定矩阵** (Positive Definite Matrix), 正定矩阵的特征值都大于零; 如果对任意非零实向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ 成立, 那么 $\mathbf{A}$ 称为 **正半定阵** (非负定阵). 正半定矩阵 (Positive Semi-definite Matrix) 的特征值都大于或等于零.

如果 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵, 那么 $-\mathbf{A}$ 为 **负定矩阵**; 如果 $\mathbf{A}$ 为正半定矩阵, 那么 $-\mathbf{A}$ 为 **负半定矩阵** (非正定阵).

正定矩阵的判断方法:

(1) 如果对称矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值都为正数, 那么 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵; 如果 $\mathbf{A}$ 的特征值为非负数, 那么 $\mathbf{A}$ 为非负定矩阵.

(2) 如果对称矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的各阶顺序主子式的行列式都大于零, 即

$$\begin{aligned} a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots, \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0, \end{aligned}$$

那么 $\mathbf{A}$ 为正定矩阵. 如果上述大于号 “>” 改为 “ $\geq$ ”, 那么 $\mathbf{A}$ 为非负定矩阵.

2. 正交矩阵

实数域上, 一个 $n \times n$ 实矩阵 $\mathbf{Q}$ 称为正交矩阵 (Orthogonal Matrix), 是指它满足 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$. 此式等价于

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}.$$

正交矩阵的行或列构成一个 **正交规范基** (Orthonormal Basis), 因为正交矩阵的两个不同行的内积是零, 同一行的内积为 1. 正交矩阵在线性代数中非常重要, 典型的正交矩阵是

Givens 旋转 (Givens Rotations) 和 Householder 变换 (Householder Transformations). 这些变换不会放大舍入误差而影响数值稳定性.

正交矩阵的性质

① 正交矩阵的行列式等于 1 或 -1 , 即 $\det[\mathbf{Q}] = \pm 1$.

② 正交变换下内积保持不变, 因为 $(\mathbf{Q}\mathbf{x})^T \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$.

③ 正交变换的欧几里得范数不变: $\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$. 因此, 最小二乘问题 $\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$ 两边乘以正交矩阵 $\mathbf{Q}^T$, 得到一个等价问题 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$; 两个问题有相同的解. 换句话说, 如果 $\mathbf{Q}$ 不是正交矩阵, 则两个问题的解不同.

④ 2×2 的 **旋转矩阵** (Rotation Matrix) 和 **反射矩阵** (Reflection Matrix) 是正交阵, 它们分别是

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

⑤ 正交矩阵定义在实数域上, 正交矩阵是复数域上酉阵的特殊情形, 因为对于正交矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有 $\overline{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{Q}^T$. 参见酉矩阵.

2.2.7 特殊矩阵

1. 范德蒙矩阵

范德蒙矩阵 (Vandermonde Matrix) 在多项式插值和多项式拟合、友矩阵对角化、快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 中非常有用.

一个 $n \times n$ 范德蒙矩阵具有下列形式.

$$\mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

范德蒙矩阵的行列式为

$$\det[\mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \det[x_i^{j-1}] = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

广义范德蒙矩阵 (The Generalized Vandermonde Matrix) 定义为

$$\mathbf{V}_n := [a_i^{b_j}] := \begin{pmatrix} a_1^{b_1} & a_1^{b_2} & \cdots & a_1^{b_n} \\ a_2^{b_1} & a_2^{b_2} & \cdots & a_2^{b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^{b_1} & a_n^{b_2} & \cdots & a_n^{b_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

至今还没有找到 **广义范德蒙矩阵的行列式** 的通式解.

设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, 则广义范德蒙矩阵的行列式总是正数: $\det[\mathbf{V}_n] > 0$. 这意味着 $\mathbf{V}_n$ 的所有主子式 (Principal Subminors) 的行列式都大于零.

本书作者给出推广了的特殊 $n \times n$ 矩阵 (有些类似范德蒙矩阵),

$$\mathbf{D}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 & \cdots & x_1^{2n-3} \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 & \cdots & x_2^{2n-3} \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 & \cdots & x_3^{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^3 & x_n^5 & \cdots & x_n^{2n-3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 & \cdots & x_1^{2n-2} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 & \cdots & x_2^{2n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 & \cdots & x_3^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^4 & \cdots & x_n^{2n-2} \end{pmatrix},$$

还有从范德蒙矩阵中去掉一列或几列, 再加一列或几列得到的矩阵, 如

$$\mathbf{V}'(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}''(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^3 & \cdots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

笔者认为: 这些特殊矩阵 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{F}$ 的行列式应该有通式解, 值得研究. 可先计算下列 4 阶矩阵的行列式找规律:

$$\mathbf{D}(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 \\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}'(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}''(x_1, x_2, x_3, x_4) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^4 \end{pmatrix}.$$

2. 胡尔维茨矩阵

一个矩阵 $\mathbf{A}$ 称为 **胡尔维茨矩阵** (Hurwitz Matrix), 是指它的所有特征值有严格的负实部, 即 $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$. 胡尔维茨矩阵必须是方阵. 这样的矩阵也称为 **稳定矩阵** (Stable Matrix or Stability Matrix), 因为线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 是稳定的. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是系统的 **平衡点** (Equilibrium Point). 只要 $\mathbf{A}$ 稳定, 在任意初始值 $\mathbf{x}(0)$ 下, $\mathbf{x}(t)$ 总是收敛到 $\mathbf{0}$.

如果多项式 $p(s)$ 是稳定的, 即 $p(s)$ 的零点或 $p(s) = 0$ 的所有根具有负实部, 那么 $p(s)$ 就称为胡尔维茨多项式 (Hurwitz Polynomial). 如果有理传递函数矩阵 $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的各元的极点 (即各元分母多项式的零点) 都有负实部, 那么 $\mathbf{G}(s)$ 就称为 Hurwitz 矩阵多项式.

注: 并没有要求 $G(s)$ 是方阵; 也不是说对某个具体的 s 值, $G(s)$ 是胡尔维茨矩阵.

我们说 A 是胡尔维茨矩阵, 指 **动态系统** (Dynamic System)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

是稳定的, 即系统有一个稳定的传递矩阵 (传递函数).

3. 海赛矩阵

设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个实值函数, 具有二阶偏导数 (Second Order Partial Derivative). 函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =: f(\mathbf{x})$ 的 **海赛矩阵** (Hessian Matrix) 定义为

$$\mathbf{H}(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

在一定条件下, 混合偏导数 (Mixed Partial Derivatives) 相等, 海赛矩阵是一个对称矩阵.

4. 幂零矩阵

一个方阵 A 是 **幂零矩阵** (Nilpotent Matrix), 是指存在一个正整数 k 使得 A^k 为零矩阵, 即

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ 个}} = \mathbf{0}.$$

显然有 $A^{k+i} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

定理 2.2.1 幂零矩阵的特征 (Characterization of Nilpotent Matrices)

一个矩阵为幂零矩阵, 当且仅当它的所有特征值为零.

证明 假设 $A^k = \mathbf{0}$. 令 λ 为 A 的一个特征值, 那么对于某个非零向量 $\mathbf{x}$, 有 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. 通过递推归纳可得

$$\lambda^k \mathbf{x} = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}A\mathbf{x} = A^k \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

所以 $\lambda = 0$. 相反, 假设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的所有特征值都为零, 那么 A 的特征多项式为

$$\det[\lambda I - A] = \lambda^n.$$

根据凯莱—哈密顿定理 3.4.1, 可知 $A^n = \mathbf{0}$.

幂零矩阵的性质

- ① 对于 2×2 非零矩阵 A , 如果 A 是幂零矩阵, 那么 $A^2 = \mathbf{0}$.
- ② 幂零矩阵的 **相似矩阵** (Similarity Matrix) 是幂零矩阵.
- ③ 因为矩阵行列式等于特征值的乘积, 所以幂零矩阵的行列式为零; 矩阵迹等于特征值之和, 故幂零矩阵的迹为零.
- ④ 一类幂零矩阵是 **严格上三角阵** (Strictly Upper Triangular Matrix) 和 **严格下三角阵** (Strictly Lower Triangular Matrix). 参见 2.2.2 节三角阵.

5. 幂等矩阵

一个方阵 $\mathbf{A}$ 是 **幂等矩阵** (Idempotent Matrix), 是指 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. 显然有 $\mathbf{A}^k = \mathbf{A}$, $k = 2, 3, 4, \dots$.

幂等矩阵的性质

- ① 一个矩阵为幂等矩阵, 当且仅当它的所有特征值为 0 或 1.
- ② 单位阵是一个幂等矩阵. 除单位阵外, 所有幂等矩阵都是奇异的.
- ③ 幂等矩阵总是可对角化的.
- ④ 幂等矩阵的迹 (主对角元之和) 总是等于矩阵的秩, 且为整数.
- ⑤ 单位阵减去幂等矩阵为幂等矩阵. 假设 $\mathbf{A}$ 为幂等矩阵, 我们有 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^2 = \mathbf{I} - 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{A}.$$

例如, $\mathbf{Q}_1 := \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ 和 $\mathbf{Q}_2 := \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ 都是幂等矩阵.

6. 对角优势矩阵

方阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 是 **对角优势矩阵** (Diagonally Dominant Matrix), 是指对所有 $i = 1, 2, \dots, n$, 下列不等式成立,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

若 “ $\geq$ ” 改为 “ $>$ ”, $\mathbf{A}$ 称为 **严格对角优势矩阵** (Strictly Diagonally Dominant Matrix). 这是行对角优势, 同样可定义列对角优势矩阵. 行对角优势和列对角优势统称为对角优势.

定理 2.2.2 莱维 - 德普朗克定理 (Levy-Desplanques Theorem)

一个严格对角优势矩阵是非奇异的: $\det[\mathbf{A}] \neq 0$.

证明 用反证法证明. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 是严格对角优势矩阵, $\mathbf{A}$ 是奇异的, 即有一个特征值为零, 如 $\lambda = 0$. 由 Gershgorin 定理可知, 存在一个 i 使得

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq |\lambda - a_{ii}| = |a_{ii}|.$$

这与严格对角矩阵定义矛盾. 定理得证.

7. 正规矩阵

一个复数矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 称为 **正规矩阵** (Normal Matrix), 是指它满足

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^*,$$

即 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^*$ 矩阵乘法可交换, 其中 $\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的共轭转置矩阵. 根据定义, 正规矩阵必为方阵. 类似地, 对于实矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正规矩阵, 是指它满足 $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\top$. 正规矩阵的例子如下,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & j \\ -j & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

正规矩阵的性质

- ① 如果 $\mathbf{A}$ 是正规矩阵, 那么 $\mathbf{A}^*$ 也是正规矩阵.
 ② 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}^*$ 是乘积可交换, 那么它们都是正规矩阵.
 ③ 根据 舒尔不等式 (Schur Inequality) 可知, 正规矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 满足

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i[\mathbf{A}]|^2 = \text{tr}[\mathbf{A}^* \mathbf{A}],$$

其中 $\lambda_i[\mathbf{A}]$ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值.

④ 复方阵 $\mathbf{A}$ 是一个对角阵, 当且仅当 $\mathbf{A}$ 既是一个正规矩阵, 又是一个三角阵. 这可总结为下面的定理.

定理 2.2.3 可交换矩阵定理 (Commutable Matrix Theorem)

设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 是可交换矩阵. 如果 $\mathbf{B}$ 可逆, 那么 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}^{-1}$ 是可交换的; 如果 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 都可逆, 那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 与 $\mathbf{B}^{-1}$ 是可交换矩阵.

证明 由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 可交换假设, 可知 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 左边与右边都乘以 $\mathbf{B}^{-1}$ 得到 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AB}^{-1}$. 左边与右边都乘以 $\mathbf{A}^{-1}$ 得到 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$.

2.3 特征值问题: 特征多项式、特征方程、特征值**2.3.1 特征多项式和特征方程****1. 特征多项式**

方阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的 **特征多项式** (Characteristic Polynomial) 定义为矩阵 $s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ 的行列式:

$$p(s) := \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s - a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{F}. \quad (2.3.1)$$

它是 s 的一个 n 次首 1 多项式.

2. 特征方程

特征方程 (Characteristic Equation) 定义为 $p(s) = 0$, 即

$$\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = 0, \quad (2.3.2)$$

或

$$\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s - a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

3. 特征值

工程上, 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 特征值简单定义为特征方程 $\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = 0$ 的根 s_i . n 阶矩阵共有 n 个特征值 $s_1, s_2, \dots, s_n$, 可能包含重特征值. 实矩阵的特征值不一定是实数. 对称矩阵的特征值为实数.

数学上特征值的定义: 对于方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, 标量 $\lambda \in \mathbb{C}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 **特征值** (Eigenvalue), 是指存在一个非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 满足方程:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (2.3.3)$$

特征值的线性变换几何解释: 一个向量 $\mathbf{x}$ 对 $\mathbf{A}$ 的作用不改变方向, 其幅值 (Magnitude) 增加 λ 倍.

式 (2.3.3) 可以写成一个 **线性齐次方程** (Linear Homogeneous Equation) $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 如果这个方程有非零解 $\mathbf{x}$, 那么其系数矩阵的行列式为零, 即

$$\det[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0.$$

这个方程等同于式 (2.3.2) 的特征方程.

即使 $\mathbf{A}$ 为实矩阵, 即 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其特征值也可能是复数, 并且实矩阵的复特征值以共轭形式成对出现. 例如,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\det[s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 1 = 0.$$

这个方程没有实数解, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 没有实数特征值, 只有两个 **共轭复数特征值** (Conjugate Complex Eigenvalue): $s = \lambda_1 = \sqrt{-1}$ 和 $s = \lambda_2 = -\sqrt{-1}$.

特征值的性质

- ① 矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}^T$ 有相同的特征值, 因为 $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T]$.
- ② 赫米特矩阵的特征值是实数. 对称矩阵的特征值是实数.
- ③ 反对称矩阵 (Anti-symmetric Matrix) 的特征值是虚数或零.
- ④ 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 所有特征值都不同 (Distinct), 那么 $\mathbf{A}$ 可对角化.

2.3.2 特征向量

设 $\mathbf{A}$ 是一个 $n \times n$ 方阵, λ 是 $\mathbf{A}$ 的特征值, 满足方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 的非零 n 维列向量 $\mathbf{x}$, 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 **特征向量** (Eigenvector). 从这个定义可知, 特征向量不是唯一的, 因为对于非零常数 α , $\alpha\mathbf{x}$ 也是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

对应于 $\mathbf{A}$ 的特征值 λ_i 的特征向量 $\mathbf{p}_i$ 通过求解 $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_n)\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ 或 $(\lambda_i\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$ 得到. 这是求特征向量的一种方法, 但不是唯一的方法, 其他方法可参考 **奇异值分解** (SVD 分解).

如果矩阵 $\mathbf{A}$ 存在 n 个独立的特征向量 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$, 那么矩阵 $\mathbf{A}$ 相似于一个对角阵. 事实上, 将

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

写成紧凑形式为

$$[\mathbf{A}\mathbf{p}_1, \mathbf{A}\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{A}\mathbf{p}_n] = [\lambda_1 \mathbf{p}_1, \lambda_2 \mathbf{p}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{p}_n],$$

或

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

定义由特征向量构成的矩阵

$$\mathbf{P} := [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

那么矩阵 $\mathbf{A}$ 相似于一个对角阵, 即

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

2.3.3 特征多项式

定理 2.3.1 斜对角阵的特征多项式 (The Characteristic Polynomial of Skew-Symmetric Matrices)

$n \times n$ 斜对角阵 $\mathbf{A} = \text{adiag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) &:= \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] \\ &= \begin{cases} (s^2 - a_1 a_n)(s^2 - a_2 a_{n-1}) \cdots (s^2 - a_{(n-1)/2} a_{(n+3)/2})(s - a_{(n+1)/2}), & n \text{ 为奇数,} \\ (s^2 - a_1 a_n)(s^2 - a_2 a_{n-1}) \cdots (s^2 - a_{n/2} a_{n/2+1}), & n \text{ 为偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

定理 2.3.2 酉矩阵的特征多项式 (The Characteristic Polynomial of Companion Matrices)

4 个 $n \times n$ 酉矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

的特征多项式都为

$$p(s) := \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n.$$

辛矩阵

一个实矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 称为 **辛矩阵** (Symplectic Matrix), 是指它满足

$$\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T = \mathbf{J}, \quad (2.3.4)$$

其中

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

这是实数域中的辛矩阵的定义, 辛矩阵也可推广到复数域中. 这里矩阵 $\mathbf{J}$ 满足

$$\det[\mathbf{J}] = 1, \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}.$$

辛矩阵的行列式等于 1.

定理 2.3.3 辛矩阵的特征多项式 (The Characteristic Polynomial of Symplectic Matrices)

式 (2.3.4) 的辛矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式满足

$$p(s) := \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n p(1/s).$$

证明 根据辛矩阵的定义: $\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T = \mathbf{J}$, 因为 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{J}$ 都是辛矩阵, 其行列式都为 1, 所以有

$$\begin{aligned} p(s) &= \det\{[s\mathbf{J} - \mathbf{A}\mathbf{J}]\mathbf{J}^{-1}\} = \det[s\mathbf{J} - \mathbf{A}\mathbf{J}] = \det[s\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{J}] \\ &= \det\left[-s\mathbf{A}\mathbf{J}\left(-\mathbf{A}^T + \frac{1}{s}\mathbf{I}\right)\right] = \det\left[-s\mathbf{A}\mathbf{J}\left(-\mathbf{A}^T + \frac{1}{s}\mathbf{I}\right)\right] \\ &= \det[-s\mathbf{A}] \det[\mathbf{J}] \det\left(\frac{1}{s}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right) = s^n p\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

定理 2.3.4 正交矩阵的特征多项式 (The Characteristic Polynomial of Orthogonal Matrices)

正交矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征多项式满足

$$p(s) := \det[s\mathbf{I} - \mathbf{Q}] = (-s)^n p(1/s).$$

证明 正交阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$. 因为 $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, $\det[\mathbf{Q}] = \pm 1$, 所以有

$$\begin{aligned} p(s) &= \det[s\mathbf{I} - \mathbf{Q}] \\ &= \det\left[s\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^T - \frac{1}{s}\mathbf{I}\right)\right] = \det[-s\mathbf{Q}] \det\left[\frac{1}{s}\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T\right] \\ &= \det[-s\mathbf{Q}] \det\left[\frac{1}{s}\mathbf{I} - \mathbf{Q}\right] = (-s)^n p\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

2.3.4 谱映射定理

定义 2.3.1 矩阵的谱定义 (Matrix Spectra Definition)

矩阵特征值构成的集合称为矩阵的谱. 设方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 那么 $\mathbf{A}$ 的谱为 $\lambda[\mathbf{A}] = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\mathbf{A}$ 的特征值的绝对值或模最大者称为 $\mathbf{A}$ 的谱半径 (Spectral Radius), $\mathbf{A}$ 的谱半径记为 $\rho(\mathbf{A})$, 所以有

$$\rho(\mathbf{A}) = \max[|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|].$$

定理 2.3.5 谱映射定理 (Spectra Map Theorem)

设方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的谱为 $\lambda[\mathbf{A}] = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, 定义在某区域上的解析函数 $f(s)$, 那么矩阵 $f(\mathbf{A})$ 的谱为

$$\lambda[f(\mathbf{A})] = \{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)\}.$$

也就是说, 矩阵 $f(\mathbf{A})$ 的特征值等于函数 $f(s)$ 在 $\mathbf{A}$ 的特征值处的值.

从这个定理, 我们可以得到 **矩阵谱的性质**.

① $\mathbf{A}^2$ 的谱为 $\lambda[\mathbf{A}^2] = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2\}$.

② $\mathbf{A}^m$ 的谱为 $\lambda[\mathbf{A}^m] = \{\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m\}$.

③ 如果 $\mathbf{A}$ 可逆, 那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 的谱为 $\lambda[\mathbf{A}^{-1}] = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\}$.

④ 设 $f(s)$ 为系数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 的 m 次多项式, 即

$$f(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + a_2 s^{m-2} + \dots + a_{m-1} s + a_m.$$

定义多项式矩阵

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^m + a_1 \mathbf{A}^{m-1} + a_2 \mathbf{A}^{m-2} + \dots + a_{m-1} \mathbf{A} + a_m \mathbf{I}_m,$$

那么 $f(\mathbf{A})$ 的特征值为

$$f(\lambda_i) = \lambda_i^m + a_1 \lambda_i^{m-1} + a_2 \lambda_i^{m-2} + \dots + a_{m-1} \lambda_i + a_m, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.4 矩阵秩、迹和基本引理

2.4.1 矩阵秩

矩阵的列秩定义为矩阵的线性无关列的最大数目; 矩阵的行秩定义为矩阵的线性无关行的最大数目. 矩阵的列秩总是等于矩阵的行秩. 因此, 矩阵的秩定义为矩阵的列秩或行秩. 矩阵秩用英文词 rank 表示, $\text{rank}[\mathbf{A}]$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的 **秩** (rank).

矩阵秩的性质

① 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times r}$, 则有

$$\text{rank}[\mathbf{AB}] \leq \min\{\text{rank}[\mathbf{A}], \text{rank}[\mathbf{B}]\}.$$

② 设 A_i 的维数满足可相乘条件, 有

$$\text{rank}[A_1 A_2 \cdots A_k] \leq \min\{\text{rank}[A_1], \text{rank}[A_2], \cdots, \text{rank}[A_k]\}.$$

③ 如果 P 和 Q 都是可逆方阵, 那么

$$\text{rank}[A] = \text{rank}[PA] = \text{rank}[AQ] = \text{rank}[PAQ].$$

性质①的证明 设矩阵 A 的第 j 列为 $A_{.j}$, 矩阵 B 的第 i 行为 $B_{i.}$, 那么 AB 的第 i 行 $(AB)_{i.}$ 可表示为

$$(AB)_{i.} = a_{i1}B_{1.} + a_{i2}B_{2.} + \cdots + a_{in}B_{n.}, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

这说明, 矩阵乘积 AB 的行向量可由矩阵 B 的行向量线性表示, 所以 AB 的秩不大于 B 的秩. 类似地, AB 的第 j 列 $(AB)_{.j}$ 可以用 A 的列线性表示:

$$(AB)_{.j} = b_{1j}A_{.1} + b_{2j}A_{.2} + \cdots + b_{nj}A_{.n}, \quad j = 1, 2, \cdots, r.$$

这说明 AB 的秩也不大于 A 的秩. 定理得证.

若 P 可逆, 则 $\text{rank}[PA] = \text{rank}[A]$, $\text{rank}[PAP^{-1}] = \text{rank}[A]$, 因为

$$\text{rank}[A] = \text{rank}[P^{-1}PA] \leq \text{rank}[PA],$$

且

$$\text{rank}[PA] \leq \text{rank}[A].$$

2.4.2 矩阵迹

方阵 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的迹 (Trace) 定义为其对角元之和, 用符号 $\text{tr}[A]$ 表示. 如果

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么 A 的迹为

$$\text{tr}[A] := \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

矩阵迹的性质

① 矩阵转置和共轭转置的迹. 对于方阵 A , 有 $\text{tr}[A^T] = \text{tr}[A]$, $\text{tr}[A^*] = \overline{\text{tr}[A]}$.

② 矩阵和的迹等于矩阵迹的和, 即 $\text{tr}[A+B] = \text{tr}[A] + \text{tr}[B]$.

③ 矩阵乘积的迹具有循环性 (Cyclic Property), 即

$$\text{tr}[AB] = \text{tr}[BA], \quad \text{tr}[ABC] = \text{tr}[BCA] = \text{tr}[CAB].$$

因此, 不存在方阵 A 和 B 使得 $AB - BA = I$.

④ 相似变换矩阵的迹不变, 即对于可逆矩阵 T , 有 $\text{tr}[A] = \text{tr}[TAT^{-1}]$.

⑤ 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的迹等于矩阵特征值 $\lambda_i[A]$ 之和 (包括重特征值), 即

$$\text{tr}[A] = \lambda_1[A] + \lambda_2[A] + \cdots + \lambda_n[A].$$

⑥ 对于复矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 有

$$\text{tr}[A^*A] = \text{tr}[AA^*] = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

对于实矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 有

$$\text{tr}[A^T A] = \text{tr}[AA^T] = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2.$$

⑦ 设矩阵 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ 的特征多项式 (Characteristic Polynomial) 为

$$p(s) = \det[sI - A] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n,$$

则有 $\text{tr}[A] = -a_1$, $\det[A] = (-1)^n a_n$.

⑧ 设方阵 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$, 那么矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件是 $\text{rank}[A] = \text{rank}[A, B]$.

⑨ 如果方阵 A 与 B 是乘法可交换的, k, r 为正整数, 那么 A^k 与 B^r 是乘法可交换的; 如果 A 和 B 都是可逆矩阵, 且乘法可交换, k, r 为整数, 那么 A^k 与 B^r 是可交换的.

⑩ 设 $\text{rank}[A - I] = p$, $\text{rank}[B - I] = q$, 则 $\text{rank}[AB - I] \leq p + q$.

性质③的证明 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 根据迹的定义有

$$\text{tr}[AB] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = \text{tr}[BA].$$

性质⑩的证明 因为 $AB - I = A(B - I) + (A - I)$, 所以

$$\begin{aligned} \text{rank}[AB - I] &\leq \text{rank}[A(B - I)] + \text{rank}[A - I] \\ &\leq \text{rank}[B - I] + \text{rank}[A - I] = p + q. \end{aligned}$$

例 2.4.1 设方阵 A, B, X 满足 $AX = XA$, $X = AB - BA$, 则有 $\text{tr}[X^k] = 0$.

证明 由给定的条件, 有

$$\begin{aligned} X^k &= (AB - BA)X^{k-1} = ABX^{k-1} - BAX^{k-1} \\ &= ABX^{k-1} - BAXX^{k-2} = ABX^{k-1} - BXA X^{k-2} \\ &= ABX^{k-1} - BX^2 A X^{k-3} = ABX^{k-1} - BX^{k-1} A. \end{aligned}$$

两边取迹, 根据性质③直接给出结论.

2.4.3 矩阵求逆引理

矩阵求逆引理和块矩阵求逆引理在控制论和系统辨识领域, 特别是在递推计算中, 有重要的用途.

引理 2.4.1 矩阵求逆引理 (Matrix Inversion Lemma)

设 $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{F}^{r \times n}$, 假设矩阵 A 、 A 和 $(I + CA^{-1}B)$ 可逆, 则下列等式成立,

$$(1) (A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

$$(2) (A + B\Lambda C)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(\Lambda^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

当 $B = C = I$ 时, 得到特殊等式:

$$\textcircled{1} (A + I)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(I + A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

$$\textcircled{2} (A + A)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}(A^{-1} + A^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

当 $B = b \in \mathbb{F}^n$, $C = c \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ 时, 则有

$$(A + bc)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}b(I + cA^{-1}b)^{-1}cA^{-1},$$

或

$$(A + bc)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}bcA^{-1}}{1 + cA^{-1}b}.$$

引理 2.4.2 块矩阵求逆引理 (Block Matrix Inversion Lemma)

设可逆方阵 A 分块如下.

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 和 A_2 都是方阵. 令 $Q_1 := A_2 - A_{21}A_1^{-1}A_{12}$, $Q_2 := A_1 - A_{12}A_2^{-1}A_{21}$. 则下列两个等式成立.

$$(1) \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}A_{12}Q_1^{-1}A_{21}A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_{12}Q_1^{-1} \\ -Q_1^{-1}A_{21}A_1^{-1} & Q_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_2^{-1} & -Q_2^{-1}A_{12}A_2^{-1} \\ -A_2^{-1}A_{21}Q_2^{-1} & A_2^{-1} + A_2^{-1}A_{21}Q_2^{-1}A_{12}A_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

块矩阵求逆引理将大矩阵 A 的求逆转化为对小矩阵 A_1 和 Q_1 , 或 A_2 和 Q_2 的求逆, 可以简化大量计算量. 特别地, 当 $B_{12} = b \in \mathbb{F}^n$ 是一个列向量, $A_{21} = c \in \mathbb{F}^{1 \times n}$ 为一个行向量, $A_2 = \sigma \in \mathbb{F}$ 为标量, 这个公式可以进一步简化为

$$\begin{pmatrix} A_1 & b \\ c & \sigma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}b(\sigma - cA_1^{-1}b)^{-1}cA_1^{-1} & -A_1^{-1}b(\sigma - cA_1^{-1}b)^{-1} \\ -(\sigma - cA_1^{-1}b)^{-1}cA_1^{-1} & (\sigma - cA_1^{-1}b)^{-1} \end{pmatrix}.$$

块矩阵求逆引理也可表示如下.

引理 2.4.3 块矩阵求逆引理 (Block Matrix Inversion Lemma)

设 A 、 B 、 C 、 D 是适当维数的矩阵, 在假定有关矩阵可逆, 证明

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

2.4.4 奇异值分解

奇异值分解 (Singular Value Decomposition) 简称 SVD 分解: 任何实 $m \times n$ 矩阵 A 能够分解成

$$A = USV^T,$$

其中 U 是一个 $m \times m$ 正交矩阵, V 是一个 $n \times n$ 正交矩阵, S 是唯一的 $m \times n$ 对角阵, 其 对角元为非负实数 σ_i , $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$, 且以**降序排列** (Descending Order):

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m, n)} \geq 0.$$

σ_i 是矩阵 A 的 **奇异值** (Singular Values).

U 和 V 的前 $\min(m, n)$ 列分别是 A 的左奇异向量和右奇异向量, S 有下列形式,

$$S = \begin{cases} (\Sigma, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, & m < n, \\ \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}, & m = n, \\ \begin{pmatrix} \Sigma \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, & m > n, \end{cases}$$

其中 Σ 是一个由奇异值 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min(m, n)}$ 构成的对角阵:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{\min(m, n)} \end{pmatrix}.$$

设 $m \geq n$, 如果 $r := \text{rank}[A] < n$, 那么

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0,$$

且 $\sigma_r \neq 0$, $\sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$, 可以得到一个简化 SVD, S 为一个 $r \times r$ 矩阵, U 和 V 也可进一步简化. SVD 能够确定矩阵的秩.

矩阵方程 $Ax = b$ 的 **最小二乘解** (Least Squares Solution) 为

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

使用 SVD 分解 $A = USV^T$, 则有

$$\begin{aligned} x &= (VS^T U^T U S V^T)^{-1} V S^T U^T b \\ &= (VS^T S V^T)^{-1} V S^T U^T b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V^{-T}(S^T S)^{-1} V^T V S^T U^T b \\
&= V(S^T S)^{-1} S^T U^T b \\
&= V \Sigma^{-2} [\Sigma, \mathbf{0}] U^T b \\
&= V[\Sigma^{-1}, \mathbf{0}] U^T b.
\end{aligned}$$

2.4.5 正定矩阵的平方根分解

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是一个正定 Hermitean 矩阵. 那么有分解

$$A = P^* \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] P,$$

其中 P 是一个酉矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值.

定义正定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的平方根 (Square Root) 矩阵:

$$A^{1/2} = P^T \text{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}] P.$$

平方根矩阵的性质

- ① $A^{1/2} A^{1/2} = A$.
- ② $A^{1/2}$ 是 Hermitean 矩阵, 也是正定矩阵.
- ③ $A^{1/2}$ 与 A 是可交换的, $A^{1/2} A = A A^{1/2}$.
- ④ $(A^{1/2})^T = (A^T)^{1/2}$.
- ⑤ $(A^{1/2})^{-1} = (A^{-1})^{1/2} = A^{-1/2}$.
- ⑥ $A^{1/2}$ 与 A 有相同的特征向量.
- ⑦ A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 那么 $A^{1/2}$ 的特征值是 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$.

2.5 矩阵变换

2.5.1 相似变换

相似矩阵 (Similarity Matrix): 方阵 A 相似于方阵 B , 是指存在一个非奇异矩阵 T 满足

$$T^{-1} A T = B.$$

并称 A 到 B 的变换为 **相似变换 (Similarity Transformation)**, 矩阵 T 称为相似变换矩阵.

显然, A 相似于 B (记作 $A \sim B$), 那么 B 也相似于 A , 因为 $A = [T^{-1}]^{-1} B T^{-1}$, 所以说 $T^{-1} A T$ 或 $T A T^{-1}$ 是相似变换. 一个矩阵总是与自己相似.

相似变换的一个重要用途是可以把矩阵 A 变换为对角阵或约当阵.

相似矩阵的性质

- ① 一个矩阵总是与自己相似, 即 $A \sim A$.
- ② 如果 A 相似于 B , B 又相似于 C , 那么 A 也相似于 C , 因为

$$C = S^{-1} B S = S^{-1} (T^{-1} A T) S = (TS)^{-1} A (TS).$$

- ③ 矩阵 A 与它的转置 A^T 总是相似的.

- ④ 相似矩阵有相同的秩, 若 $A \sim B$, 则 $\text{rank}[A] = \text{rank}[B]$.
 ⑤ 若 $A \sim B$, 且 A 可逆, 则 B 也可逆, 且 $B^{-1} \sim A^{-1}$.
 ⑥ 若 A 与对角矩阵 Λ 相似, 则称 A 为可对角化矩阵.
 ⑦ 若 $A \sim B$, c 为常数, 则 $cA \sim cB$.
 ⑧ 若 $A \sim B$, k 为整数, 则 $A^k \sim B^k$.
 ⑨ 若 $A \sim B$, $f(\cdot)$ 为多项式, 则 $f(A) \sim f(B)$.
 ⑩ 若 $A \sim B$, 则 $\exp(A) \sim \exp(B)$.
 ⑪ 相似矩阵有相同的行列式、特征值、特征多项式, 因为

$$|A| = |T^{-1}BT| = |T^{-1}||B||T| = |T|^{-1}|B||T| = |B|;$$

这里使用了公式 $\det[AB] = \det[A]\det[B]$. 相似矩阵的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) &:= \det[sI - A] = \det[sI - T^{-1}BT] = \det\{T^{-1}[sI - B]T\} \\ &= \det[T^{-1}]\det[sI - B]\det[T] = \det[sI - B]. \end{aligned}$$

这说明相似矩阵有相同的特征多项式、相同的特征值.

2.5.2 矩阵对角化

我们说一个矩阵可对角化, 是指这个矩阵可以通过相似变换化为对角阵. 也就是说, 如果矩阵 A 可对角化 (Diagonalizable), 那么必存在一个非奇异矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 是一个对角阵.

矩阵对角化是有条件的, 不是所有的矩阵都可对角化. 例如, 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是不可对角化的. 只有存在与矩阵维数相同数目的线性无关特征向量的矩阵才可对角化. 这个结论需要计算矩阵的特征向量. 下面是一些关于矩阵对角化的结论.

- ① 所有特征值都互异的矩阵都可对角化.
 ② 所有对称矩阵都可对角化.
 ③ 正规矩阵可以对角化.
 ④ 复数 Hermite 矩阵可对角化.

关于矩阵对角可参见 3.6.1 节的对角标准形实现. 矩阵对角化的例子如下.

例 2.5.1 研究 3 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

是否可对角化? 如果可以, 就将这个矩阵对角化.

解 计算特征值. 令 $|sI_3 - A| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} s-1 & -2 & 0 \\ 0 & s-3 & 0 \\ -2 & 4 & s-2 \end{vmatrix} = 0.$$

按最后一列展开得到

$$(-1)^{3+3}(s-2) \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{vmatrix} = 0,$$

或

$$(s-3)(s-2)(s-1) = 0.$$

这个矩阵有 3 个不同的特征值 $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = 1$, 故可对角化.

根据 $A\mathbf{p}_i = s_i\mathbf{p}_i, i = 1, 2, 3$, 计算特征向量 $\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ p_{3i} \end{pmatrix}$.

(1) 对于 $s_1 = 3$, 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}.$$

展开得到

$$p_{11} + 2p_{21} = 3p_{11},$$

$$3p_{21} = 3p_{21},$$

$$2p_{11} - 4p_{21} + 2p_{31} = 3p_{31}.$$

这 3 个方程只有两个是独立的, 有无穷多解, 可取 $p_{11} = 1$, 求得 $p_{21} = 1, p_{31} = -2$, 所以

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 对于 $s_2 = 2$, 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}.$$

展开得到

$$p_{12} + 2p_{22} = 2p_{12},$$

$$3p_{22} = 2p_{22},$$

$$2p_{12} - 4p_{22} + 2p_{32} = 2p_{32}.$$

同样, 这 3 个方程只有两个是独立的, 求得 $p_{22} = 0$, $p_{12} = 0$, 取 $p_{32} = 1$, 所以

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 对于 $s_3 = 1$, 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}.$$

展开得到

$$p_{13} + 2p_{23} = p_{13},$$

$$3p_{23} = p_{23},$$

$$2p_{13} - 4p_{23} + 2p_{33} = p_{33}.$$

同样这 3 个方程只有两个是独立的, 求得 $p_{23} = 0$, 取 $p_{13} = 1$ (不能取 $p_{13} = 0$, 因为要让 $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 线性无关), 取 $p_{33} = -2$, 所以

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

由特征向量构成的特征矩阵为

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

如果重新排列特征向量矩阵

$$\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: \Lambda. \end{aligned}$$

这个例子说明, 对角矩阵的特征值出现的顺序与特征值对应的特征向量在特征矩阵中排列的顺序一致.

例 2.5.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

计算 A^{100} .

解 由例 2.5.1 可知

$$\begin{aligned} A &= Q\Lambda Q^{-1}, \\ A^2 &= (Q\Lambda Q^{-1})(Q\Lambda Q^{-1}) = Q\Lambda Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda^2 Q^{-1}, \\ A^3 &= A^2 A = (Q\Lambda^2 Q^{-1})(Q\Lambda Q^{-1}) = Q\Lambda^2 Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda^3 Q^{-1}, \\ &\vdots \\ A^{100} &= Q\Lambda^{100} Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^{100} \\ 0 & 0 & 3^{100} \\ -2 & 2^{100} & -2 \times 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 + 3^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} & 0 \\ -2 + 2^{101} & 2 - 2 \times 3^{100} & 2^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.5.3 矩阵约当化

矩阵约当化参见 3.6.2 节, 以及例 3.6.4.

2.6 思考题

1. 判断矩阵的秩有哪些方法?
2. 求矩阵的逆有哪些方法?
3. 矩阵的迹与矩阵元、矩阵特征值有什么关系?
4. 矩阵的行列式和矩阵的特征值有什么关系?
5. 求矩阵的幂 A^k 有哪些方法?
6. 证明对称矩阵 A 的所有特征值为实数, 必存在正交矩阵将其对角化.
7. 如果矩阵 A 与矩阵 B 有相同的特征值, 且所有特征值都互异, 那么 $A \sim B$.
8. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值为 $1, 2, \dots, n$, 计算行列式 $\det\left(A - \frac{1}{2}I\right)$, 矩阵 $A^2 + A + I$ 是否可对角化.
9. 设 p_1 和 p_2 是对称矩阵 A 的两个不同特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量, 那么 p_1 和 p_2 正交, 即 $p_1^T p_2 = 0$.
10. 设 λ 和 $p(s)$ 是矩阵 A 的特征值和特征多项式, $f(\cdot)$ 是一个多项式, 求 $f(A)$ 的特征值和特征多项式.
11. 设 $\lambda[A]$ 是方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值, $\lambda_{\min}[X]$ 和 $\lambda_{\max}[X]$ 是对称方阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最小和最大特征值, 那么下列不等式成立,
 - (1) $\lambda_{\min}[A^T A] \leq |\lambda[A]|^2 \leq \lambda_{\max}[A^T A]$.
 - (2) $\lambda_{\min}[AA^T] \leq |\lambda[A]|^2 \leq \lambda_{\max}[AA^T]$.
 - (3) $\lambda_{\min}[(A + A^T)/2] \leq \operatorname{Re}\{\lambda[A]\} \leq \lambda_{\max}[(A + A^T)/2]$.
12. 设 $\lambda_{\min}[A]$ 和 $\lambda_{\max}[A]$ 是对称方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最小和最大特征值, $x \in \mathbb{R}^n$ 是任意实向量, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是任意实矩阵, $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是两个非负定矩阵, 满足 $S_1 \leq S_2$. 那么下列关系成立,
 - (1) $x^T S_1 x \leq x^T S_2 x$.
 - (2) $X^T S_1 X \leq X^T S_2 X$.
 - (3) $\lambda_{\min}[A] \|x\|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}[A] \|x\|^2$.
13. **Hadamard 不等式** (Hadamard Inequality).

设 n 维向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 构成了 $n \times n$ 矩阵 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. 则有

$$|\det[X]| \leq \prod_{i=1}^n \|x_i\|.$$

当且仅当向量是正交的, 或至少一个向量为零.

14. **Hadamard 矩阵** (Hadamard Matrix).

Hadamard 矩阵是一个方阵, 每个元都是 $+1$ 或 -1 , 每行都是互相正交的. Hadamard 矩阵这一命名源于法国数学家雅克 所罗门 阿达马 (Jacques Solomon Hadamard, 1865—1963 年), 他的重要贡献是证明了数论中 **素数定理** (Prime Number Theorem), 而此而成名.

Hadamard 提出了 Hadamard 不等式、Hadamard 矩阵、Hadamard 变换等. Hadamard 矩阵在信号处理和编码中有广泛应用, Hadamard 矩阵常用于纠错码, 如

Reed-Muller 码.

一个 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{H}_n = [h_{ij}]$ 称为 n 阶 Hadamard 矩阵, 是指 $\mathbf{H}_n$ 的元要么是 $+1$, 要么是 -1 , 即 $h_{ij} = \pm 1$, 且 $\mathbf{H}_n \mathbf{H}_n^T = n\mathbf{I}_n$. 换句话说, Hadamard 矩阵是由 $+1$ 和 -1 构成的, 其两个不同行的内积是零, 同一行的内积为 n . Hadamard 矩阵的几个例子如下.

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hadamard 矩阵的性质

① Hadamard 矩阵的维数只能是 1、2 或 4 的倍数.

② Hadamard 矩阵的行进行交换, 仍然是 Hadamard 矩阵.

③ 用 -1 乘以 Hadamard 矩阵的任一行 (任一列), 结果还是 Hadamard 矩阵. 因此, 总是可能得到一个第 1 行和第 1 列都是 $+1$ 的 Hadamard 矩阵; 这种 Hadamard 矩阵称为规范化 Hadamard 矩阵. 因此, 阶数 n 相同的 Hadamard 矩阵不唯一.

④ 根据 Hadamard 不等式, n 阶 Hadamard 矩阵 $\mathbf{H}_n$ 的行列式满足不等式,

$$\det[\mathbf{H}_n] \leq n^{n/2}.$$

15. Hadamard 猜想 (Hadamard Conjecture).

对于所有正整数 $k \in \mathbb{N}$, 总存在 $n = 4k$ 阶的 Hadamard 矩阵.

猜想是科学理论中的开放性问题 (Open Problem), 即有待证明对错的问题. Hadamard 猜想是一个存在性的问题. 最近用计算机构造了 $n = 428$ 阶 ($k = 107$) 的最大已知 Hadamard 矩阵.

16. Sylvester 构造 Hadamard 矩阵的方法.

最初构造高阶 Hadamard 矩阵的例子是 James Joseph Sylvester (西尔维斯特) 给出的. 设 $\mathbf{H}_n$ 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵, 则

$$\mathbf{H}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{pmatrix}$$

给出一个 $2n$ 阶 Hadamard 矩阵. 连续用这个方法, 就可给出一系列 Hadamard 矩阵:

$$\mathbf{H}_1 = (1),$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

利用这种方法, Sylvester 成功地构造了任何 2^k 阶 Hadamard 矩阵, 其中 k 为非负整数.

Sylvester 给出的矩阵有些特殊的性质. 它们都是对称矩阵, 并且这些矩阵的迹都是 0. 第 1 行和第 1 列的元素都是 +1, 其他各行各列的元素都是一半 +1, 一半 -1. 这些矩阵和 Walsh 函数有密切的关系.

Sylvester 构造法给出了阶数为 1、2、4、8、16、32 等的 Hadamard 矩阵, 之后 Hadamard 本人给出了阶数为 12 和 20 的 Hadamard 矩阵. Raymond Paley 随后给出了任何 $m+1$ 阶 Hadamard 矩阵的方法, 其中 m 是任何模 4 为 3 的质数任意次幂; 还给出了构造形式为 $2(m+1)$ 阶 Hadamard 矩阵的方法, 其中 m 是任何模 4 为 1 的质数任意次幂; 他使用了有限域的办法得出了这些结论. Hadamard 猜想很可能就是 Paley 提出的, 现在有了更多的构造 Hadamard 矩阵的办法. Hadi Kharaghani 和 Behruz Tayfeh-Rezaie 在 2004 年 6 月 21 日宣布他们构造出了 428 阶的 Hadamard 矩阵. 现在最小的尚未被构造出来的 $4k$ 阶 Hadamard 矩阵是 668 阶.

17. 哥德巴赫猜想 (Goldbach Conjecture).

“每一个大于 2 的偶数可以表示为两个 **质数** (素数) 之和” 就是哥德巴赫猜想, 简称 “1+1”. 这个猜想是 1742 年哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690—1764 年) 给欧拉 (Euler) 的信中提出的, 至今已经 200 多年了, 还未解决.

我们把一个大偶数可以表示为 a 个 **素数** (Prime or Prime Number) 乘积与 (至多) b 个素数乘积之和, 简称 “a+b”. 1966 年, 我国数学家陈景润 (1933—1996 年) 证明了每一个充分大的偶数能够表示为一个素数与至多两个素数乘积之和, 即证明了 “1+2”. 俄国数学家 Ivan Matveevich Vinogradov (1891—1983 年) 证明了每一个充分大的奇数可以表示为 3 个素数之和, 即 “1+1+1”.

18. Goormaghtigh 猜想 (Goormaghtigh Conjecture)

对于整数 x, y, m 和 n , 且 $x > 1, y > 1, n > m > 2$, 方程

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}$$

只有两组整数解 $(x, y, m, n) = (5, 2, 3, 5)$ 和 $(x, y, m, n) = (90, 2, 3, 13)$.

19. 计算 $2n \times 2n$ 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_n \\ -I_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

的特征多项式.

20. 计算笔者提出的特殊范德蒙矩阵 D 和 F 的行列式:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 \\ 1 & x_4 & x_4^3 & x_4^5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^4 \end{pmatrix}.$$

21. 计算笔者提出的特殊 $n \times n$ 范德蒙矩阵 D 和 F 的行列式:

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 & x_1^5 & \cdots & x_1^{2n-3} \\ 1 & x_2 & x_2^3 & x_2^5 & \cdots & x_2^{2n-3} \\ 1 & x_3 & x_3^3 & x_3^5 & \cdots & x_3^{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^3 & x_n^5 & \cdots & x_n^{2n-3} \end{pmatrix},$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^4 & \cdots & x_1^{2^{n-2}} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^4 & \cdots & x_2^{2^{n-2}} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^4 & \cdots & x_3^{2^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^4 & \cdots & x_n^{2^{n-2}} \end{pmatrix}.$$

这些行列式的乘积因子中肯定包含项 $(x_i - x_j)$, $i \neq j$.

22. 计算下列函数的拉普拉斯变换.

- (1) $f(t) = t \cos \omega t$,
- (2) $f(t) = t \sin \omega t$,
- (3) $f(t) = t^2 \cos \omega t$,
- (4) $f(t) = t^2 \sin \omega t$,
- (5) $f(t) = te^{-\sigma t} \cos \omega t$,
- (6) $f(t) = te^{-\sigma t} \sin \omega t$,
- (7) $f(t) = t^2 e^{-\sigma t} \cos \omega t$,
- (8) $f(t) = t^2 e^{-\sigma t} \sin \omega t$,
- (9) $f(t) = t^n e^{-\sigma t} \cos \omega t$,
- (10) $f(t) = t^n e^{-\sigma t} \sin \omega t$.

23. 计算伴随矩阵的逆、行列式, 计算伴随矩阵的伴随矩阵, 计算伴随矩阵的伴随矩阵的伴随矩阵, $\dots$. 设方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是可逆矩阵, 它的伴随矩阵 $\text{adj}[\mathbf{A}]$ 定义为

$$\mathbf{A}_1 := \text{adj}[\mathbf{A}] = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1},$$

计算

$$\mathbf{A}_1^{-1}, |\mathbf{A}_1|, \mathbf{A}_2 := \text{adj}[\mathbf{A}_1], \mathbf{A}_3 := \text{adj}[\mathbf{A}_2], \dots, \mathbf{A}_k := \text{adj}[\mathbf{A}_{k-1}].$$

线性系统的状态空间描述

经典控制理论是建立在线性时不变动态系统的输入—输出关系或传递函数的基础之上的, 而现代控制理论以多个一阶状态微分方程组来描述系统, 它们构成一个状态向量方程或向量—矩阵微分方程. 应用矩阵理论, 可极大地简化系统的数学表达式. 状态变量、输入或输出数目的增多并不增加方程的复杂性, 而且许多标量系统的处理方法可以直接拓展到多输入多输出系统.

本章将首先给出状态空间方法的描述部分, 以单输入单输出系统为例, 给出多输入多输出系统 (即多变量系统) 在内的状态空间表达式的一般形式、线性系统状态空间表达式, 状态空间模型线性变换的性质, 以及能控规范型、能观测规范型、对角标准型、约当 (Jordan) 标准型、三对角标准型, 以及传递函数的规范型实现、标准型实现, 传递函数的最小实现, 多变量系统的传递函数矩阵, 利用 MATLAB 进行各种模型之间的相互转换, 多变量系统传递矩阵的计算等.

本章有关状态空间系统规范型和友矩阵 (Companion Matrix) 及其特殊矩阵间的变换, 可参见 2010 年发表在 *Computers & Mathematics with Applications* 上的论文 “Transformations between some special matrices (一些特殊矩阵之间的相似变换)” [24].

3.1 状态空间表达的例子

在经典控制理论中, 通常是以系统的传递函数为主体研究系统的动态性能, 如根轨迹 (Root Locus)、波德图 (Bode Diagram) 等. 传递函数是将一个高阶微分方程表示的线性时不变系统在零初始条件下, 通过拉普拉斯变换 (Laplace Transform) 获得的, 它是线性定常微分方程的等价表达. 同样, 传递函数描述的系统可以转化为一个线性定常微分方程系统. 本节用时不变和时变系统、电路系统、弹簧阻尼系统、机电系统的例子来说明动态系统的状态空间模型结构形式.

3.1.1 标量系统的状态空间表达

传递函数描述只适用于线性定常系统 (即线性时不变系统), 不适用于微分方程描述的线性时变系统、非线性时不变系统、非线性时变系统等. 下面用例子来加以说明.

1. 典型二阶系统的状态空间表达

对于二阶典型系统, 即二阶线性时不变微分方程描述的系统,

$$y''(t) + 2\xi\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t), \quad (3.1.1)$$

其中 $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入和输出, t 为时间变量, $y'(t) = \dot{y}(t)$ 表示一阶导数, $y''(t)$

表示二阶导数, ξ 是阻尼比 (Damping Ratio), ω_n 是自然振荡频率 (Natural Oscillation Frequency).

在零初始条件下, 对式 (3.1.1) 进行 拉普拉斯变换 (Laplace Transform) 得到

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)Y(s) = \omega_n^2 U(s),$$

其中 s 为 拉普拉斯算子, $Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别为 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换:

$$Y(s) := \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt, \quad U(s) := \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt.$$

由此可得系统的 传递函数 (Transfer Function):

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (3.1.2)$$

式 (3.1.1) 和式 (3.1.2) 是一个二阶系统, 引入 2 个状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 令

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t).$$

联立式 (3.1.1), 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= y'(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= y''(t) = -2\xi\omega_n y'(t) - \omega_n^2 y(t) + \omega_n^2 u(t) \\ &= -2\xi\omega_n x_2(t) - \omega_n^2 x_1(t) + \omega_n^2 u(t) \\ &= -\omega_n^2 x_1(t) - 2\xi\omega_n x_2(t) + \omega_n^2 u(t), \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

它们可以等价写为 (能观测性规范型)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{pmatrix} u(t), \quad (3.1.3)$$

$$y(t) = [1, 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.1.4)$$

定义状态向量 $\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, 有关参数矩阵和参数向量如下,

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c} := [1, 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}.$$

则式 (3.1.3)、式 (3.1.4) 可写为下列状态空间模型形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (3.1.5)$$

注 3.1.1 从这个例子可以看出: 一个线性定常微分方程描述的线性时不变系统 (3.1.1) 可以转换为一个传递函数模型 (3.1.2), 也可以转换为一个状态空间模型 (3.1.5), 且状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的维数等于系统的阶次 (即微分方程输出的最高微分数), (对线性时不变系统而言) 对应于系统传递函数分母多项式的最高次数.

2. 二阶线性时变系统的状态空间表达

下面研究一个二阶线性时变微分方程描述的系统,

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t) = b_2(t)u(t), \quad (3.1.6)$$

其中 $a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_2(t)$ 是系统的时变参数. 当微分方程的系数是随时间变化的, 就说这个系统是时变系统.

即使在零初始条件下, 式 (3.1.6) 的 **拉普拉斯变换** 也是不存在的, 因此传递函数描述对时变系统和非线性系统是无效的. 在这方面, 状态空间描述显示出优越性.

式 (3.1.6) 是一个二阶系统, 引入 2 个状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 令

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t).$$

联立式 (3.1.6), 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= y'(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= y''(t) = -a_1(t)y'(t) - a_2(t)y(t) + b_2(t)u(t) \\ &= -a_1(t)x_2(t) - a_2(t)x_1(t) + b_2(t)u(t) \\ &= -a_2(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) + b_2(t)u(t), \\ y(t) &= x_1(t). \end{aligned}$$

它们可以等价写为 (能观测性规范型:)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2(t) \end{pmatrix} u(t), \quad (3.1.7)$$

$$y(t) = [1, 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.1.8)$$

定义状态向量 $\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, 有关时变参数矩阵和时变参数向量如下,

$$\mathbf{A}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{b}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ b_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) := [1, 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}.$$

则式 (3.1.7)、式 (3.1.8) 可写为下列时变状态空间模型形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}(t)\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (3.1.9)$$

上式是一个线性时变状态空间模型描述的系统. 当状态空间模型的参数矩阵和参数向量 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{b}(t)$ 、 $\mathbf{c}(t)$ 中至少有一个是随时间变化的, 就说这个系统是线性时变系统.

注 3.1.2 从上面两个例子可以看出: 状态空间模型不仅可以描述线性时不变系统 (Linear Time-Invariant System), 而且可以描述线性时变系统, 还可以描述非线性时不变系统 (Nonlinear Time-Invariant System) 和非线性时变系统 (Nonlinear Time-Varying System), 而传递函数只可以描述线性时不变系统.

3. 状态空间表达的不唯一性

下面以系统 (3.1.1) 为例说明一个系统的状态空间模型是不唯一的. 引入两个状态变量 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 令

$$x_1(t) = y'(t), \quad x_2(t) = y(t).$$

联立式 (3.1.1), 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= y''(t) = -2\xi\omega_n y'(t) - \omega_n^2 y(t) + \omega_n^2 u(t) \\ &= -2\xi\omega_n x_1(t) - \omega_n^2 x_2(t) + \omega_n^2 u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= y'(t) = x_1(t), \\ y(t) &= x_2(t). \end{aligned}$$

它们可以等价写为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_n^2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad (3.1.10)$$

$$y(t) = [0, 1] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.1.11)$$

这说明一个系统的状态空间模型是不唯一的. 这容易理解, 因为引入了不唯一的中间变量 (向量) $\mathbf{x}(t)$, 输入输出关系是不变的, 就像高中课本中的参数方程一样: 关系式 $x^2 + y^2 = r^2$ 表示一个圆, 变量 x 与 y 的关系是唯一确定的, 但是引入一个参数 t , 方程 $x = r \cos t$ 和 $y = r \sin t$ 仍表示一个圆, 但是参数 t 是不唯一的.

注 3.1.3 就像人们习惯用 $u(t)$ 和 $y(t)$ 表示系统的输入和输出一样, 已经习惯用 $\mathbf{x}(t)$ 表示状态向量, 其实也可以用其他字母表示状态变量和状态向量. 在不致混淆的情况下, 有时省略时间 t , 将系统中的输入变量 $u(t)$ 、输出变量 $y(t)$ 、状态变量 (向量) $\mathbf{x}(t)$ 简化为 u 、 y 、 $\mathbf{x}$ 等. 但是系统中的时变参数变量中的 t 是不能省略的, 否则变成了时不变参数, 时变参数向量和时变参数矩阵也是如此.

4. 一个高阶非线性时变系统的状态空间表达

对于 n 阶非线性时变系统

$$y^{(n)} = F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, u, t),$$

引入 n 个状态变量 $x_i(t)$, 令

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad x_3(t) = y''(t), \quad \dots, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t).$$

进一步可得到下列一阶微分方程组构成的非线性时变状态空间模型:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= y'(t) = x_2(t), \\
 \dot{x}_2(t) &= y''(t) = x_3(t), \\
 \dot{x}_3(t) &= y'''(t) = x_4(t), \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= y^{(n-1)}(t) = x_n(t), \\
 \dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) = F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, u, t) \\
 &= F(x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t), u(t), t), \\
 y(t) &= x_1(t).
 \end{aligned}$$

函数 $F(*, *, \dots, *, t)$ 中的 t 表示系统参数是时变的, 如果去掉 t ,

$$y^{(n)} = F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, u)$$

表示一个 n 阶非线性时不变系统. 类似地, $y^{(n)} = F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$ 表示 n 阶非线性时不变系统, $y^{(n)} = F(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}, t)$ 表示 n 阶非线性时变系统.

3.1.2 电路系统的状态空间描述

对于图 3.1.1 所示的 RLC 电路系统, 输入为电源电压 u , 输出为电容 C 上电压 u_C , R_1 和 R_2 为电阻, L 为电感. 试列写这个系统的状态空间描述.

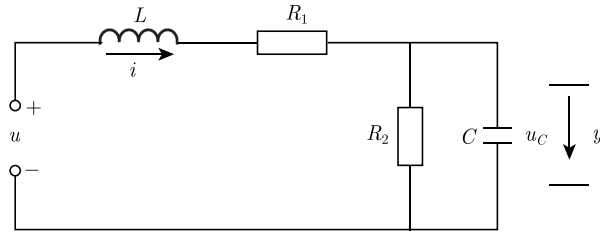


图 3.1.1 RLC 电路

该电路系统有两个独立储能元件 (电容 C 和电感 L), 因此状态变量数为 2. 通常取电容上电压信号 u_C 和电感的电流信号 i 作为状态变量. 根据基尔霍夫定律, 可以得到两个含有状态变量的一阶微分方程组:

$$i = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_2}, \quad (3.1.12)$$

$$u = L \frac{di}{dt} + R_1 i + u_C. \quad (3.1.13)$$

或

$$\begin{aligned}
 \frac{du_C}{dt} &= -\frac{u_C}{R_2 C} + \frac{1}{C} i, \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{L} u_C - \frac{R_1}{L} i + \frac{1}{L} u.
 \end{aligned}$$

方法一: 令状态变量 x_1 和 x_2 分别表示电容上电压 u_C 和电感的电流 i , 即 $x_1 := u_C$, $x_2 := i$, 则有

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{R_2 C}x_1 + \frac{1}{C}x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R_1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u.\end{aligned}$$

用状态向量形式表示为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u.$$

若用 y 表示电容上电压 u_C , 则系统的输出量可表示为

$$y = x_1.$$

把它们写成矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x},$$

其中

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1, 0].$$

方法二: 令状态变量 ξ_1 和 ξ_2 分别表示电容上电流和电感上电压, 即

$$\xi_1 := C \frac{du_C}{dt}, \quad \xi_2 = L \frac{di}{dt},$$

读者列出其状态空间表达式.

图 3.1.2 是另一个 RLC 电路系统, R_1 和 R_2 为电阻, C 为电容, u 为输入电压, 电感 L 上的电压 u_L 为输出变量. 试列写这个系统的状态空间描述.

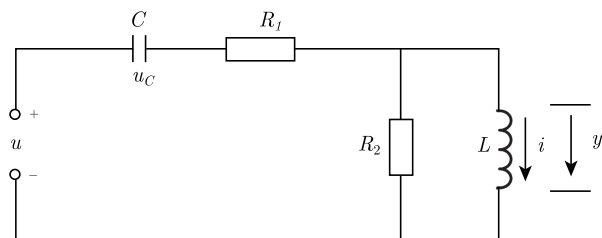


图 3.1.2 RLC 电路

设电容上电压 u_C 和流经电感的电流 i 为状态变量. 根据基尔霍夫定律, 可以得到两个含有状态变量的一阶微分方程:

$$u = u_C + R_1 C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt},$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} - \frac{L}{R_2} \frac{di}{dt}.$$

引入状态变量 $x_1 = u_C$ 和 $x_2 = i$, 则有

$$\begin{aligned} u &= x_1 + R_1 C \dot{x}_1 + L \dot{x}_2, \\ x_2 &= C \dot{x}_1 - \frac{L}{R_2} \dot{x}_2. \end{aligned}$$

求解得到

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} x_1 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} x_2 + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} u, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} x_1 - \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} x_2 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} u. \end{aligned}$$

用 y 代替电感 L 上电压 u_L , 则系统的输出量可表示为

$$\begin{aligned} y &= u_L = L \frac{di}{dt} = L \dot{x}_2 \\ &= -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)} x_1 - \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} x_2 + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} u. \end{aligned}$$

它们写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} \\ -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{pmatrix} u, \\ y &= \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)}, & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} u. \end{aligned}$$

3.1.3 弹簧阻尼系统的状态空间描述

对图 3.1.3 所示的机械运动系统, M 为质量块 (同时为质量), K 为弹簧, 也为弹簧系数, B 是阻尼器, 列出在外力输入作用下, 以质量块 M 的位移 y 为输出的状态空间表达式.

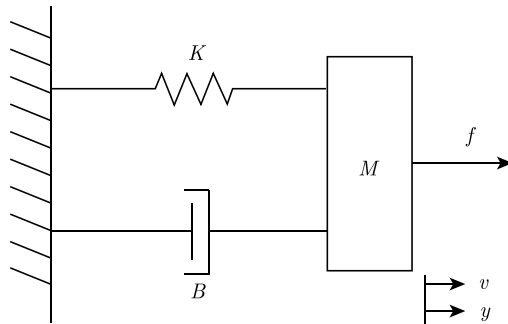


图 3.1.3 机械运动模型图

弹簧 K 和质量块 M 为储能元件, 故弹簧的伸长度 y 和质量块 M 的速度 v 可以选作状

态变量. 根据结构图可以直接看出, 它们是相互独立的. 根据牛顿定律, 可得方程

$$M \frac{dv}{dt} = f - Ky - B \frac{dy}{dt}.$$

用 x_1 和 x_2 表示 y 和 v , 且 u 表示 f , 有

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$M\dot{x}_2 = u - Kx_1 - B\dot{x}_1.$$

即

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}u - \frac{K}{M}x_1 - \frac{B}{M}x_2.$$

则系统的状态空间模型为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} u,$$

$$y = [1, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

3.1.4 机电系统的状态空间描述

图 3.1.4 是直流他励电动机系统的示意图, 其中 R 、 L 分别为电枢回路的电阻和电感, J 是机械旋转部分的转动惯量, B 为旋转部分的黏性摩擦系数, 励磁回路电压 u_f 和电流 i_f 恒定不变^[25]. 列出该图在电枢电压作为控制作用时的状态空间表达式.

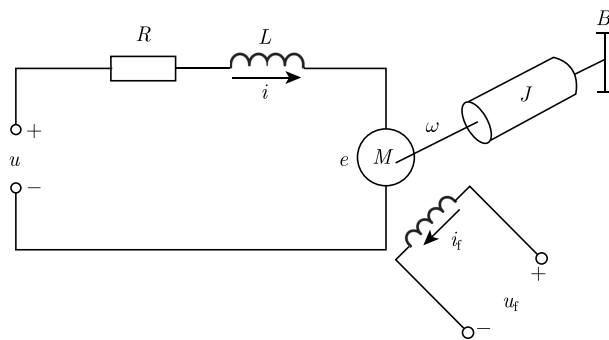


图 3.1.4 直流电动机示意图

由图 3.1.4 可知, 电感 L 和转动惯量 J 是储能元件, 相应的物理变量电流 i 和旋转速度 ω 是相互独立的, 所以可以选作状态变量. 电枢回路的电压方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u,$$

动力学方程为

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = K_a i,$$

电磁感应关系: 反电动势 e 与旋转速度 ω 关系如下,

$$e = K_b \omega.$$

式中, K_a 、 K_b 为转矩常数和反电动势常数.

令 $x_1 = i$, $x_2 = \omega$ 为系统状态变量, 则有

$$L\dot{x}_1 + Rx_1 + K_b x_2 = u,$$

$$J\dot{x}_2 + Bx_2 = K_a x_1,$$

整理可得系统的状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{B}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

指定 ω 为输出, 令 $y = \omega$, 则输出方程为

$$y = [0, 1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

值得一提的是, 若本题指定电动机的转角 θ 为输出, 则上述两个状态变量就不能全面描述系统的行为, 因此需要添加一个状态变量 $x_3 = \theta$:

$$\dot{x}_3 = \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

于是状态方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} & 0 \\ \frac{K_a}{J} & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

对应的输出方程为

$$y = [0, 1, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3.2 状态空间系统表达式

在经典控制理论中, 使用拉普拉斯变换, 把一个常系数线性微分方程描述的线性时不变系统的输入输出关系, 用传递函数表示. 传递函数描述是一种频域表达, 状态空间描述是一种时域表达. 一个变系数微分方程就无法用传递函数表示. 变系数微分方程描述的系统称为时变系统. 因此, 根轨迹方法、频率特性、波德图等方法都不适用于时变系统和非线性系统的研究.

在现代控制理论中, 为了时不变系统与时变系统、线性系统与非线性系统、单输入单输出系统与多输入多输出系统 (即多变量系统) 描述上的统一, 通过引入一些中间变量 (称为状

态变量), 把高阶微分方程化为一阶微分方程组描述. 这些一阶微分方程组就称为系统的 **状态空间表达式** (State Space Representation) 或 **状态空间模型** (State Space Model). 本节介绍连续时间系统和离散时间系统的状态空间表达.

3.2.1 控制系统的类别

1. 静态系统 (Static System) 和动态系统 (Dynamic System)

系统有静态和动态之分, 用代数方程表示的系统称为静态系统, 如线性弹簧所受的力 F 与弹簧伸长 (可正可负) x 和弹性系数 k 的关系为 $F = kx$; 用微分方程或差分方程表示的系统称为动态系统. 因为静态系统比较简单, 现代控制理论研究范畴主要是动态系统.

2. 连续时间系统 (Continuous-Time System) 和离散时间系统 (Discrete-Time System)

系统的运动规律是随时间演化的, 如果系统中的时间是一个连续变量, 就称连续时间系统, 简称 **连续系统** (Continuous System); 如果系统中的时间取离散值, 就称为离散时间系统, 简称 **离散系统** (Discrete System).

3. 线性系统 (Linear System) 和非线性系统 (Nonlinear System)

输入—输出关系满足叠加原理的系统称为线性系统 (在忽略系统中的随机干扰噪声时), 否则称为非线性系统. 实际系统都是非线性系统, 非线性系统的控制方法比较复杂, 而线性系统理论研究比较成熟, 因而经常用线性化的方法, 把有些非线性系统近似为线性系统来处理.

4. 时不变参数系统 (Time-Invariant Parameter System) 和时变参数系统 (Time-Varying Parameter System)

如果系统参数不随时间变化, 就是时不变参数系统, 简称 **时不变系统** (Time-Invariant System) 或定常系统; 否则就是时变参数系统, 简称 **时变系统** (Time-Varying System). 系统中只要有一个或一个以上参数随时间变化, 就是时变系统.

5. 单输入单输出系统 (Single-Input Single-Output system, SISO 系统) 和多输入多输出系统 (Multi-Input Multi-Output system, MIMO 系统)

只有一个输入和一个输出的系统称为单输入单输出系统, 简称 **标量系统** (Scalar System); 系统输入的数目和输出的数目多于一个的系统称为多输入多输出系统, 简称 **多变量系统** (Multivariable System). 多变量系统示意图如图 3.2.1 所示. 进一步还有单输入多输出系统和多输入单输出系统.

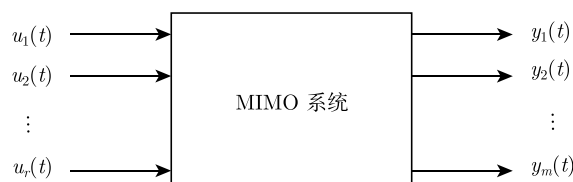


图 3.2.1 多变量系统示意图

以上几种类型进行组合,可以得到不同类型的系统,如① 线性、时不变、单输入单输出、连续时间动态系统,② 非线性、时变、多输入多输出、离散时间动态系统. 这样的名称太长,有时在不致混淆的情况下或模型表达式比较明确时,根据上下文,可以简化一下说前者是线性时不变连续时间系统或线性时不变系统,说后者是非线性时变系统.

本书主要研究线性时不变系统的控制理论,所以对线性时不变 SISO 系统 (3.2.1) 和线性时不变 MIMO 系统 (3.2.3) 研究得多.

3.2.2 连续时间系统状态空间表达

在 3.1 节,我们用二阶电路系统、弹簧阻尼系统、机电系统的例子说明了动态系统的状态空间模型结构形式. 下面给出线性时不变 SISO 连续时间系统、线性时变 SISO 连续时间系统、线性时不变 MIMO 连续时间系统、线性时变 MIMO 连续时间系统等状态空间模型.

1. 线性时不变单输入单输出连续时间系统 (Linear Time-Invariant SISO Continuous-Time System)

线性时不变 SISO 连续时间系统的 **状态空间模型** (State Space Model) 具有下列形式,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}^1 =: \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统的输入和输出, $\mathbf{x}(t) := [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 为 n 维 **状态向量** (State Vector), $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 表示 $\mathbf{x}(t)$ 对时间 t 的导数, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1} =: \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0$ 是时刻 t_0 状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的初值.

式 (3.2.1) 的第 1 式称为状态方程, 第 2 式称为输出方程. 有时直接称它们为状态方程或状态空间模型. $\mathbf{x}(t_0)$ 为状态向量在 $t = t_0$ 时的初值, 记作 $\mathbf{x}_0$, 即 $\mathbf{x}(t_0) =: \mathbf{x}_0$. 线性时不变 SISO 连续时间系统 (3.2.1) 的结构如图 3.2.2 所示.

系统 (3.2.1) 的输入输出满足 **叠加原理** (Superposition Principle), 故是线性系统; 参数 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 不随时间变化, 故是时不变系统; 只有一个输入 $u(t)$ ($u(t) \in \mathbb{R}$ 表示一个输入) 和一个输出 $y(t)$, 故是单输入单输出系统, 即 **标量系统** (Scalar System); 时间 t 是连续变量, 故是连续时间系统; 综合起来, 式 (3.2.1) 就是一个线性时不变标量连续时间系统.

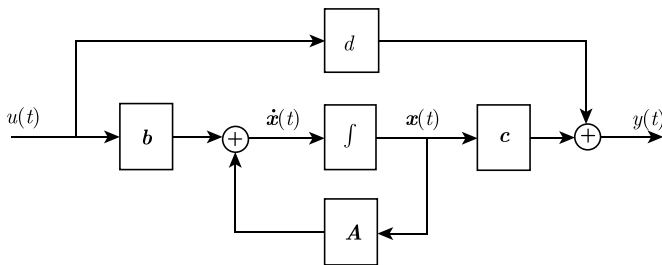


图 3.2.2 线性时不变 SISO 系统状态空间模型框图

2. 线性时变单输入单输出连续时间系统 (Linear Time-Varying SISO Continuous-Time System)

线性时变 SISO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{c}(t)\mathbf{x}(t) + d(t)u(t), \end{cases} \quad (3.2.2)$$

因为这个系统的参数 $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 和 $d(t) \in \mathbb{R}$ 是随时间变化的, 故式 (3.2.2) 是一个线性时变标量连续时间系统. 只要有一个及一个以上参数是时变的, 就称为时变系统或时变参数系统.

3. 线性时不变多输入多输出连续时间系统 (Linear Time-Invariant MIMO Continuous-Time System)

线性时不变 MIMO 连续时间系统的 **状态空间模型** (State Space Model) 具有下列形式,

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &:= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ 为 状态向量 (State Vector), } x_i(t) \text{ 为第 } i \text{ 个状态,} \\ \mathbf{u}(t) &:= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r \text{ 为 输入向量 (Input Vector), } u_i(t) \text{ 为第 } i \text{ 个输入,} \\ \mathbf{y}(t) &:= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ 为 输出向量 (Output Vector), } y_i(t) \text{ 为第 } i \text{ 个输出,} \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 均为常数矩阵, $\mathbf{x}_0$ 是时刻 t_0 状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的初值. 事实上, 根据矩阵加减法、矩阵乘法维数兼容性原则, 以及状态向量 $\mathbf{x}(t)$, 输入向量 $\mathbf{u}(t)$ 和输出向量 $\mathbf{y}(t)$ 的维数, 我们可以推断出 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 的维数. 因此, 在有关科学文献中, 为简便, 经常说 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 为适当维数的矩阵.

因为这个系统有 r 个输入 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, 即多输入, 有 m 个输出 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, 即多输出, 这就是多输入多输出系统名称的来历. 多输入多输出系统简称 **多变量系统** (Multivariable System).

矩阵 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ (或简记为 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$) 称为 **系统矩阵** (System Matrix). 状态空间

模型常记作 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$. 一旦 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 给定, 系统就唯一确定了. 有时将 $\mathbf{A}$ 称为 **系统矩阵**, $\mathbf{B}$ 称为 **输入系数矩阵**, $\mathbf{C}$ 称为 **输出系数矩阵**, $\mathbf{D}$ 称为 **输入输出系数矩阵**. 线性时不变 MIMO 连续时间系统 (3.2.3) 的结构框如图 3.2.3 所示.

注 3.2.1 线性连续时间系统稳定指系统矩阵 $\mathbf{A}$ 稳定, 即矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值具有负实部, 亦即特征方程 $|s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}| = 0$ 的根具有负实部. 线性连续时间系统的稳定性与矩阵 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 无关.

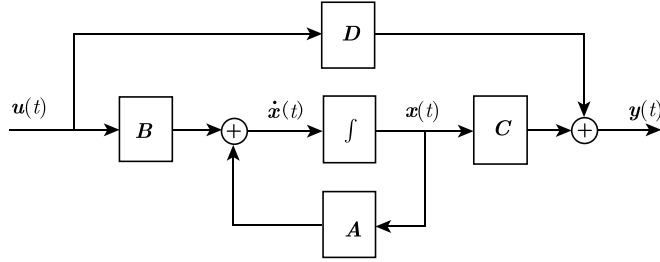


图 3.2.3 线性时不变 MIMO 连续时间系统的结构框图

4. 线性时变多输入多输出连续时间系统 (Linear Time-Varying MIMO Continuous-Time System)

如果系统矩阵 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是随时间变化的, 记作 $[\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)]$, 那么系统就是一个时变系统. 线性时变 MIMO 连续时间系统的状态空间模型为

$$S(t): \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.2.4)$$

其中 $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D}(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 为时变函数矩阵.

有了 MIMO 系统和 SISO 系统, 就可派生出单输入多输出系统 (Single-Input Multiple-Output system, **SIMO** 系统) 和多输入单输出系统 (Multiple-Input Single-Output system, **MISO** 系统). 结合时变和时不变, 我们有下列系统表达.

5. 线性时不变 MISO 连续时间系统 (Linear Time-Invariant MISO Continuous-Time System)

线性时不变 MISO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.2.5)$$

其中 $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 和 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{1 \times r}$.

6. 线性时不变单输入多输出连续时间系统 (Linear Time-Invariant SIMO Continuous-Time System)

线性时不变 SIMO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.2.6)$$

其中 $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$.

当然, 还有线性时变 SIMO 系统和 MISO 系统, 其结构如下.

7. 线性时变多输入单输出连续时间系统 (Linear Time-Varying MISO Continuous-Time System)

线性时变 MISO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{c}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t)\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.2.7)$$

其中 $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ 和 $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^{1 \times r}$.

8. 线性时变单输入多输出连续时间系统 (Linear Time-Varying SIMO Continuous-Time System)

线性时变 SIMO 连续时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t)u(t), \end{cases} \quad (3.2.8)$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^m$.

9. 非线性时变多输入多输出连续时间系统 (Nonlinear Time-Varying MIMO Continuous-Time System)

非线性时变多输入多输出连续时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \end{cases} \quad (3.2.9)$$

其中 $\mathbf{f}(*, *, *) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{g}(*, *, *) \in \mathbb{R}^m$ 为向量函数, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为系统输入向量, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为系统输出向量.

如果 $\mathbf{f}(*, *, *)$ 和 $\mathbf{g}(*, *, *)$ 中不显含 t , 就得到非线性时不变多输入多输出连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (3.2.10)$$

对于控制而言, 不涉及输入量 (即控制量) 的系统称为 **自治系统** (Autonomous System). 在这种定义下, **时变自治系统** 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t), \end{cases} \quad (3.2.11)$$

时不变自治系统 可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)). \end{cases} \quad (3.2.12)$$

对于控制问题, 一般研究其稳定性和控制器设计问题, 不太强调系统参数, 但对于参数估计问题, 表达式中一般加上系统参数、参数向量或参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$, 这时非线性时变 MIMO 连续时间系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \end{cases} \quad (3.2.13)$$

或等价写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (3.2.14)$$

当系统参数 $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}$ 与时间 t 无关, 就得到非线性时不变 MIMO 连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)). \end{cases} \quad (3.2.15)$$

对于线性时不变 MIMO 连续时间系统 (3.2.3), 系统参数为 $\boldsymbol{\theta} := \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$; 对于线性时变 MIMO 连续时间系统 (3.2.4), 系统参数为 $\boldsymbol{\theta}(t) := \{\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)\}$.

3.2.3 离散时间系统状态空间表达

如果系统的状态、输入和输出只是在离散时间点 $t = t_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 或 $t = t_0, t_1, t_2, \dots$ 上取值, 就称为 **离散时间系统** (Discrete-Time System) 或 **采样数据系统** (Sampled-Data System).

如果 $t = t_k = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$, T 为采样周期), 就得到等间隔采样离散时间系统, 即研究最多的传统离散时间系统. 如果是非等间隔采样, 就得到 **非均匀采样数据系统** (Non-Uniformly Sampled-data System), 也是离散时间系统.

1. 非线性时变多输入多输出离散时间系统 (Nonlinear Time-Varying MIMO Discrete-Time System)

离散时间系统一般用差分方程描述, 或一阶向量差分方程组描述. 非线性时变 MIMO 离散时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t_k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k), \end{cases} \quad (3.2.16)$$

其中 $\mathbf{x}(t_k) := \mathbf{x}(t)|_{t=t_k}$, $\mathbf{u}(t_k) := \mathbf{u}(t)|_{t=t_k}$ 和 $\mathbf{y}(t_k) := \mathbf{y}(t)|_{t=t_k}$ 分别称为离散时间系统的状态向量、输入向量和输出向量, 它们都是对应连续变量在 $t = t_k$ 时刻的采样值, 但是这里的 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), t_k) \in \mathbb{R}^m$ 并不是连续系统 (3.2.9) 中 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 和 $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 用 t_k 代替 t 得到的函数. 二者之间有极其复杂的关系, 可参见线性系统离散化内容.

2. 线性时不变多输入多输出离散时间系统 (Linear Time-Invariant MIMO Discrete-Time System)

取 $t = t_k = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$, T 为采样周期). 线性时不变 MIMO 离散时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(kT + T) = \mathbf{G}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{F}\mathbf{u}(kT), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT), \end{cases}$$

出于方便考虑, 记 $\mathbf{x}(k) := \mathbf{x}(kT)$, $\mathbf{u}(k) := \mathbf{u}(kT)$, $\mathbf{y}(k) := \mathbf{y}(kT)$, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \end{cases} \quad (3.2.17)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 为常数系统矩阵. 注: 这里的系统矩阵 $[\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 也不是连续系统中的.

注 3.2.2 线性时不变离散时间系统稳定系指系统矩阵 $\mathbf{G}$ 稳定, 即矩阵 $\mathbf{G}$ 的所有特征值都在单位圆内, 亦即特征方程 $|\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{G}| = 0$ 的根在复平面单位圆内. 线性离散时间系统的稳定性与矩阵 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 无关.

3. 线性时变多输入多输出离散时间系统 (Linear Time-Varying MIMO Discrete-Time System)

线性时变 MIMO 离散时间系统的状态空间模型可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{F}_k \mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_k \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_k \mathbf{u}(k), \end{cases} \quad (3.2.18)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量, $\mathbf{G}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 是系统的时变参数矩阵.

4. 线性时不变多输入单输出离散时间系统 (Linear Time-Invariant MISO Discrete-Time System)

线性时不变 MISO 离散时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \mathbf{u}(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} \mathbf{u}(k), \end{cases} \quad (3.2.19)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{1 \times r}$.

5. 线性时不变单输入多输出离散时间系统 (Linear Time-Invariant SIMO Discrete-Time System)

线性时不变 SIMO 离散时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k) + \mathbf{f} u(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} u(k), \end{cases} \quad (3.2.20)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统状态向量、输入和输出向量, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$.

6. 线性时不变单输入单输出离散时间系统 (Linear Time-Invariant SISO Discrete-Time System)

线性时不变 SISO 离散时间系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k) + \mathbf{f} u(k), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}(k) + \mathbf{d} u(k), \end{cases} \quad (3.2.21)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}$ 分别为系统状态向量、输入和输出, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$. 线性时不变 SISO 离散时间状态空间系统 (3.2.21) 框图如图 3.2.4 所示, 其中 $z^{-1} \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k-1)$ 或 $z \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1)$.

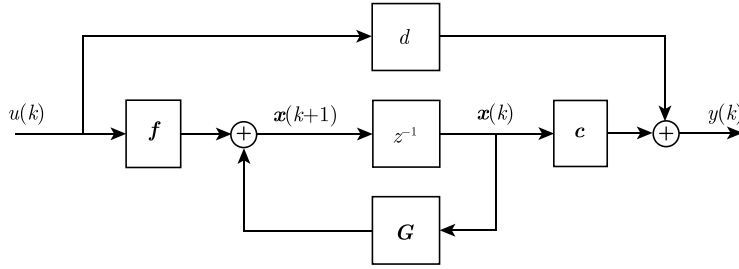


图 3.2.4 线性时不变 SISO 离散时间状态空间系统框图

本书中, 如果不特别说明, 状态空间模型中的变量如上所定义.

3.3 连续时间系统的状态空间模型

对于线性时不变系统, 微分方程、传递函数、状态空间模型三者之间可以互相转化. 本节研究它们之间的变换关系.

3.3.1 微分方程的传递函数表达

1. 微分方程模型

系统可分为 **连续时间系统** (Continuous-Time System) 和 **离散时间系统** (Discrete-Time System) 两大类. 连续时间系统一般可用微分方程模型描述为

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) \\ = b_1 u^{(n-1)}(t) + b_2 u^{(n-2)}(t) + \cdots + b_{n-1} u^{(1)}(t) + b_n u(t), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

其中 $u(t)$ 和 $y(t)$ 分别为系统的输入和输出, t 为时间变量, 各阶导数符号定义为

$$y^{(i)}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}, \quad y^{(2)}(t) = y''(t), \quad y^{(1)}(t) = \dot{y}(t) = y'(t), \quad y^{(0)}(t) = y(t).$$

当系数 a_i, b_i 是与 $u(t), y(t), t$ 无关的常数时, 这样的系统称为 **线性时不变确定性系统** (Linear Time-Invariant Deterministic System), 或线性定常确定性系统. 在不至于混淆的情况下, 简称为 **线性时不变系统** (Linear Time-Invariant System) 或线性定常系统.

2. 传递函数模型

在零初始条件下, 对式 (3.3.1) 进行 **拉普拉斯变换** (Laplace Transform) 得到

$$\begin{aligned} (s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) \\ = (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} s + b_n) U(s), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

其中复变量 s 为 **拉普拉斯算子** (Laplace Operator), $Y(s)$ 和 $U(s)$ 为 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换: $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$, $U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$. 则

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \quad (3.3.3)$$

称为系统的 **传递函数** (Transfer Function), 且有

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (3.3.4)$$

只有线性时不变系统才有传递函数. 线性时变系统和非线性系统都没有传递函数 (非线性系统包括非线性时不变系统和非线性时变系统).

3. 传递算子模型

若定义 **微分算子** (Differential Operator) $p = \frac{d}{dt}$, 记

$$G(p) := \frac{b_1 p^{n-1} + b_2 p^{n-2} + \cdots + b_n}{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \cdots + a_n}. \quad (3.3.5)$$

则式 (3.3.1) 可写为

$$\begin{aligned} p^n y(t) + a_1 p^{(n-1)} y(t) + a_2 p^{(n-2)} y(t) + \cdots + a_{n-1} p y(t) + a_n y(t) \\ = b_1 p^{(n-1)} u(t) + b_2 p^{(n-2)} u(t) + \cdots + b_{n-1} p u(t) + b_n u(t), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} (p^n + a_1 p^{(n-1)} + a_2 p^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} p + a_n) y(t) \\ = (b_1 p^{(n-1)} + b_2 p^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} p + b_n) u(t). \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

上式可以简单写作

$$y(t) = G(p)u(t), \quad (3.3.7)$$

其中 $G(p)$ 称为系统的 **传递算子** (Transfer Operator).

注 3.3.1 式 (3.3.3) 中 $G(s)$ 与式 (3.3.5) 中 $G(p)$ 具有相同形式. 为方便起见, 以后把二者统一起来都用 $G(s)$ 表示, 其中 s 视问题需要可认为是 **拉普拉斯算子** (Laplace operator) 或 **微分算子** (Differential Operator). 传递函数或传递算子是微分方程的另一种表达形式.

3.3.2 传递函数的控制器规范型实现

把传递函数 (阵) 化为状态空间模型称为 **实现** (Realization). 传递函数可以化为状态空间模型, 也可以化为四种规范型 (控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型). 这里给出传递函数化为控制器规范型的方法.

假设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + d.$$

其对应的输入输出关系为

$$y = (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n) \frac{u}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + du.$$

引入中间变量

$$\xi := \frac{u}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}.$$

或

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n) \xi = u.$$

则有

$$\xi^{(n)} + a_1\xi^{(n-1)} + a_2\xi^{(n-2)} + \cdots + a_n\xi = u. \quad (3.3.8)$$

于是有

$$y = (b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \cdots + b_n)\xi + du = b_1\xi^{(n-1)} + b_2\xi^{(n-2)} + \cdots + b_n\xi + du.$$

引入状态变量

$$\begin{cases} x_1 := \xi^{(n-1)}, \\ x_2 := \xi^{(n-2)}, \\ \vdots \\ x_{n-1} := \dot{\xi}, \\ x_n := \xi. \end{cases}$$

求导, 利用式 (3.3.8) 可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \xi^{(n)} = -a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1}, \\ y = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + du. \end{cases}$$

令 $\mathbf{x} := [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$. 把以上各式写成矩阵形式, 就得到传递函数 $G(s)$ 的 控制器规范型 状态空间模型,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_1, b_2, \cdots, b_n]\mathbf{x} + du. \end{cases}$$

控制器规范型的结构如图 3.3.1 所示.

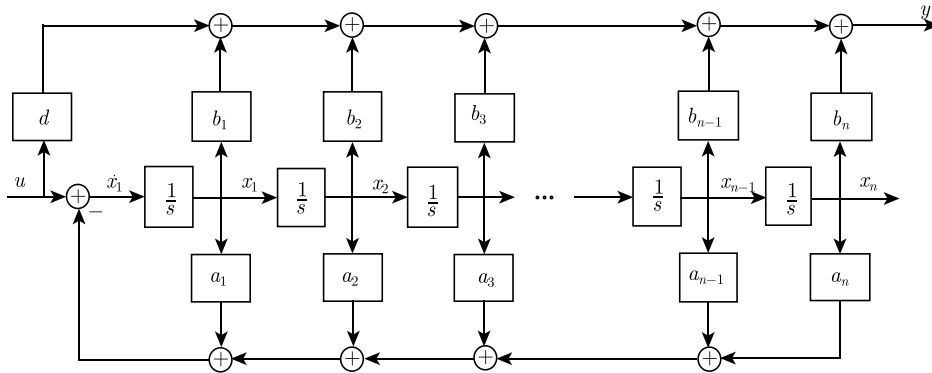


图 3.3.1 控制器规范型的结构图

3.3.3 微分方程的观测器规范型实现

微分方程可以通过设置不同的状态变量, 直接化为状态空间模型. 这里先给出一个二阶微分方程化为状态空间模型的例子, 然后给出化 n 阶微分方程为观测器规范型 (一种特别形式的状态空间模型) 的方法.

例 3.3.1 设二阶常系数微分方程如下,

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b_1 u'(t) + b_2 u(t), \quad (3.3.9)$$

把这个微分方程化为状态空间模型.

解 这是一个二阶系统, 方程左边包含了输出 y 的二阶导数, 右边包含了输入 u 的一阶导数. 定义两个状态变量 x_1 和 x_2 如下,

$$\begin{cases} x_1 := y, \\ x_2 := \dot{y}. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2, \\ \dot{x}_2 = y'' = -a_1 \dot{y} - a_2 y + b_1 \dot{u} + b_2 u \\ \quad = -a_1 x_2 - a_2 x_1 + b_1 \dot{u} + b_2 u. \end{cases}$$

写成状态方程为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \dot{u}(t) + b_2 u(t) \end{pmatrix}, \\ y(t) = x_1(t) = [1, 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

这个方程右边包含了输入的导数, 是不希望的, 因为导数容易将误差放大. 为避免在状态方程中出现输入的导数, 重新设置状态变量:

$$\begin{cases} x_1 := y, \\ x_2 := \dot{y} + a_1 y - b_1 u \\ \quad = \dot{x}_1 + a_1 x_1 - b_1 u. \end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 = y'' + a_1 y' - b_1 u' \\ \quad = -a_2 y + b_2 u \\ \quad = -a_2 x_1 + b_2 u. \end{cases}$$

上式最后一步利用了式 (3.3.9). 把以上各式写成矩阵形式可以得到微分方程 (3.3.9) 的观测器规范型实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = x_1(t) = [1, 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

有时出于方便, 把时间 t 省略, 即把 $y(t)$ 简写 y , 把 $u(t)$ 简写 u 等. 重写式 (3.3.1) 如下,

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y \\ = b_1 u^{(n-1)} + b_2 u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1} u^{(1)} + b_n u. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

引入状态变量:

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ x_2 = \dot{y} + a_1 y - b_1 u \\ \quad = \dot{x}_1 + a_1 x_1 - b_1 u, \\ x_3 = y^{(2)} + a_1 \dot{y} + a_2 y - b_1 \dot{u} - b_2 u \\ \quad = \dot{x}_2 + a_2 x_1 - b_2 u, \\ x_4 = y^{(3)} + a_1 y^{(2)} + a_2 \dot{y} + a_3 y - b_1 u^{(2)} - b_2 \dot{u} - b_3 u \\ \quad = \dot{x}_3 + a_3 x_1 - b_3 u, \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y - b_1 u^{(n-2)} - b_2 u^{(n-3)} - \cdots - b_{n-1} u \\ \quad = \dot{x}_{n-1} + a_{n-1} x_1 - b_{n-1} u. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u, \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 + x_3 + b_2 u, \\ \dot{x}_3 = -a_3 x_1 + x_4 + b_3 u, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = -a_{n-1} x_1 + x_n + b_{n-1} u, \\ \dot{x}_n = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n \dot{y} - b_1 u^{(n-1)} - b_2 u^{(n-2)} - \cdots - b_{n-1} \dot{u} \\ \quad = -a_n x_1 + b_n u. \end{cases}$$

上式最后一步利用了式 (3.3.10). 令 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$, 把以上各式写成矩阵形式可以得到微分方程 (3.3.10) 的 观测器规范型实现 为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = x_1(t) = [1, 0, 0, \cdots, 0] \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (3.3.11)$$

观测器规范型的结构如图 3.3.2 所示. 读者可以验证系统 (3.3.11) 的传递函数 $G(s)$ 恰好为式 (3.3.3).

注 3.3.2 由于观测器规范型中参数 (a_i, b_i) 与微分方程 (3.3.1) 或传递函数描述 (3.3.3) 中参数一一对应, 因此, 若已知观测器规范型实现, 则立即可写出系统的传递函数或微分方程描述; 反之亦然. 控制器规范型也如此, 参见下节的控制器规范型实现.

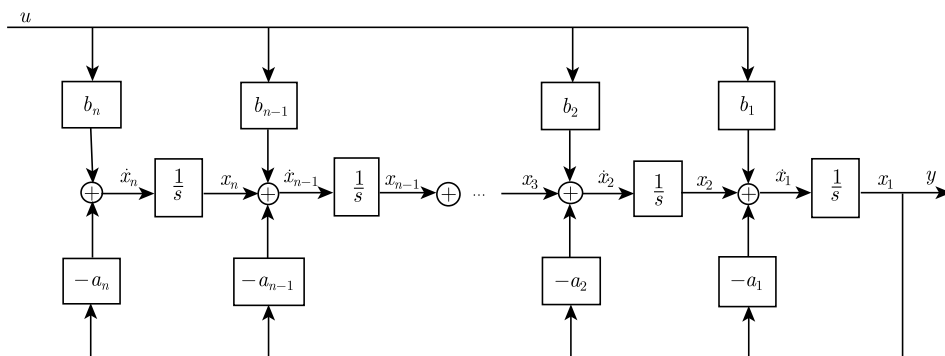


图 3.3.2 观测器规范型的结构框图

3.4 状态空间模型线性变换及其性质

本节推导状态空间模型的传递函数矩阵、研究状态空间模型的线性变换, 以及在非奇异线性变换下, 系统的传递矩阵的不变性、特征多项式的不变性、特征值的不变性、能控性的不变性、能观测性的不变性、最小特征多项式的不变性, 介绍凯莱-哈密尔顿定理。

考虑线性时不变多输入多输出连续时间状态空间系统,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.4.1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的 (n 维) 状态向量 (State Vector), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的输入向量和输出向量, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 、 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 均为常数矩阵。

3.4.1 状态空间模型的传递函数阵

对式 (3.4.1) 进行 拉普拉斯变换 (Laplace Transform), 依次可得

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$= [\mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

$$=: \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s).$$

所以从 $\mathbf{U}(s)$ 到 $\mathbf{Y}(s)$ 的 传递矩阵 (Transfer Matrix) 为

$$\mathbf{G}(s) := \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.4.2)$$

$$= \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\mathbf{B}}{|s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}|} + \mathbf{D}. \quad (3.4.3)$$

它揭示了传递矩阵 $\mathbf{G}(s)$ 与状态空间模型参数矩阵 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 之间的关系. 传递矩阵也称传递函数矩阵、传递函数阵。

注 3.4.1 从式 (3.4.3) 可以看出, 状态空间系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式 $|s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}|$ 就是传递函数矩阵的分母. 因此, 传递函数矩阵的稳定性对应于状态空间系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的稳定性, 即

A 的特征值具有负实部.

MATLAB 是一个集成化编程工具, 提供了很多函数可以很方便地进行系统仿真, 包含控制系统仿真工具箱 Simulink、辨识工具箱 Ident 等. 例如, 可用函数 tf 建立一个传递函数, ss 产生一个状态空间模型, step 绘制阶跃响应曲线, impulse 绘制脉冲响应曲线等. 这些命令的用法可借助于 MATLAB 的 help 命令查询, 例如 help tf 可查函数 tf 的用法. 下面是使用 MATLAB 函数的简单例子.

用 tf 产生一个传递函数

$$G(s) = \frac{4s + 5}{s^2 + 2s + 3},$$

然后用 step 绘制系统的阶跃响应曲线的命令如下:

```
1 >> G1=tf([4, 5], [1, 2, 3])
2
3 Transfer function:
4      4 s + 5
5  -----
6      s^2 + 2 s + 3
7
8 >> step(G1)
```

产生一个状态空间模型

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [4, 5] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0u, \end{cases}$$

再求系统的传递函数的命令如下:

```
1 >> A=[-2, -3; 1, 0]; b=[1, 0]'; c=[4, 5]; d=0;
2 >> ss1=ss(A,b,c,d)
3
4 a =
5      x1  x2
6      x1  -2  -3
7      x2   1   0
8
9 b =
10      u1
11      x1   1
12      x2   0
13
14 c =
15      x1  x2
16      y1   4   5
17
```

```

18 d =
19         u1
20     y1    0
21
22 Continuous-time model.
23 >> G1=tf(ss1)
24
25 Transfer function:
26     4 s + 5
27     -----
28     s^2 + 2 s + 3

```

当然, 可以用命令 `impz(ss1)` 绘制状态空间模型的脉冲响应曲线图, 用 `[a,b,c,d]=tf2ss([4,5],[1,2,3])` 产生传递函数的控制器标准形.

3.4.2 状态空间模型的线性变换

下面讨论状态空间模型的线性变换 (相似变换) 问题: 对状态空间模型 (3.4.1) 进行 **线性变换** (Linear Transformation). 设 $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 **非奇异矩阵** (Non-Singular Matrix), 定义新状态变量 (状态向量) $\bar{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 或 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$, 那么利用式 (3.4.1) 有

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{T}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \\
 &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\
 &=: \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \quad \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0,
 \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \\
 &=: \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),
 \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \bar{\mathbf{B}} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C}\mathbf{T}. \tag{3.4.6}$$

式 (3.4.4)、式 (3.4.5) 构成了新状态变量下的状态空间模型. 可见系统状态变量是非唯一的, 所以一个系统的状态空间表达也不是唯一的. 下面讨论线性变换下状态空间模型的性质.

3.4.3 线性变换下系统传递函数与特征多项式

1. 相似变换下系统特征多项式的不变性

系统 (3.4.1) 的特征多项式定义为

$$f(s) := \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}],$$

其中 $\mathbf{I}_n$ 为 n 阶 **单位阵** (Identity Matrix). 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的特征多项式为

$$\bar{f}(s) := \det[s\mathbf{I}_n - \bar{\mathbf{A}}].$$

在线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的特征多项式, 即

$$\bar{f}(s) = f(s).$$

事实上, 使用公式 $\det[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \det[\mathbf{A}]\det[\mathbf{B}]$ 和式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned}\bar{f}(s) &:= \det[s\mathbf{I}_n - \bar{\mathbf{A}}] = \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}] = \det\{\mathbf{T}^{-1}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\mathbf{T}\} \\ &= \det[\mathbf{T}^{-1}]\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\det[\mathbf{T}] = \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = f(s).\end{aligned}$$

2. 相似变换下系统特征值的不变性

系统 (3.4.1) 的特征值定义为特征方程

$$f(s) = \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = 0$$

的根 $s_i, i = 1, 2, \dots, n$. 在线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的特征值, 即系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的特征多项式 $\bar{f}(s)$ 与 $f(s)$ 有相同的零点, 或 $\bar{f}(s) = 0$ 与 $f(s) = 0$ 有相同的根. 结论是明显的, 因为它们有相同的特征多项式, 故有相同的零点 (特征值).

3. 相似变换下系统传递函数 (阵) 的不变性

仿照式 (3.4.2) 的推导, 容易得到相似变换后系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的传递矩阵

$$\bar{\mathbf{G}}(s) := \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}_n - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D}. \quad (3.4.7)$$

相似变换下系统传递函数 (阵) 的不变性说明 $\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{G}(s)$. 事实上, 使用公式 $(\mathbf{R}\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^{-1}$, $(\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{T})^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^{-1}$ 和式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{G}}(s) &= \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}_n - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{T}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}[\mathbf{T}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{T}^{-1}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}[\mathbf{T}s\mathbf{I}_n\mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s).\end{aligned} \quad (3.4.8)$$

因此, 在非奇异线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的传递函数矩阵, 即系统传递函数阵是唯一的, 但一个系统的状态空间表达不是唯一的.

4. 凯莱-哈密顿定理 (Cayley-Hamilton Theorem)

定理 3.4.1 凯莱-哈密顿定理 (Cayley-Hamilton Theorem)

若矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征方程为

$$\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ 本身也满足上述特征方程, 即

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + a_2\mathbf{A}^{n-2} + \dots + a_n\mathbf{I}_n = \mathbf{0},$$

或

$$\mathbf{A}^n = -a_1\mathbf{A}^{n-1} - a_2\mathbf{A}^{n-2} - \dots - a_n\mathbf{I}_n. \quad (3.4.9)$$

证明 由于 $s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 是 s 的 $n-1$ 次多项式, 即 $\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 具有下列形式 [参见思考题 24],

$$\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = s^{n-1}\mathbf{I}_n + \mathbf{R}_2s^{n-2} + \mathbf{R}_3s^{n-3} + \dots + \mathbf{R}_{n-1}s + \mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

且

$$(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]},$$

或

$$(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = \text{adj}s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} = \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\mathbf{I}_n.$$

所以

$$\begin{aligned} \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]\mathbf{I}_n &= (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(s^{n-1}\mathbf{I}_n + \mathbf{R}_2s^{n-2} + \mathbf{R}_3s^{n-3} + \cdots + \mathbf{R}_{n-1}s + \mathbf{R}_n) \\ &= (s^{n-1}\mathbf{I}_n + \mathbf{R}_2s^{n-2} + \mathbf{R}_3s^{n-3} + \cdots + \mathbf{R}_{n-1}s + \mathbf{R}_n)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}). \end{aligned}$$

从上式可以看出, 矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{R}_i$ 相乘次序是可交换的. 因此, 如果 $(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ 及其伴随矩阵 $\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 中有一个为零, 则其乘积为零. 如果上式中用 $\mathbf{A}$ 代替 s , 显然 $(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ 为零. 于是有

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + a_2\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_n\mathbf{I}_n = \mathbf{0}.$$

这就证明了凯莱-哈密顿定理.

这个定理告诉我们, $\mathbf{A}$ 的任意高于 n 次幂 $\mathbf{A}^{n+i}$ ($i \geq 0$) 都可以表示为 $\mathbf{I}_n, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \cdots, \mathbf{A}^{n-1}$ 的线性组合. 事实上, 由 $\mathbf{A}^{n+i} = \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^n$, 利用式 (3.4.9) 可直接加以证明. 例如,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= -a_1\mathbf{A}^{n-1} - a_2\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_n\mathbf{I}_n. \\ \mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^n = \mathbf{A}(-a_1\mathbf{A}^{n-1} - a_2\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_n\mathbf{I}_n) \\ &= -a_1\mathbf{A}^n - a_2\mathbf{A}^{n-1} - a_3\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_n\mathbf{A} \\ &= -a_1(-a_1\mathbf{A}^{n-1} - a_2\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_n\mathbf{I}_n) - a_2\mathbf{A}^{n-1} - a_3\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_n\mathbf{A} \\ &= (a_1^2 - a_2)\mathbf{A}^{n-1} + (a_1a_2 - a_3)\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + (a_1a_{n-1} - a_n)\mathbf{A} + a_1a_n\mathbf{I}_n. \\ \mathbf{A}^{n+2} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{n+1} \\ &= \mathbf{A}[(a_1^2 - a_2)\mathbf{A}^{n-1} + (a_1a_2 - a_3)\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + (a_1a_{n-1} - a_n)\mathbf{A} + a_1a_n\mathbf{I}_n] \\ &= (a_1^3 - a_2a_1)\mathbf{A}^{n-1} + (a_1^2a_2 - a_3a_1)\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + (a_1^2a_{n-1} - a_na_1)\mathbf{A} + a_1^2a_n\mathbf{I}_n = \cdots \end{aligned}$$

如果定义矩阵指数,

$$\exp(\mathbf{A}) := e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots$$

那么存在常数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 使得下式成立,

$$\exp(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I}_n + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}.$$

凯莱-哈密顿定理在线性代数与矩阵论有关定理的证明中是非常有用的.

5. 线性变换下系统最小多项式的不变性

设方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征方程多项式为

$$f(s) := \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n.$$

按照凯莱-哈密顿定理有 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. 如果 n 次多项式 $f(s)$ 存在一个分解 (下面的 $f_1(s)$ 和 $f_2(s)$ 是两个多项式),

$$f(s) = f_1(s)f_2(s),$$

使得 $f_1(s)$ 是满足 $f_1(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ 的阶次最低的首 1 多项式, 就称为 $\mathbf{A}$ 的 **最小多项式**. 由此可知, $f_1(s)$ 是 $f(s)$ 的因子. 最特别的情形是最小多项式 $f_1(s)$ 等于 $f(s)$.

按照凯莱-哈密顿定理, 方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足其自身的特征方程,

$$f(s) := \det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n,$$

即 $s = \lambda$ 是 $f(s) = 0$ 的根 [$f(\lambda) = 0$]. 然而特征方程不一定是 $\mathbf{A}$ 满足的最小阶次的纯量方程. 将矩阵 $\mathbf{A}$ 为其根的最小阶次首 1 多项式称为最小多项式, 也就是说, $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的最小多项式 $d(s)$ 定义为使得 $d(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ 的最小阶次的首 1 多项式 ($\deg[d(s)] \leq \deg[f(s)]$).

假设 s 的多项式 $m(s)$ 是 $(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ 伴随矩阵 $\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 所有元的最大公因子. 可以证明, 如果将 $m(s)$ 的 s 最高阶次的系数选为 1, 则最小多项式 $d(s)$ 由下式给出,

$$d(s) = \frac{\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]}{m(s)}. \quad (3.4.10)$$

矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的最小多项式 $d(s)$ 可按下列步骤计算.

- (1) 对伴随矩阵 $\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 的各元进行因子分解, 其因子都是 s 的首 1 一次多项式.
- (2) 确定伴随矩阵 $\text{adj}[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 各元的最大公因子 $m(s)$. 如果不存在公因子, 则 $m(s) = 1$.
- (3) 最小多项式 $d(s)$ 可由 $\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]$ 除以 $m(s)$ 得到, 参见式 (3.4.10).

注 3.4.2 因为相似变换下系统特征多项式的不变性, 所以线性变换下系统最小多项式是不变的. 最小多项式在矩阵多项式的计算中起着重要作用.

例 3.4.1 最小多项式的例子

矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$f(s) = \det[s\mathbf{I}_3 - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{vmatrix} = (s-1)^3.$$

令 $f_1(s) = s-1$, $f_2(s) = (s-1)^2$. 它们是 $f(s)$ 的因子. 计算

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \mathbf{0},$$

所以 $f_2(s) = (s-1)^2 = s^2 - 2s + 1$ 是 $\mathbf{A}$ 的最小多项式, $f_1(s) = s-1$ 不是 $\mathbf{A}$ 的最小多项式. 当然, $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

例 3.4.2 计算下列系统的特征值和传递函数,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} u, \\ y = [6, 7] \mathbf{x}. \end{cases}$$

解 对于本例,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = [6, 7], \quad d = 0,$$

系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} p(s) &= \det[s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{vmatrix} \\ &= s^2 - 2s - 3. \end{aligned}$$

令 $p(s) = 0$ 得到特征方程 $s^2 - 2s - 3 = 0$, 或 $(s+1)(s-3) = 0$, 所以系统的特征值为 $s = -1$ 和 $s = 3$. 这个系统有 **正特征值根**, 故是不稳定的. 系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \\ &= \mathbf{c} \begin{pmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{b} + 0 = [6, 7] \begin{pmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \\ &= [6, 7] \frac{\begin{pmatrix} s & 3 \\ 1 & s-2 \end{pmatrix}}{s^2 - 2s - 3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{[6s+7, 7s+4]}{s^2 - 2s - 3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{59s+48}{(s+1)(s-3)}. \end{aligned}$$

注 3.4.3 从这个例子可以看出: 状态方程矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值就是系统 (传递函数) 的极点. 如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值具有负实部, 就说 $\mathbf{A}$ 是稳定矩阵, 或 $\mathbf{A}$ 是 **胡尔维茨矩阵** (Hurwitz Matrix), 就称系统是稳定的. 传递函数的稳定性取决于传递函数分母的零点 (即系统的极点), 传递函数的分母就是系统的特征多项式.

3.4.4 线性变换下系统的能控性与能观测性

1. 线性变换下系统能控性不变

系统 (3.4.1) 能控性矩阵定义为

$$\mathbf{Q}_c := [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times (nr)}.$$

如果能控性矩阵 $\mathbf{Q}_c$ 的秩等于系统阶次 n (状态向量的维数) (矩阵的秩定义为其最大子矩阵非零行列式的维数), 即

$$\text{rank}[\mathbf{Q}_c] = \text{rank}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n,$$

那么系统 (3.4.1) 就是完全能控的或完全可控的, 简称系统能控或系统可控. 如果 $\text{rank}[\mathbf{Q}_c] = i < n$, 系统就不完全能控或不完全可控, 简称系统不能控或系统不可控, 此时能控状态数目为 i , 不能控状态数目为 $n - i$ (不能确定哪几个状态变量可控, 哪几个不可控).

类似地, 相似变换后系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的能控性矩阵为

$$\bar{\mathbf{Q}}_c := [\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] \in \mathbb{R}^{n \times (nr)}.$$

相似变换下系统能控性是不变的, 说明 $\text{rank}[\bar{\mathbf{Q}}_c] = \text{rank}[\mathbf{Q}_c]$, 即变换后系统与原系统有相同数目的能控状态变量. 事实上, 使用式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned} \text{rank}[\bar{\mathbf{Q}}_c] &= [\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}}, \dots, \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}] \\ &= \text{rank}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}), (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^2(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}), \dots, (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{n-1}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B})]. \end{aligned}$$

因为

$$(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^i = \overbrace{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) \cdots (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})}^i = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^i\mathbf{T},$$

所以有

$$\begin{aligned} \text{rank}[\bar{\mathbf{Q}}_c] &= \text{rank}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}), (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^2(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}), \dots, (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{n-1}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B})] \\ &= \text{rank}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}), (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}), \dots, (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B})] \\ &= \text{rank}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \\ &= \text{rank}\{\mathbf{T}^{-1}[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\} \\ &= \text{rank}[\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}_c]. \end{aligned}$$

因为 $\mathbf{T}$ 是非奇异矩阵 (满秩的), 所以 $\text{rank}[\mathbf{T}^{-1}] = n$. 因此有

$$\text{rank}[\bar{\mathbf{Q}}_c] = \text{rank}[\mathbf{Q}_c].$$

这里使用了 矩阵秩的性质

(1) 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times r}$, 则有

$$\text{rank}[\mathbf{A}\mathbf{B}] \leq \min\{\text{rank}[\mathbf{A}], \text{rank}[\mathbf{B}]\}.$$

(2) 设 $\mathbf{A}_i$ 的维数满足可相乘条件, 有

$$\text{rank}[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k] \leq \min\{\text{rank}[\mathbf{A}_1], \text{rank}[\mathbf{A}_2], \dots, \text{rank}[\mathbf{A}_k]\}.$$

(3) 如果 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 都是可逆方阵, 那么

$$\text{rank}[\mathbf{A}] = \text{rank}[\mathbf{P}\mathbf{A}] = \text{rank}[\mathbf{A}\mathbf{Q}] = \text{rank}[\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}].$$

因此, 在非奇异线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的能控性, 即系统的能控状态数目是相同的, 不能控状态的数目也是不变的.

2. 线性变换下系统能观测性不变

系统 (3.4.1) 能观测性矩阵定义为

$$\mathbf{Q}_o := \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(mn) \times n}.$$

如果能观测性矩阵 $\mathbf{Q}_o$ 的秩等于系统阶次 n (状态向量的维数), 即

$$\text{rank}[\mathbf{Q}_o] = n,$$

那么系统 (3.4.1) 就是完全能观测的或完全可观测的, 简称系统能观测或系统可观测. 如果 $\text{rank}[\mathbf{Q}_o] = j < n$, 系统就不完全能观测或不完全可观测, 简称系统不能观测或不可观测, 此时能观测状态数目为 j , 不能观测状态数目为 $n - j$ (不能确定哪几个状态变量可观测, 哪几个不可观测).

类似地, 相似变换后系统 (3.4.4)~(3.4.5) 的能观测性矩阵为

$$\bar{\mathbf{Q}}_o := \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(mn) \times n}.$$

相似变换下系统能观测性是不变的, 说明 $\text{rank}[\bar{\mathbf{Q}}_o] = \text{rank}[\mathbf{Q}_o]$, 即变换后系统与原系统有相同数目能观测状态变量. 事实上, 使用式 (3.4.6), 有

$$\begin{aligned} \text{rank}[\bar{\mathbf{Q}}_o] &= \text{rank} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{CT} \\ (\mathbf{CT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) \\ (\mathbf{CT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})^2 \\ \vdots \\ (\mathbf{CT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{CT} \\ (\mathbf{CT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}) \\ (\mathbf{CT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{T}) \\ \vdots \\ (\mathbf{CT})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T}) \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{CT} \\ \mathbf{CAT} \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{T} \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{T} \right\} = \text{rank}[\mathbf{Q}_o\mathbf{T}] = \text{rank}[\mathbf{Q}_o]. \end{aligned}$$

这里仍使用了 $\mathbf{T}$ 是非奇异矩阵的假设. 因此, 在线性变换下, 系统 (3.4.4)~(3.4.5) 与系统 (3.4.1) 有相同的能观测性, 即系统的能观测状态数目是相同的, 不能观测状态的数目也是不变的.

3.5 状态空间规范型

考虑线性时不变单输入单输出连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.5.1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别为系统输入和输出, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d \in \mathbb{R}$.

单输入单输出系统 (3.5.1) 包含 $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ 个参数, 其中矩阵 $\mathbf{A}$ 有 n^2 个参数, 向量 $\mathbf{b}$ 有 n 个参数, 向量 $\mathbf{c}$ 有 n 个参数, 还有参数 d . 我们已经说明状态空间模型是不唯一的, 因为包含了太多的自由参数. 因此有必要确定某种规范型使得状态空间模型的参数数目尽可能少, 使得在某种条件下, 可将状态空间模型变换为唯一的模型表达, 这就是本节要研究的 4 种规范型: 控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型, 它们都只有 $2n + 1$ 个自由参数. 并且这 4 个规范型是唯一的, 且可以互相转换. 本节介绍通过非奇异线性变换将系统转换为这 4 种规范型的方法, 以及线性系统的对偶性与对偶原理.

对式 (3.5.1) 进行 **线性变换** (Linear Transformation) $\mathbf{x}(t) := \mathbf{T}\mathbf{z}(t)$ 或 $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{T}$ 为 **非奇异矩阵** (Non-Singular Matrix), 则可化为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}u(t), & \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{h}\mathbf{z}(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.5.2)$$

其中

$$\mathbf{F} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \mathbf{g} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{h} := \mathbf{c}\mathbf{T}. \quad (3.5.3)$$

如果状态空间模型 (3.5.1) 完全可控和 (或) 完全可观, 则可以通过非奇异线性变换将模型 (3.5.1) 化为 4 种规范型, 现分述如下.

有关 **友矩阵** (Companion Matrix) 及其特殊矩阵间的变换, 可参见论文“Transformations between some special matrices (一些特殊矩阵之间的相似变换)”^[24].

3.5.1 控制器规范型

控制器规范型 (Controller Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{b}_cu(t), \\ y(t) = \mathbf{c}_c\mathbf{x}_c(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.5.4)$$

其中下标 c 是英文控制器 controller 的第一个字母, 意思是控制器规范型,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &:= \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}_c \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b}_c := \mathbf{T}_c^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_c := \mathbf{c} \mathbf{T}_c = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

变换矩阵为

$$\mathbf{T}_c := \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$\mathbf{r}_n$ 为 $\mathbf{T}_{co}^{-1} := [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1}$ 的第 n 行.

证明 由于 $\mathbf{r}_n$ 为 $\mathbf{T}_{co}^{-1}$ 的第 n 行, 即 $\mathbf{T}_{co}^{-1} = \begin{pmatrix} * \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix}$, 其中 $*$ 为适当维数的矩阵. 故有

$$\mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{T}_{co} = \begin{pmatrix} * \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix} [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = \mathbf{I}_n.$$

上式第 n 行为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_n \mathbf{b} = 0, \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}\mathbf{b} = 0, \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} = 0, \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} = 1. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_c = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \mathbf{b} \\ \mathbf{r}_n \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{T}_c &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix} \mathbf{T}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T}_c \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{T}_c \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \mathbf{T}_c \\ \mathbf{r}_n \mathbf{T}_c \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

把上式矩阵展开可得

$$\begin{cases} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T}_c = [1, 0, 0, 0, \dots, 0] =: \mathbf{e}_1^T, \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{T}_c = [0, 1, 0, 0, \dots, 0] =: \mathbf{e}_2^T, \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-3} \mathbf{T}_c = [0, 0, 1, 0, \dots, 0] =: \mathbf{e}_3^T, \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{T}_c = [0, 0, 0, 0, \dots, 1] =: \mathbf{e}_n^T. \end{cases} \quad (3.5.5)$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_c &= \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \\ \mathbf{r}_n \end{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{T}_c \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^n \mathbf{T}_c \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T}_c \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A}^2 \mathbf{T}_c \\ \mathbf{r}_n \mathbf{A} \mathbf{T}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_n \mathbf{A}^n \mathbf{T}_c \\ \mathbf{e}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n-2}^\top \\ \mathbf{e}_{n-1}^\top \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

凯莱-哈密尔顿定理 (Cayley-Hamilton Theorem) 告诉我们: 若矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征方程为

$$\det[s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

则矩阵 $\mathbf{A}$ 本身也满足上述方程, 即

$$\mathbf{A}^n = -a_1 \mathbf{A}^{n-1} - a_2 \mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_n \mathbf{I}_n. \tag{3.5.7}$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\mathbf{r}_n$, 右乘 $\mathbf{T}_c$, 并利用式 (3.5.5) 得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_n \mathbf{A}^n \mathbf{T}_c &= -a_1 \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{T}_c - a_2 \mathbf{r}_n \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{T}_c - \cdots - a_n \mathbf{r}_n \mathbf{T}_c \\
&= -a_1 \mathbf{e}_1^\top - a_2 \mathbf{e}_2^\top - \cdots - a_n \mathbf{e}_n^\top \\
&= [-a_1, -a_2, \cdots, -a_n].
\end{aligned}$$

将上式代入式 (3.5.6) 得证.

参考 3.3.2 节, 我们容易得到传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

的 控制器规范型实现,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_1, b_2, \cdots, b_n] \mathbf{x}. \end{cases}$$

控制器规范型的记忆方法: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式的系数的相反数按顺序排在 $\mathbf{A}$ 矩阵的第一行, $\mathbf{A}$ 的左下角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\mathbf{b}$ 是一个单位向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的列向量), 分子多项式的系数作为行向量 $\mathbf{c}$. 控制器规范型的结构如图 3.5.1 所示.

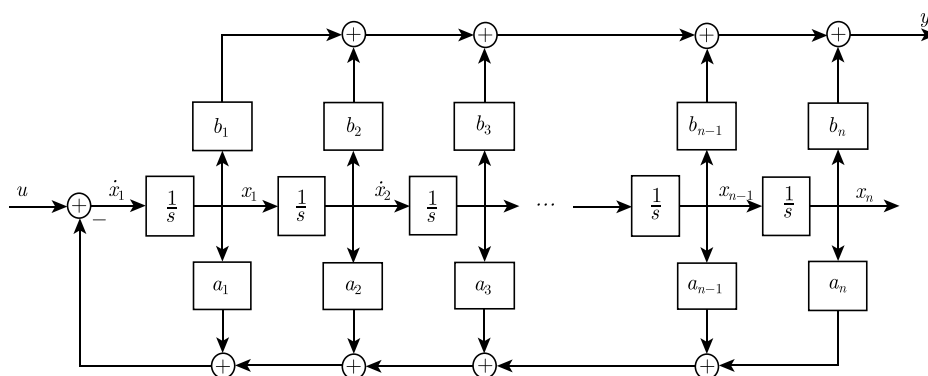


图 3.5.1 控制器规范型的结构框图

例 3.5.1 将下列传递函数化为控制器规范型实现,

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

解 传递函数的分母多项式阶次为 $n = 3$, 故对应的状态空间模型有 3 个状态变量. 该系统的控制器规范型实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [4, 5, 6] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

例 3.5.2 将下列传递函数化为控制器规范型实现,

$$G(s) = \frac{5s^3 + 14s^2 + 20s + 26}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

解 该传递函数分子与分母次数相同, 采用长除法, 把其变为

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4} + 5.$$

对应的控制器规范型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [4, 5, 6] \mathbf{x} + 5u. \end{cases}$$

3.5.2 能控性规范型

能控性规范型 (Controllability Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{co}(t) = \mathbf{A}_{co}\mathbf{x}_{co}(t) + \mathbf{b}_{co}u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}_{co}\mathbf{x}_{co}(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.5.8)$$

其中下标 co 是英文能控性 controllability 的前两个字母, 意思是能控性规范型,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{co} &:= \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{co} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{b}_{co} := \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{c}_{co} &:= \mathbf{c} \mathbf{T}_{co} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n] \\ &= [\mathbf{c} \mathbf{b}, \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{c} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{c} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \end{aligned}$$

变换矩阵为

$$\mathbf{T}_{co} := [\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

证明 由于系统 $[\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d]$ 完全能控, 故能控性矩阵 **满秩** (Full Rank), 即

$$\text{rank}[\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] = n,$$

所以变换矩阵 $\mathbf{T}_{co} = [\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}]$ 是 **可逆矩阵** (Invertible Matrix). 又

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{T}_{co} &= \mathbf{T}_{co}^{-1} [\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \\ &= [\mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{b}, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] = \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

令 $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ 为第 i 个单位列向量 (即单位阵的第 i 列), 则有

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{b} = [1, 0, 0, 0, \cdots, 0]^T = \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b} = [0, 1, 0, 0, \cdots, 0]^T = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = [0, 0, 1, 0, \cdots, 0]^T = \mathbf{e}_3, \\ \vdots \\ \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} = [0, 0, 0, 0, \cdots, 1]^T = \mathbf{e}_n. \end{cases} \quad (3.5.9)$$

由此可得

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{co} &= \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{b} = [1, 0, 0, \cdots, 0]^T, \\ \mathbf{A}_{co} &= \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{co} = \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}] \\ &= [\mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \cdots, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^n \mathbf{b}] \\ &= [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \cdots, \mathbf{e}_n, \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^n \mathbf{b}]. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\mathbf{T}_{co}^{-1}$, 右乘 $\mathbf{b}$, 并利用式 (3.5.9) 可得

$$\mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^n \mathbf{b} = -a_1 \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} - a_2 \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} - \cdots - a_n \mathbf{T}_{co}^{-1} \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}
&= -a_1 \mathbf{e}_n - a_2 \mathbf{e}_{n-1} - \cdots - a_{n-1} \mathbf{e}_2 - a_n \mathbf{e}_1 \\
&= \begin{pmatrix} -a_n \\ -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

将上式代入式 (3.5.10) 得证.

能控性规范型和 (后面的) 能观测性规范型中参数 $\beta_i := \mathbf{c} \mathbf{A}^i \mathbf{b}$ 称为 **马可夫参数** (Markov Parameter), 可对 $G(s)$ 采用 **长除法** (Long Division) 获得, 即把状态方程式 (3.5.1) 的传递函数化为

$$\begin{aligned}
G(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \\
&= s^{-1}\mathbf{c}\left(\mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{A}}{s}\right)^{-1}\mathbf{b} + d \\
&= s^{-1}\mathbf{c}(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}s^{-1} + \mathbf{A}^2s^{-2} + \mathbf{A}^3s^{-3} + \cdots)\mathbf{b} + d \\
&= d + \mathbf{c}\mathbf{b}s^{-1} + \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b}s^{-2} + \mathbf{c}\mathbf{A}^2\mathbf{b}s^{-3} + \cdots + \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{b}s^{-n} + \cdots \\
&= d + \beta_1s^{-1} + \beta_2s^{-2} + \beta_3s^{-3} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

其中 $\beta_i := \mathbf{c}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. 又设

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n} + d.$$

右边分式的分母分子同除以 s^n , 使用 **长除法** 可得

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_1s^{-1} + b_2s^{-2} + b_3s^{-3} + \cdots + b_ns^{-n}}{1 + a_1s^{-1} + a_2s^{-2} + a_3s^{-3} + \cdots + a_ns^{-n}} + d \\
&= d + b_1s^{-1} + (b_2 - a_1b_1)s^{-2} + (b_3 - a_2b_1 - a_1b_2 + a_1^2b_1)s^{-3} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.5.12}$$

比较式 (3.5.11) 与式 (3.5.12) 同次幂 s^{-i} 的系数可得方程,

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1, \\ \beta_2 = b_2 - a_1b_1 = b_2 - a_1\beta_1, \\ \beta_3 = b_3 - a_2b_1 - a_1(b_2 - a_1b_1) = b_3 - a_2\beta_1 - a_1\beta_2, \\ \vdots \\ \beta_n = b_n - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_2 - \cdots - a_1\beta_{n-1}. \end{cases}$$

求出 b_i 得到

$$\begin{cases} b_1 = \beta_1, \\ b_2 = a_1\beta_1 + \beta_2, \\ b_3 = a_2\beta_1 + a_1\beta_2 + \beta_3, \\ \vdots \\ b_n = a_{n-1}\beta_1 + a_{n-2}\beta_2 + \cdots + a_1\beta_{n-1} + \beta_n. \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

求得

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

传递函数的能控性规范型实现 传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} + d$$

的能控性规范型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n] \mathbf{x}(t) + du(t) \\ = [b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n] \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-T} \mathbf{x}(t) + du(t). \end{cases}$$

能控性规范型的记忆方法: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式系数的相反数按倒序排在 $\mathbf{A}$ 矩阵的最后一列, $\mathbf{A}$ 的左下角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\mathbf{b}$ 是一个单位向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的列向量), 马可夫参数 β_i 作为行向量 $\mathbf{c}$.

注 3.5.1 控制器规范型与能控性规范型的控制参数向量 $\mathbf{b}$ 都是一个单位列向量, 两个规范型的 $\mathbf{A}$ 矩阵是斜对称的. 控制器规范型要简单, 其输出参数向量是传递函数分子多项式的系数构成的, 它可以从传递函数直接写出, 不像能控性规范型那样需要计算系统的马可夫参数.

3.5.3 观测器规范型

观测器规范型 (Observer Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{A}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{b}_o u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}_o \mathbf{x}_o(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.5.13)$$

其中下标 o 是英文观测器 observer 的第一个字母, 意思是观测器规范型,

$$\begin{aligned}
A_o &:= T_o^{-1} A T_o \\
&= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b_o := T_o^{-1} b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \\
c_o &:= c T_o = [1, 0, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n},
\end{aligned}$$

变换矩阵为

$$T_o := [A^{n-1}l_n, A^{n-2}l_n, \dots, l_n] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

l_n 为 T_{ob} 的第 n 列,

$$T_{ob} := \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

证明 由于 l_n 为 T_{ob} 的第 n 列, 即 $T_{ob} = [* , l_n]$, 故有

$$T_{ob}^{-1} T_{ob} = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} [* , l_n] = I_n.$$

上式第 n 列为

$$\begin{cases} cl_n = 0, \\ cAl_n = 0, \\ \vdots \\ cA^{n-2}l_n = 0, \\ cA^{n-1}l_n = 1. \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}
c_o &= c T_o = c [A^{n-1}l_n, A^{n-2}l_n, \dots, l_n] \\
&= [cA^{n-1}l_n, cA^{n-2}l_n, \dots, cl_n] \\
&= [1, 0, 0, \dots, 0], \\
T_o^{-1} T_o &= T_o^{-1} [A^{n-1}l_n, A^{n-2}l_n, \dots, l_n] \\
&= [T_o^{-1} A^{n-1}l_n, T_o^{-1} A^{n-2}l_n, \dots, T_o^{-1} l_n] = I_n,
\end{aligned}$$

或

$$\begin{cases} T_o^{-1} A^{n-1} l_n = [1, 0, 0, 0, \dots, 0]^T = e_1, \\ T_o^{-1} A^{n-2} l_n = [0, 1, 0, 0, \dots, 0]^T = e_2, \\ T_o^{-1} A^{n-3} l_n = [0, 0, 1, 0, \dots, 0]^T = e_3, \\ \vdots \\ T_o^{-1} l_n = [0, 0, 0, 0, \dots, 1]^T = e_n. \end{cases} \quad (3.5.14)$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_o &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_o \\
 &= \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{l}_n, \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{l}_n, \mathbf{A}^{n-3} \mathbf{l}_n, \dots, \mathbf{l}_n] \\
 &= [\mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^n \mathbf{l}_n, \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{l}_n, \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{l}_n, \dots, \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A} \mathbf{l}_n] \\
 &= [\mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^n \mathbf{l}_n, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}].
 \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

式 (3.5.7) 两边左乘 $\mathbf{T}_o^{-1}$, 右乘 $\mathbf{l}_n$, 并利用式 (3.5.14) 得到

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^n \mathbf{l}_n &= -a_1 \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{l}_n - a_2 \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{l}_n - \dots - a_n \mathbf{T}_o^{-1} \mathbf{l}_n \\
 &= -a_1 \mathbf{e}_1 - a_2 \mathbf{e}_2 - \dots - a_n \mathbf{e}_n \\
 &= [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]^T.
 \end{aligned}$$

将上式代入式 (3.5.15) 得证.

传递函数的观测器规范型实现 传递函数

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} + d$$

的观测器规范型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [1, 0, 0, \dots, 0] \mathbf{x}(t) + du(t). \end{cases}$$

观测器规范型的记忆方法: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式的系数的相反数按顺序排在 $\mathbf{A}$ 矩阵的第一列, $\mathbf{A}$ 的右上角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\mathbf{c}$ 是一个单位行向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的行向量), 分子多项式的系数作为控制参数向量 $\mathbf{b}$.

例 3.5.3 将下列传递函数化为观测器规范型实现,

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

解 该系统对应的观测器规范型实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} u, \\ y = [1, 0, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

例 3.5.4 将下列传递函数化为观测器规范型实现,

$$G(s) = \frac{5s^3 + 14s^2 + 20s + 26}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

解 该传递函数分子与分母次数相同, 采用长除法, 把其变为

$$G(s) = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4} + 5.$$

对应的观测器规范型实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} u, \\ y = [1, 0, 0] \mathbf{x} + 5u. \end{cases}$$

3.5.4 能观测性规范型

能观测性规范型 (Observability Canonical Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{ob}(t) = \mathbf{A}_{ob} \mathbf{x}_{ob}(t) + \mathbf{b}_{ob} u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}_{ob} \mathbf{x}_{ob}(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.5.16)$$

其中下标 ob 是英文能观测性 observability 的前两个字母, 意思是能观测性规范型,

$$\mathbf{A}_{ob} := \mathbf{T}_{ob}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{ob} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$\mathbf{b}_{ob} := \mathbf{T}_{ob}^{-1} \mathbf{b} =: \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \mathbf{A}^2 \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{c}_{ob} := \mathbf{c} \mathbf{T}_{ob} = [1, 0, 0, \cdots, 0] \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$

变换矩阵为

$$\mathbf{T}_{ob} := \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c} \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

证明 由于系统 $[A, b, c, d]$ 完全能观测, 故能观测性矩阵满秩, 即

$$\text{rank} \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

所以变换矩阵 T_{ob} 是可逆的. 又

$$T_{ob}^{-1}T_{ob} = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} T_{ob} = \begin{pmatrix} cT_{ob} \\ cAT_{ob} \\ \vdots \\ cA^{n-1}T_{ob} \end{pmatrix} = I_n.$$

把上式展开可得

$$\begin{cases} cT_{ob} = [1, 0, 0, \dots, 0] = e_1^T, \\ cAT_{ob} = [0, 1, 0, \dots, 0] = e_2^T, \\ cA^{n-1}T_{ob} = [0, 0, 1, \dots, 0] = e_3^T, \\ \vdots \\ cA^{n-1}T_{ob} = [0, 0, 0, \dots, 1] = e_n^T. \end{cases} \quad (3.5.17)$$

由此可得

$$\begin{aligned} c_{ob} &= cT_{ob} = [1, 0, 0, \dots, 0], \\ A_{ob} &= T_{ob}^{-1}AT_{ob} = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-2} \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} AT_{ob} = \begin{pmatrix} cAT_{ob} \\ cA^2T_{ob} \\ \vdots \\ cA^{n-1}T_{ob} \\ cA^nT_{ob} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2^T \\ e_3^T \\ \vdots \\ e_n^T \\ cA^nT_{ob} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

式 (3.5.7) 两边左乘 c , 右乘 T_{ob} , 并利用式 (3.5.17) 得到

$$\begin{aligned} cA^nT_{ob} &= -a_1cA^{n-1}T_{ob} - a_2cA^{n-2}T_{ob} - \dots - a_ncT_{ob} \\ &= [-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1]. \end{aligned}$$

将上式代入式 (3.5.18) 得证.

传递函数的能观测性规范型实现 传递函数

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n} + d$$

的能观测性规范型实现为

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} u(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1, 0, 0, \cdots, 0] \mathbf{x}(t) + du(t). \end{aligned} \right.$$

能观测性规范型的记忆方法: 假设传递函数分子分母多项式按降次排列, 分母是首一多项式, 分子次数低于分母, 那么分母多项式系数的相反数按倒序排在 $\mathbf{A}$ 矩阵的最后一行, $\mathbf{A}$ 的右上角是一个 $(n-1)$ 阶单位阵, 其余元为零, $\mathbf{c}$ 是一个单位向量 (第 1 个元为 1, 其余元为零的列向量), 马可夫参数 β_i 作为列向量 $\mathbf{b}$.

注 3.5.2 观测器规范型与能观测性规范型的输出参数向量 $\mathbf{c}$ 都是一个单位行向量, 两个规范型的 $\mathbf{A}$ 矩阵是斜对称的. 观测器规范型要简单, 其控制参数向量是传递函数分子多项式的系数构成的, 它可以从传递函数直接写出, 不像能观测性规范型那样需要计算系统的马可夫参数.

3.5.5 对偶性与规范型

1. 线性系统的对偶原理

设两个线性系统的状态空间模型如下,

$$S_1: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.5.19)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量, $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D}(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 为系统矩阵;

$$S_2: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}_1(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{B}_1(t)\mathbf{v}(t), & \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1(t)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{D}_1(t)\mathbf{v}(t), \end{cases} \quad (3.5.20)$$

$\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为输入向量, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输出向量, $\mathbf{A}_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_1(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ 和 $\mathbf{D}_1(t) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ 为系统矩阵.

我们说系统 S_1 与系统 S_2 对偶, 系指满足下列关系:

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{A}^T(t), \quad \mathbf{B}_1(t) = \mathbf{C}^T(t), \quad \mathbf{C}_1(t) = \mathbf{B}^T(t), \quad \mathbf{D}_1(t) = \mathbf{D}^T(t).$$

系统 S_1 与系统 S_2 对偶, 有时也说成系统 S_1 与系统 S_2 是对偶的, 或系统 S_1 是 S_2 的对偶系统.

系统与其对偶系统是两个不同的系统, 它们有不同的输入输出关系. 系统 S_1 与系统 S_2 的输入维数是不同的, 输出维数也是不同的, 故对偶系统与原系统不是同一个系统. 尽管在状态方程中, 对偶系统有时也使用相同的输入输出和状态变量符号. 例如 S_1 的对偶系统可以写作

$$S_2: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}^T(t)\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{B}^T(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}^T(t)\mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (3.5.21)$$

注: 这里的输入输出和状态变量与 S_1 中是不同的. 对偶性对线性离散时间系统也有类似的结论, 不一一讨论.

对偶性系统的性质:

- (1) 一个系统的对偶系统的对偶系统是它本身.
- (2) 一个系统是能控的, 那么它的对偶系统是能观测的, 因为对偶系统能观测性矩阵等于原系统的能控性矩阵的转置.
- (3) 一个系统是能观测的, 那么它的对偶系统是能控的, 因为对偶系统能控性矩阵等于原系统的能观测性矩阵的转置.
- (4) 控制器规范型与观测器规范型对偶; 能控性规范型与能观测性规范型对偶.

2. 规范型的对偶性

读者可能已经注意到, 前面讨论的 4 种规范型系统参数矩阵存在下列关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{A}_o^T, & \mathbf{b}_c &= \mathbf{c}_o^T, & \mathbf{c}_c &= \mathbf{b}_o^T; \\ \mathbf{A}_{co} &= \mathbf{A}_{ob}^T, & \mathbf{b}_{co} &= \mathbf{c}_{ob}^T, & \mathbf{c}_{co} &= \mathbf{b}_{ob}^T. \end{aligned}$$

这揭示了规范型之间的对偶关系, 即能控性规范型与能观测性规范型对偶, 控制器规范型与观测器规范型对偶. 下面以一个 3 阶系统为例加以说明.

例 3.5.5 设微分方程描述的系统为

$$y^{(3)}(t) + a_1 y^{(2)}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3 y(t) = b_1 u^{(2)}(t) + b_2 \dot{u}(t) + b_3 u(t),$$

写出系统的传递函数和 4 种规范型.

解 对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}.$$

其控制器规范型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [b_1, b_2, b_3] \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{b_1 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_3 s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}} \\
&= b_1 s^{-1} + (b_2 - a_1 b_1) s^{-2} + [b_3 - a_2 b_1 - a_1(b_2 - a_1 b_1)] s^{-3} + \cdots \\
&=: \beta_1 s^{-1} + \beta_2 s^{-2} + \beta_3 s^{-3} + \cdots,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1, \\ \beta_2 = b_2 - a_1 b_1 = b_2 - a_1 \beta_1, \\ \beta_3 = b_3 - a_2 b_1 - a_1(b_2 - a_1 b_1) = b_3 - a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2 \end{cases}$$

求出 b_i 得到

$$\begin{cases} b_1 = \beta_1, \\ b_2 = a_1 \beta_1 + \beta_2, \\ b_3 = a_2 \beta_1 + a_1 \beta_2 + \beta_3. \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

求得

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

对应的能控性规范型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] \mathbf{x}(t) \\ = [b_1, b_2, b_3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-\tau} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

观测器规范型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [1, 0, 0] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

能观测性规范型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} u(t) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [1, 0, 0] \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

关于状态空间规范型的结论.

(1) 控制器规范型、能控性规范型, 不管 $\mathbf{A}$ 矩阵中的自由元如何取值, 系统都是可控的, 即这两种规范型保证系统是可控的, 但不保证系统的能观测性.

(2) 类似地, 观测器规范型、能观测性规范型, 不管 $\mathbf{A}$ 矩阵中的自由元如何取值, 系统都是可观测的, 即这两种规范型保证系统是可观测的, 但不保证系统的能控性.

(3) 后面要讨论的对角标准形、约当标准形既不保证系统是可控的, 又不保证系统是可观测的.

3. 单输入单输出系统

线性时不变单输入单输出连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t) \end{cases}$$

的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{c}^T v(t), & \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ z(t) = \mathbf{b}^T \boldsymbol{\xi}(t) + dv(t). \end{cases}$$

例 3.5.6 写出下列单输入单输出系统的对偶系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [13, 14, 15]\mathbf{x}(t) + 16u(t). \end{cases}$$

解 该系统的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} v(t), \\ z(t) = [10, 11, 12]\boldsymbol{\xi}(t) + 16v(t). \end{cases}$$

4. 多输入多输出系统

线性时不变多输入多输出连续时间系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{v}(t), & \boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}_0, \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{D}^T \mathbf{v}(t). \end{cases}$$

例 3.5.7 写出下列 2 输入 3 输出系统的对偶系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 25 & 26 \\ 27 & 28 \\ 29 & 30 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t). \end{cases}$$

解 该系统的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{pmatrix} 16 & 19 & 22 \\ 17 & 20 & 23 \\ 18 & 21 & 24 \end{pmatrix} \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{pmatrix} 25 & 27 & 29 \\ 26 & 28 & 30 \end{pmatrix} \mathbf{v}(t). \end{cases}$$

注 3.5.3 从这个例子可以看出, 原系统有 2 个输入 3 个输出, 其对偶系统有 3 个输入 2 个输出, 因此对偶系统与原系统不是一个系统.

关于原系统与对偶系统的一些结论.

- (1) 对偶系统的对偶系统是原系统.
- (2) 如果原系统可控, 则对偶系统可观测 (不限于于规范型).
- (3) 如果原系统可观测, 则对偶系统可控 (不限于于规范型).

3.6 状态空间标准形

状态空间规范型在控制理论中有特别重要的地位. 线性变换可以将状态空间模型中的矩阵 $\mathbf{A}$ 对角化或约当化, 因此可以通过非奇异线性变换将状态空间模型化为对角标准形或约当标准形. 我们生活在一个真实的世界里, 状态空间模型的参数一般都是实数. 一个实矩阵的特征值可能是复数, 从而导致对角标准形或约当标准形中出现复数, 这是不希望的, 这也是我们不把标准形叫作规范型的原因. 4 种规范型是唯一的, 但是对角标准形和约当标准形是不唯一的, 鉴于其结构比较特殊, 本节简单加以讨论.

3.6.1 对角标准形实现

1. 对角标准形

考虑线性时不变 SISO 系统的状态空间模型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t), \end{cases} \quad (3.6.1)$$

其中 $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. 如果 $\mathbf{A}$ 是一个对角矩阵, 那么系统 (3.6.1) 就称为 **对角标准形**. 对角标准形只依赖于矩阵 $\mathbf{A}$, 与 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 结构无关.

如果 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个可对角化矩阵 (即存在 n 个独立的特征向量), 那么 $\mathbf{A}$ 能对角化, 系统可以通过相似变换化为对角标准形 (如果 $\mathbf{A}$ 的特征值互不相同, 那么 $\mathbf{A}$ 必可对角化). 线性时不变 SISO 系统 **对角标准形** (Diagonal Standard Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u, \\ y = [c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + du. \end{cases}$$

模型中对角元 λ_i 是系统的特征值, 即 $\mathbf{A}$ 的特征值. 对角化需要计算系统的特征值, 增加了计算复杂性. 实际系统中 $\mathbf{A}$ 一般是实矩阵, 实矩阵也可能包含复数特征值, 这也是我们不把对角标准形和约当标准形作为规范型的缘故.

注 3.6.1 对角标准形和下面要讨论的约当标准形, 既不保证系统能控, 又不保证系统能观测, 所以本书为了加以区别, 称为 **标准形** (Standard Form), 不称 **规范型** (Canonical Form).

下面的定理给出 **MIMO 系统对角标准形** 的结构, 以及一般状态空间模型化为对角标准形的方法 (假设 $\mathbf{A}$ 矩阵可对角化).

定理 3.6.1 对角标准形变换 (Diagonal Standard Form Transformation)

考虑状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.6.2)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$. 假设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 有 n 个相异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 那么就可以通过相似变换化为对角标准形. 换句话说, 对于相似变换 $\bar{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, 如果取变换矩阵 $\mathbf{T}$ 等于 $\mathbf{A}$ 的特征向量构成的矩阵, 那么状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), & \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.6.3)$$

是对角标准形, 其中

$$\bar{\mathbf{A}} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

$$\bar{\mathbf{B}} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times r}, \quad \bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C}\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

证明 设 $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^n$ 是对应于特征值 $s = \lambda_i$ 的非零特征向量. 根据特征向量的定义, 有

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

写成矩阵形式为

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots, \mathbf{p}_n] \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n].$$

取变换矩阵 $T := [p_1, p_2, \dots, p_n]$. 由上式可得

$$AT = T \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

两边左乘 T^{-1} (因为特征向量构成的矩阵是非奇异的), 可知 $T^{-1}AT$ 是对角阵, 故线性变换后的系统 (3.6.3) 是对角标准形.

注 3.6.2 从以上证明可知: 如果传递函数只有单极点, 那么可以化为对角标准形实现.

注 3.6.3 从以上证明可知: 对角标准形是不唯一的, 因为系统的特征向量是不唯一的. 事实上, 如果取 $T_1 = \alpha T = \alpha[p_1, p_2, \dots, p_n]$, $\alpha \neq 0$, 则 $\bar{A}_1 = T_1^{-1}AT_1 = \bar{A}$ 没有变, 但 $\bar{B}_1 = T_1^{-1}B = \frac{1}{\alpha}\bar{B}$ 和 $\bar{C}_1 = CT_1 = \alpha\bar{C}$ 变化了.

注 3.6.4 如果 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 有相同特征值, 但存在 n 个独立的特征向量, 则系统 (3.6.2) 也可以通过相似变换化为对角标准形.

对角化方法十分有用. 它可以简化一些运算, 下面是利用矩阵对角化变换的例子.

例 3.6.1 设 $A = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 计算 A^{100} .

解 计算 A 的特征值, 令

$$\det[sI_2 - A] = \begin{vmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) = 0,$$

所以 $s = \lambda_1 = -2$, $s = \lambda_2 = -3$. 两个特征值不相同, 故 A 可对角化. 计算两个特征向量

$p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ 和 $p_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$. 令 $Ap_1 = \lambda_1 p_1$, 即

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}.$$

分解为两个方程

$$-5p_{11} - 6p_{21} = -2p_{11}, \quad p_{11} = -2p_{21}.$$

只有一个独立方程, 故有无穷多解. 最简单取 $p_{21} = 1$, 有 $p_{11} = -2$, 故

$$p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再令 $Ap_2 = \lambda_2 p_2$, 即

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

分解为两个方程

$$-5p_{12} - 6p_{22} = -3p_{12}, \quad p_{12} = -3p_{22}.$$

取 $p_{22} = 1$, 有 $p_{12} = -3$, 故 $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 构造变换矩阵

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \\ & -3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1}, \\ \mathbf{A}^2 &= (\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1})^2 = (\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1})(\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1}) = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{T}^{-1}, \\ \mathbf{A}^{100} &= (\mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1})^{100} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^{100} \mathbf{T}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \\ & -3 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{100} & \\ & (-3)^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{101} & -3^{101} \\ 2^{100} & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^{101} + 3^{100} & -3 \times 2^{101} + 2 \times 3^{101} \\ 2^{100} - 3^{100} & 3 \times 2^{100} - 2 \times 3^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注: 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 可以使用 MATLAB 命令 eig.

例 3.6.2 化下列线性系统状态方程为对角标准形,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [3, 4] \mathbf{x}(t) + 5u(t). \end{cases}$$

解 上述例子已经把矩阵 $\mathbf{A}$ 对角化, 计算

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{c} \mathbf{T} = [3, 4] \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [-2, -5]. \end{aligned}$$

令 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t)$, 则有对角标准形,

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}u(t) \\ \quad = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -3 & \\ & & \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} 7 \\ & -5 \\ & & \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}(t) + 5u(t) = [-2, -5]\bar{\mathbf{x}}(t) + 5u(t). \end{cases}$$

例 3.6.3 下面是一些对角标准形例子.

(1) SISO 系统对角标准形:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [8, 9, 1976]\mathbf{x}(t) + 1.21u(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2+j & \\ & & -2-j \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [6, 7, 1989]\mathbf{x}(t) + 7.10u(t). \end{cases}$$

(2) 两输入两输出系统对角标准形:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 18 \\ 19 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

2. 传递函数的对角标准形实现 (并联实现)

将传递函数 (阵) 化为状态空间模型称为 **实现** (Realization), 也就是用 4 个参数矩阵 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 实现传递函数 (阵). 并联实现就是把传递函数化为部分有理分式之和, 其框图是并联结构, 故称为 **并联实现**, 参见图 3.6.1. 当传递函数有 n 个相异特征值时, 化为一次部分分式 (一些一次有理分式之和), 从而导出传递函数的对角标准形实现.

设系统的传递函数

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n} + d$$

有 n 个不同极点 $s = \lambda_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 那么 $G(s)$ 可以表示为

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \cdots + b_n}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} + d.$$

化为部分分式之和的形式,

$$G(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} + d, \quad c_i := G(s)(s - \lambda_i) \Big|_{s=\lambda_i}.$$

这个传递函数为一些一次有理式之和 (参见图 3.6.1), 故其实现称为 **传递函数的并联实现**, 由下面推导可知, 拥有相异特征值的传递函数的并联实现是对角标准形.

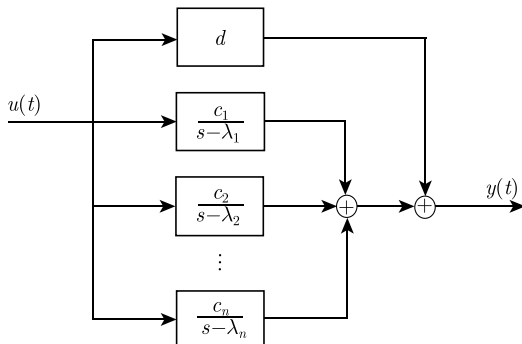


图 3.6.1 传递函数的并联框图

假设 λ_i 互不相同, $c_i \neq 0$, 否则系统将会降阶, 传递函数存在零极点相消. 下面把这个传递函数化为对角标准形. 由输入输出关系 $y = G(s)u$ 可得

$$y = \frac{c_1 u}{s - \lambda_1} + \frac{c_2 u}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n u}{s - \lambda_n} + du.$$

定义 n 个状态变量 $x_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 如下,

$$\begin{cases} x_1 := \frac{u}{s - \lambda_1}, \\ x_2 := \frac{u}{s - \lambda_2}, \\ \vdots \\ x_n := \frac{u}{s - \lambda_n}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s - \lambda_1)x_1 = u, \\ (s - \lambda_2)x_2 = u, \\ \vdots \\ (s - \lambda_n)x_n = u. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 = u, \\ \dot{x}_2 - \lambda_2 x_2 = u, \\ \vdots \\ \dot{x}_n - \lambda_n x_n = u. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + u, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u. \end{cases}$$

由此可以得到下列对角标准形,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + du = [c_1, c_2, \cdots, c_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + du. \end{cases}$$

从以上推导过程可知, 对于 $b_i \neq 0$, 如果另取状态变量为

$$x_1 := \frac{b_1 u}{s - \lambda_1}, \quad x_2 := \frac{b_2 u}{s - \lambda_2}, \quad x_3 := \frac{b_3 u}{s - \lambda_3}, \quad \cdots, \quad x_n := \frac{b_n u}{s - \lambda_n}.$$

那么可得对角标准形:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} u, \\ y = c_1/b_1 x_1 + c_2/b_2 x_2 + \cdots + c_n/b_n x_n + du = [c_1/b_1, c_2/b_2, \cdots, c_n/b_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + du. \end{cases}$$

注 3.6.5 由此说明, 一个传递函数的对角标准形是不唯一的. 但是, 一个传递函数的 4 种规范型: 控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型都是唯一的, 且参数数目最少, SISO 系统有 $2n+1$ 个自由参数, 而对角标准形有 $3n+1$ 个自由参数, 下面的约当标准形的参数数目也大于 $2n+1$.

注 3.6.6 拥有相异极点的传递函数可以展开成一次有理分式的部分分式之和, 即一次有理分式之和, 其实现是并联实现, 即对角标准形实现.

3.6.2 约当标准形实现

1. 约当标准形

如果 $\mathbf{A}$ 矩阵有重特征值, 一般情况下不可对角化, 但可通过相似变换约当化, 化为约当标准形, 约当标准形对矩阵 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的结构也没有要求. SISO 系统 **约当标准形** (Jordan Standard Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} u, \\ y = [c_1, c_2, \cdots, c_k] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} + du, \end{cases} \quad (3.6.4)$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{C}^{n_i}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{C}^{1 \times n_i}$, $d \in \mathbb{R}$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, n_i 是特征值 $s = \lambda_i$ 的重数, 如果 $s = \lambda_i$ 是单特征值, 那么 $\mathbf{J}_i = \lambda_i \in \mathbb{C}$; 一般情况下 $n_i \times n_i$ 约当块 $\mathbf{J}_i$ 的结构如下,

$$\mathbf{J}_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \quad (3.6.5)$$

约当块是对角线上元都相等, 上次对角线上元均为 1 的矩阵.

对角标准形和约当标准形既不保证系统的能控性, 又不保证系统的能观测性, 这也是我们不把对角标准形和约当标准形作为规范型的缘故. SISO 系统约当标准形的参数也大于

$2n+1$. 一个矩阵 $\mathbf{A}$ 不一定可对角化, 但一定能约当化. 因此, 一个系统总能通过相似变换化为约当标准形. 如果传递函数有重极点, 那么就可以化为约当标准形实现. 下面的定理给出 MIMO 系统约当标准形的结构, 以及一般状态空间模型化为约当标准形的方法.

定理 3.6.2 约当标准形变换 (Jordan Standard Form Transformation)

考虑状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.6.6)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$. 假设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的特征值 $s = \lambda_i$ 有 n_i 重, $i = 1, 2, \dots, k$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. 如果不存在 n 个独立的特征向量, 就不可能化为对角标准形. 在这种情况下, 通过相似变换化为约当标准形. 换句话说, 对于相似变换 $\bar{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, 可以通过构造变换矩阵 $\mathbf{T}$, 使得变换后的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), & \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

是约当标准形, 其中

$$\bar{\mathbf{A}} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

$$\bar{\mathbf{B}} := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times r}, \quad \bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C}\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{m \times n},$$

$\mathbf{J}_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ 如式 (3.6.5) 所定义.

证明 设 $\mathbf{p}_{i1} \in \mathbb{R}^n$ 是对应于特征值 $s = \lambda_i$ 的特征向量, 根据特征向量的定义有

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_{i1} = \lambda_i\mathbf{p}_{i1}, \quad (3.6.7)$$

$\mathbf{p}_{ij}$ 按下列方式计算,

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_{i,j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, n_i,$$

或

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{p}_{i,j-1} + \lambda_i\mathbf{p}_{ij}, \quad j = 2, 3, \dots, n_i. \quad (3.6.8)$$

式 (3.6.7)、式 (3.6.8) 可以合并写为

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{in_i}] = [\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{in_i}] \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

或

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{in_i}] = [\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{in_i}]\mathbf{J}_i.$$

令 $T_i = [p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in_i}] \in \mathbb{C}^{n \times n_i}$. 上式可简写为

$$AT_i = T_i J_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

联立写为

$$[AT_1, AT_2, \dots, AT_k] = [T_1 J_1, T_2 J_2, \dots, T_k J_k],$$

或

$$A[T_1, T_2, \dots, T_k] = [T_1, T_2, \dots, T_k] \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_k].$$

构造变换矩阵

$$\begin{aligned} T &= [T_1, T_2, \dots, T_k] \\ &= [p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1n_1}, \dots, p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kn_k}] \in \mathbb{C}^{n \times n}. \end{aligned}$$

则有 $AT = T \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_k]$, 或 $T^{-1}AT = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_k]$. 定理证毕.

例 3.6.4 将下列状态方程变换成约当标准形,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [1, 2, 1] \mathbf{x}(t) + u(t). \end{cases}$$

解 计算 A 的特征值, 令

$$\det |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -2 & 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0,$$

可以求得 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. 计算对应的 3 个特征向量

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}.$$

令 $A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1$, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}.$$

解方程得到一个特征向量

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

再求对应于 $\lambda_2 = 1$ 的另一广义特征向量 $\mathbf{p}_2$. 令 $\lambda_1 \mathbf{p}_2 - \mathbf{A}\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$, 即

$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}.$$

解之得

$$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

最后确定对应于 $\lambda_3 = 2$ 的特征向量 $\mathbf{p}_3$. 令 $\lambda_3 \mathbf{p}_3 = \mathbf{A}\mathbf{p}_3$, 同理可得

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

于是构造变换矩阵

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此有

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &:= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{c}} &= \mathbf{c} \mathbf{T} = [1, 2, 1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = [4, 4, 9]. \end{aligned}$$

所以状态方程的约当标准形为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [4, 4, 9] \bar{\mathbf{x}}(t) + u(t). \end{cases}$$

2. 传递函数的约当标准形实现 (并联实现)

先考虑几个传递函数的约当标准形实现的例子, 然后推广到一般 n 阶系统.

例 3.6.5 假设一个 3 阶系统有 3 个重极点, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{b}{(s - \lambda)^3},$$

写出其状态空间模型.

解 这是一个 3 阶系统, 其输入输出有关系:

$$y = b \underbrace{\frac{1}{s - \lambda} \underbrace{\frac{1}{s - \lambda} \underbrace{u}_{x_3}}_{x_2}}_{x_1},$$

定义状态变量:

$$x_3 := \frac{u}{s - \lambda}, \quad x_2 := \frac{x_3}{s - \lambda}, \quad x_1 := \frac{x_2}{s - \lambda},$$

或

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = \lambda x_3 + u.$$

则有 $y(t) = bx_1$. 对应的 **二对角标准形能控性实现** (约当标准形) 为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = [b, 0, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

例 3.6.6 假设一个 3 阶系统有 3 个重极点, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{(s - \lambda)^3},$$

推导其状态空间模型.

解 将这个传递函数展开成部分分式之和, 得到

$$G(s) = \frac{c_1}{(s - \lambda)^3} + \frac{c_2}{(s - \lambda)^2} + \frac{c_3}{s - \lambda},$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &:= G(s)(s - \lambda)^3 \Big|_{s=\lambda} = b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3, \\ c_2 &:= \frac{d}{ds} [G(s)(s - \lambda)^3] \Big|_{s=\lambda} = 2b_1 \lambda + b_2, \\ c_3 &:= \frac{d^2}{ds^2} [G(s)(s - \lambda)^3] \Big|_{s=\lambda} = 2b_1. \end{aligned}$$

输入输出关系为

$$y = \frac{c_1 u}{(s-\lambda)^3} + \frac{c_2 u}{(s-\lambda)^2} + \frac{c_3 u}{s-\lambda},$$

定义状态变量:

$$\begin{aligned} x_3 &:= \frac{u}{s-\lambda}, \\ x_2 &:= \frac{u}{(s-\lambda)^2} = \frac{x_3}{s-\lambda}, \\ x_1 &:= \frac{u}{(s-\lambda)^3} = \frac{x_2}{s-\lambda}. \end{aligned}$$

或

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = \lambda x_3 + u.$$

则 $y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$. 对应的 二对角标准形能控性实现 (约当标准形) 为

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y &= [c_1, c_2, c_3] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

这里的 $\mathbf{A}$ 矩阵是一个约当块. 如果采用相反的顺序定义状态变量:

$$\begin{aligned} x_1 &:= \frac{u}{s-\lambda}, \\ x_2 &:= \frac{u}{(s-\lambda)^2} = \frac{x_1}{s-\lambda}, \\ x_3 &:= \frac{u}{(s-\lambda)^3} = \frac{x_2}{s-\lambda}. \end{aligned}$$

或

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + u, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_1, \quad \dot{x}_3 = \lambda x_3 + x_2.$$

则 $y(t) = c_1 x_3 + c_2 x_2 + c_3 x_1$. 我们也得到一个 二对角标准形能控性实现:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y &= [c_3, c_2, c_1] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

这里的 $\mathbf{A}$ 矩阵是一个约当块的转置, 也是一个约当块, 不过现在习惯采用上次对角元为 1 的约当块. 就像我们所说的特征向量, 一般是指 右特征向量, 其实还有 左特征向量.

例 3.6.7 把下列 6 阶系统化为约当标准形,

$$G(s) = \frac{c_1}{(s-\lambda_1)^3} + \frac{c_2}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{c_3}{s-\lambda_1} + \frac{c_4}{s-\lambda_4} + \frac{c_5}{s-\lambda_5} + \frac{c_6}{s-\lambda_6},$$

其中 $c_i \neq 0, i = 1, 3, 4, 5, 6$, 否则不是 6 阶系统.

解 由输入输出关系 $y = G(s)u$ 可得

$$y(t) = \frac{c_1 u}{(s-\lambda_1)^3} + \frac{c_2 u}{(s-\lambda_1)^2} + \frac{c_3 u}{s-\lambda_1} + \frac{c_4 u}{s-\lambda_4} + \frac{c_5 u}{s-\lambda_5} + \frac{c_6 u}{s-\lambda_6}.$$

这里分母按降次写, 是为了使状态空间模型 $\mathbf{A}$ 矩阵出现重特征值的约当块. 定义 6 个状态变量 $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 如下,

$$\begin{cases} x_1 := \frac{u}{(s-\lambda_1)^3}, \\ x_2 := \frac{u}{(s-\lambda_1)^2}, \\ x_3 := \frac{u}{s-\lambda_1}, \\ x_4 := \frac{u}{s-\lambda_4}, \\ x_5 := \frac{u}{s-\lambda_5}, \\ x_6 := \frac{u}{s-\lambda_6}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{s-\lambda_1}, \\ x_2 = \frac{x_3}{s-\lambda_1}, \\ x_3 = \frac{u}{s-\lambda_1}, \\ x_4 = \frac{u}{s-\lambda_4}, \\ x_5 = \frac{u}{s-\lambda_5}, \\ x_6 = \frac{u}{s-\lambda_6}. \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} (s-\lambda_1)x_1 = x_2, \\ (s-\lambda_1)x_2 = x_3, \\ (s-\lambda_1)x_3 = u, \\ (s-\lambda_4)x_4 = u, \\ (s-\lambda_5)x_5 = u, \\ (s-\lambda_6)x_6 = u. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 - \lambda_1 x_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 - \lambda_1 x_3 = u, \\ \dot{x}_4 - \lambda_4 x_4 = u, \\ \dot{x}_5 - \lambda_5 x_5 = u, \\ \dot{x}_6 - \lambda_6 x_6 = u. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + u, \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + u, \\ \dot{x}_5 = \lambda_5 x_5 + u, \\ \dot{x}_6 = \lambda_6 x_6 + u. \end{cases}$$

把它写成矩阵形式,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

输出方程为

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5 + c_6 x_6 = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}.$$

3. 一般 n 阶系统传递函数的约当标准形实现

传递函数当然可以化为约当标准形. 具体方法如下. 把传递函数

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}.$$

的分母表示为简单多项式的乘积, 则可以写为下列形式,

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{(s - \lambda_1)^{n_1} (s - \lambda_2)^{n_2} \cdots (s - \lambda_k)^{n_k}}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

化为部分分式之和的形式,

$$G(s) = \sum_{i=1}^k \frac{c_{i1}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} + \frac{c_{i2}}{(s - \lambda_i)^{n_i-1}} + \cdots + \frac{c_{in_i}}{s - \lambda_i} + b_0.$$

对应的约当标准形为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \vdots \\ \dot{x}_{1n_1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{k1} \\ \dot{x}_{k2} \\ \dot{x}_{k3} \\ \vdots \\ \dot{x}_{kn_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}}^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}}^{n_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{1n_1} \\ \vdots \\ x_{k1} \\ x_{k2} \\ x_{k3} \\ \vdots \\ x_{kn_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

$$y = [c_{11}, c_{12}, c_{13}, \cdots, c_{1n_1} | \cdots | c_{k1}, c_{k2}, c_{k3}, \cdots, c_{kn_k}] \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \vdots \\ x_{1n_1} \\ \vdots \\ x_{k1} \\ x_{k2} \\ x_{k3} \\ \vdots \\ x_{kn_k} \end{pmatrix} + b_0 u.$$

关于规范型、标准形的结论.

(1) 一个传递函数的 4 种规范型: 控制器规范型、能控性规范型、观测器规范型、能观测性规范型都是唯一的, 且参数数目最少, 都是 $2n + 1$ 个自由参数 (对于 SISO 系统而言).

(2) 一个系统不一定能化为对角标准形. 当传递函数只有单极点, 或状态空间模型 $\mathbf{A}$ 矩阵可对角化时, 那么传递函数可用对角标准形 **实现** (Realization) (把传递函数变为状态空间模型的过程称为实现), 或可以通过相似变换把状态空间模型化为对角标准形. 对角标准形不是唯一的, 对角标准形有 $3n + 1$ 个自由参数 (对于 SISO 系统而言).

(3) 一个系统总能化为约当标准形. 如果一个传递函数有重极点, 就可用约当标准形 **实现**, 状态空间模型可以通过相似变换化为约当标准形. 约当标准形也不是唯一的, 约当标准形的参数一般也大于 $2n + 1$ 个 (对于 SISO 系统而言).

(4) 对角标准形和约当标准形既不保证系统的能控性, 又不保证系统的能观测性.

(5) 我们生活在一个真实世界, $\mathbf{A}$ 一般是实矩阵, 但其特征值可能是复数, 导致对角标准形和约当标准形中出现复数. 这是我们不采用对角标准形和约当标准形为规范型的原因.

3.6.3 传递函数的串联实现

串联实现就是把传递函数化为部分有理分式之积, 其框图是串联结构, 故称为 **串联实现**, 参见图 3.6.2. 为避免实现中出现复数, 本小节讨论的串联实现假设系统没有复数极点 (尽管该方法也适合有复数极点情形), 下一小节讨论有共轭复数极点的串联实现, 即三对角实现.

1. 二阶系统

考虑一个二阶系统

$$G(s) = \frac{b_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}.$$

这个系统有输入输出关系

$$y(t) = G(s)u(t) = \frac{b_2 u(t)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}.$$

定义状态变量:

$$x_2(t) := \frac{u(t)}{s - \lambda_2}, \quad x_1(t) := \frac{x_2(t)}{s - \lambda_1}.$$

或

$$\dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + u(t).$$

则 $y(t) = b_2 x_1(t)$. 对应的状态空间模型 (二对角实现) 为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [b_2, 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

2. 三阶系统

考虑下列三阶系统

$$G(s) = \frac{b_3}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)}.$$

这个系统有输入输出关系

$$y(t) = b_3 \times \underbrace{\frac{1}{s - \lambda_1} \times \frac{1}{s - \lambda_2}}_{x_2} \times \underbrace{\frac{u}{s - \lambda_3}}_{x_3},$$

x_1

定义状态变量:

$$x_3 := \frac{u}{s - \lambda_3}, \quad x_2 := \frac{x_3}{s - \lambda_2}, \quad x_1 := \frac{x_2}{s - \lambda_1}.$$

或

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + u.$$

则 $y(t) = b_3 x_1$. 对应的状态空间模型 (二对角实现) 为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y(t) = [b_3, 0, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

本书作者把这个状态空间模型称为 **二对角标准形**. 其特征是对角线上元为系统的特征值, 上次对角上元均为 1. 很类似于约当标准形, 但这里不要求特征值相同.

假设一个 3×3 矩阵 $\mathbf{A}$ 有三个相同的特征值 λ , 如果存在 3 个线性无关的特征向量, 就存在变换矩阵 $\mathbf{T}_1$ 将 $\mathbf{A}$ 对角化, 即

$$\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix};$$

如果存在两个线性无关的特征向量, 就存在变换矩阵 $\mathbf{T}_2$ 将 $\mathbf{A}$ 化为

$$\mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix};$$

如果只存在一个线性无关的特征向量, 就存在变换矩阵 $\mathbf{T}_3$ 将 $\mathbf{A}$ 化为约当形:

$$\mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

后两种情况, 变换后的矩阵都是约当块. 这也说明约当标准形不唯一.

基于上述二阶和三阶无零点系统的状态空间模型实现, 本书作者提出二对角标准形. 下面讨论一般 n 阶无零点系统的二对角标准形.

3. n 阶无零点系统

假设 n 阶系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{b_n}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)}. \quad (3.6.9)$$

这个传递函数的串联结构如图 3.6.2 所示.

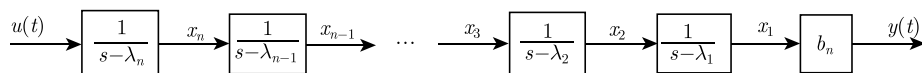


图 3.6.2 传递函数的串联框图 (无零点情形)

这个系统有输入输出关系

$$y = b_n \times \underbrace{\frac{1}{s - \lambda_1} \cdots \frac{1}{s - \lambda_{n-1}}}_{x_1} \underbrace{\frac{u}{s - \lambda_n}}_{x_n},$$

定义状态变量:

$$x_n := \frac{u}{s - \lambda_n}, \quad x_{n-1} := \frac{x_n}{s - \lambda_{n-1}}, \quad \cdots, \quad x_1 := \frac{x_2}{s - \lambda_1}.$$

或

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + x_3, \quad \cdots, \quad \dot{x}_{n-1} = \lambda_{n-1} x_{n-1} + x_n, \quad \dot{x}_n = \lambda_n x_n + u.$$

则输出方程为 $y(t) = b_n x_1$. 对应的二对角标准形能控性实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_n, 0, \cdots, 0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

可以断定, 不管系统的特征值是否相同, 这个实现总是能控的. 这个串联实现的结构如图 3.6.3 所示.

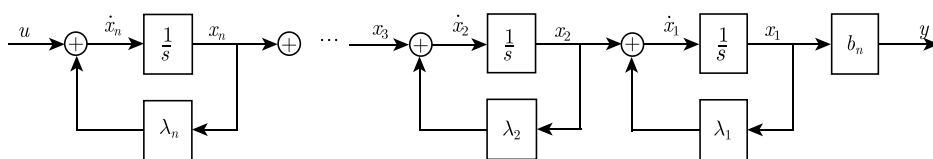


图 3.6.3 串联实现的结构图 (无零点情形)

注 3.6.7 综上所述, 一个无零点系统传递函数能够采用二对角标准形实现, 不管系统是否存在相同特征值.

4. 一般 n 阶系统

假设 n 阶系统的传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_m)(s - \lambda_{m+1}) \cdots (s - \lambda_n)}, \quad m \leq n, b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

因为

$$\frac{s - z_i}{s - \lambda_i} = 1 + \frac{\lambda_i - z_i}{s - \lambda_i} = 1 + \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i}, \quad \alpha_i := \lambda_i - z_i \neq 0.$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{b_0 u(s - z_1)}{s - \lambda_1} \frac{s - z_2}{s - \lambda_2} \cdots \frac{s - z_m}{s - \lambda_m} \frac{1}{s - \lambda_{m+1}} \cdots \frac{1}{s - \lambda_n} \\ &= b_0 \underbrace{u \left(1 + \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} \right)}_{\xi_1} \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} \right)}_{\xi_2} \cdots \underbrace{\left(1 + \frac{\alpha_m}{s - \lambda_m} \right)}_{\xi_m} \underbrace{\frac{1}{s - \lambda_{m+1}} \cdots \frac{1}{s - \lambda_n}}_{x_{m+1}}. \end{aligned}$$

定义中间变量

$$\xi_1 := \left(1 + \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} \right) u, \quad \xi_2 := \left(1 + \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} \right) \xi_1, \quad \cdots, \quad \xi_m := \left(1 + \frac{\alpha_m}{s - \lambda_m} \right) \xi_{m-1},$$

定义状态变量

$$\begin{aligned} x_1 &:= \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} u, \quad x_2 := \frac{\alpha_2}{s - \lambda_2} \xi_1, \quad \cdots, \quad x_m := \frac{\alpha_m}{s - \lambda_m} \xi_{m-1}, \\ x_{m+1} &:= \frac{1}{s - \lambda_{m+1}} \xi_m, \quad x_{m+2} := \frac{1}{s - \lambda_{m+2}} x_{m+1}, \quad \cdots, \quad x_n := \frac{1}{s - \lambda_n} x_{n-1}. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + u, \\ \xi_2 &= \xi_1 + x_2 = x_1 + x_2 + u, \\ \xi_3 &= \xi_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + u, \\ &\vdots \\ \xi_m &= \xi_{m-1} + x_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m + u, \\ \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \alpha_1 u, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \alpha_2 \xi_1 = \alpha_2 x_1 + \lambda_2 x_2 + \alpha_2 u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3 + \alpha_3 \xi_2 = \alpha_3 x_1 + \alpha_3 x_2 + \lambda_3 x_3 + \alpha_3 u, \\
&\vdots \\
\dot{x}_m &= \lambda_m x_m + \alpha_m \xi_{m-1} = \alpha_m x_1 + \alpha_m x_2 + \cdots + \alpha_m x_{m-1} + \lambda_m x_m + \alpha_m u, \\
\dot{x}_{m+1} &= \lambda_{m+1} x_{m+1} + \xi_m = x_1 + x_2 + \cdots + x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} + u, \\
\dot{x}_{m+2} &= \lambda_{m+2} x_{m+2} + x_{m+1}, \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \lambda_n x_n + x_{n-1}.
\end{aligned}$$

对应的串联实现为

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \\ \dot{x}_{m+1} \\ \dot{x}_{m+2} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & \alpha_3 & \alpha_3 & \lambda_3 & & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & & \\ \alpha_m & \alpha_m & \cdots & \alpha_m & \lambda_m & & & \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \lambda_{m+1} & & \\ & & & & & 1 & \lambda_{m+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & 1 & \lambda_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

$$y(t) = [0, 0, \cdots, 0, b_0] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

可以判断, 不管系统的特征值是否相同, 这个实现总是能控的.

3.6.4 三对角标准形

实系统的复特征值以共轭复数形式出现, 为避免在对角标准形和约当标准形中出现复数, 可采用三对角形实现. SISO 系统 **三对角标准形** (Tridiagonal Standard Form) 结构如下,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & & \\ & \mathbf{R}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{R}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} u, \\ y = [c_1, c_2, \cdots, c_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + du, \end{cases} \quad (3.6.10)$$

对于实特征值 $s = \sigma_i$ 时, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}$, 矩阵 $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{b}_i$ 和 $\mathbf{c}_i$ 退化为标量 $R_i = \sigma_i \in \mathbb{R}$, $b_i = 1$ 和 $c_i \in \mathbb{R}$; 对于共轭特征值 $s = \sigma_i \pm j\omega_i$ 时, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$, 矩阵 $\mathbf{R}_i$ 、 $\mathbf{b}_i$ 和 $\mathbf{c}_i$ 有结构

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}.$$

与对角标准形和约当标准形不同, 实系统的三对角标准形的参数是实数.

如何将一个存在共轭复特征值的状态空间模型化为三对角标准形, 给出构造变换矩阵的方法是一个 **开放问题**, 值得读者研究. 我们将其总结为如下定理.

定理 3.6.3 三对角标准形变换 (Tridiagonal Standard Form Transformation)

考虑 MIMO 状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.6.11)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$. 假设矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的实特征值 $s = \lambda_i$ 有 n_i 重, $i = 1, 2, \dots, p$, 共轭特征值 $s = \sigma_i \pm j\omega_i$ 各不相同, $i = p+1, p+2, \dots, p+q$, $q := (n - n_1 - n_2 - \dots - n_p)/2$, 为了避免对角标准形和约当标准形中出现复数, 可以通过构造变换矩阵 $\mathbf{T}$, 使得相似变换 $\bar{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 将状态空间模型 (3.6.11) 变换为 **三对角标准形**:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), & \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &:= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \\ & \mathbf{S} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \bar{\mathbf{B}} &:= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C}\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \\ \mathbf{J} &:= \text{diag}[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_p] \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+\dots+n_p}, \\ \mathbf{S} &:= \text{diag}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_q] \in \mathbb{R}^{(2q) \times (2q)}, \\ \mathbf{R}_i &:= \begin{pmatrix} \sigma_i & \omega_i \\ -\omega_i & \sigma_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

$\mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ 如式 (3.6.5) 所定义.

这个定理可以推广到共轭特征值 $s = \sigma_i \pm j\omega_i$ 有 l_i 重的情况, $n_1 + n_2 + \dots + n_p + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_q) = n$. 在这种情况下,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \\ & \mathbf{S} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{S} &= \text{diag}[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_q] \in \mathbb{R}^{(2l_1+2l_2+\dots+2l_q) \times (2l_1+2l_2+\dots+2l_q)}, \\ \mathbf{S}_i &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{R} & & \\ & \mathbf{R}_i & \mathbf{R} & \\ & & \mathbf{R}_i & \ddots \\ & & & \mathbf{R}_i & \mathbf{R} \\ & & & & \mathbf{R}_i & \mathbf{R} \\ & & & & & \mathbf{R}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2l_i) \times (2l_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

这里, 我们称 $\mathbf{S}_i$ 为三角块, 类似于约当块.

3.6.5 传递函数的三对角标准形实现 (串联实现)

我们都是在实数域或实数空间上讨论控制系统的有关特性, 也就是说所考虑传递函数的分子分母多项式的系数都是实数. 如果一个传递函数有复数极点, 那么其对角标准形或约当标准形实现中有复数, 这是不希望的. 这也是对角标准形和约当标准形的欠缺之处. 三对角标准形可以避免状态空间实现存在复数的问题. 先考虑下列二阶复数极点传递函数 (注: 实系数传递函数的复数极点都是以共轭形式存在), 然后再推广到一般情形.

1. 二阶系统复数极点传递函数的三对角标准形实现

实系数传递函数的复数极点都是以共轭形式存在. 设二阶系统复数极点传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_2}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \omega > 0, b_1 \in \mathbb{R}, b_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.6.12)$$

其控制器规范型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2\sigma & -(\sigma^2 + \omega^2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_1, b_2] \mathbf{x}. \end{cases}$$

另两种实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega^2 \\ -1 & \sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(\frac{b_1 \sigma + b_2}{\omega^2}, b_1 \right) \mathbf{x} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & 100\omega^2 \\ -0.01 & \sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(\frac{b_1 \sigma + b_2}{100\omega^2}, b_1 \right) \mathbf{x}. \end{cases}$$

一种参数平衡 三对角标准形 实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(\frac{b_1 \sigma + b_2}{\omega}, b_1 \right) \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.6.13)$$

因为这种平衡实现状态空间模型的 $\mathbf{A}$ 矩阵参数大小比较均衡, 容易实现, 我们把它作为复极点传递函数的三对角标准形. 传递函数的平衡实现有利于减小实现状态反馈的代价.

不难得到传递函数

$$G(s) = \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \omega > 0 \quad (3.6.14)$$

的三对角标准形实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = (0, 1) \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.6.15)$$

传递函数

$$G(s) = \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \omega > 0 \quad (3.6.16)$$

的三对角标准形实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = [1, 0] \mathbf{x}. \end{cases} \quad (3.6.17)$$

例 3.6.8 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{9s^2 + 27s + 58}{s^3 + 5s^2 + 17s + 13}.$$

解 这个例子可以使用 **MATLAB 函数** Residue 展开成部分分式, 方法 (程序) 如下.

```

1 >> format short
2 >> b=[0, 9, 27, 58]
3
4 b =
5      0      9      27      58
6
7 >> a=[1, 5, 17, 13]
8
9 a =
10      1      5      17      13
11
12 >> format rat
13 >> [r, p, k]=residue(b,a)
14
15 r =
16      5/2      +      2/3 i
17      5/2      -      2/3 i
18      4
19
20 p =
21     -2      +      3 i

```

```

22      -2      -      3i
23      -1
24
25 k =
26      []

```

其中 $b=[0, 9, 27, 58]$ 为分子多项式系数, $a=[1, 5, 17, 13]$ 为分母多项式系数, $[r, p, k]=\text{residue}(b, a)$ 产生部分分式中的参数. 使用 `help residue` 查一下 `residue` 的用法, 不难写出 $G(s)$ 的部分分式:

$$G(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{\frac{5}{2} + \frac{2}{3}j}{s+2-3j} + \frac{\frac{5}{2} - \frac{2}{3}j}{s+2+3j}.$$

其对角标准形实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+3j & 0 \\ 0 & 0 & -2-3j \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(4, \frac{5}{2} + \frac{2}{3}j, \frac{5}{2} - \frac{2}{3}j \right) \mathbf{x}. \end{cases}$$

这个对角标准形状态空间模型参数有复数, 不是我们希望的. 把 $G(s)$ 部分分式的后两项合并得到

$$G(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{5s+6}{(s+2)^2+3^2}.$$

其三对角标准形实现为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(4, -\frac{4}{3}, 5 \right) \mathbf{x}. \end{cases}$$

2. 两个子系统串联的状态空间模型

两个子系统串联构成的串联组合系统, 第 2 个子系统 S_2 输出 $\mathbf{y}_2(t)$ 为第 1 个子系统 S_1 的输入, 如图 3.6.4 所示, (我们没有按顺序排列两个子系统的目的是为了使组合系统状态空间模型的 $\mathbf{A}$ 矩阵是一个上三角阵, 与约当块是上三角阵统一), 其中 $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 是第 i 个子系统 S_i 的 (n_i 维) 状态变量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $\mathbf{y}_2(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ 分别为第 2 个子系统 S_2 的输入向量和输出向量, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为组合系统的输出向量, $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ 和 $\mathbf{C}_i$ 均为适当维数常数矩阵.

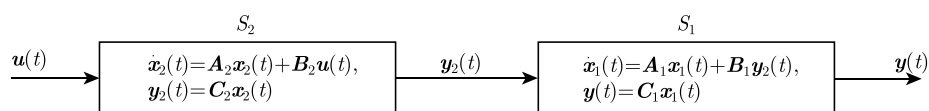


图 3.6.4 串联组合系统

参见图 3.6.4, 把第 2 个子系统输出 $y_2(t) = C_2 x_2(t)$ 代入第 1 个子系统 S_1 的状态中可得

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 y_2(t) \\ &= A_1 x_1(t) + B_1 C_2 x_2(t).\end{aligned}$$

联立上式, S_2 的状态方程和 S_1 的输出方程, 可得 串联组合系统的状态空间模型,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [C_1, 0] \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.6.18)$$

串联组合系统的状态向量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是由两个子系统的状态向量构成的, 即

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

仔细观察串联组合系统的状态空间模型 (3.6.18), 对于子系统输出方程中不直接含输入项的情形 (即 $D_1 = 0$ 和 $D_2 = 0$), 可以得出以下结论.

串联组合系统的输出 C 矩阵是第 1 个子系统输出参数矩阵 C_1 加上一些零元构成的; 串联组合系统的输入 B 矩阵是一些零元加上第 2 个子系统输入参数矩阵 B_2 构成的; 串联组合系统的 A 矩阵是一个块上三角矩阵, 对角上块矩阵等于两个子系统的矩阵 A_1 和 A_2 , A 矩阵 (1, 2) 块等于第一个子系统输入参数矩阵 B_1 与第 2 个子系统输出参数矩阵 C_2 之积.

借助于串联组合系统的状态空间模型, 可以研究有重复数极点传递函数的三对角标准形实现, 留给读者讨论.

3. 四阶系统重复数极点传递函数的三对角标准形实现

考虑下列有重复数极点传递函数,

$$G(s) = \frac{b'_1 s + b'_2}{[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad \omega > 0, \quad b'_1 \in \mathbb{R}, \quad b'_2 \in \mathbb{R}.$$

把 $G(s)$ 写成下列形式

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_2}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} =: G_1(s) G_2(s), \quad b_1 := b'_1 / \omega, \quad b_2 := b'_2 / \omega,$$

其中

$$G_1(s) := \frac{b_1 s + b_2}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}, \quad G_2(s) := \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}.$$

令

$$Y_2(s) = G_2(s) U(s) = \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} U(s),$$

$$Y(s) = G_1(s)Y_2(s) = \frac{b_1s + b_2}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} Y_2(s).$$

因此, 这个系统可以看作两个子系统的串联. 第 2 个子系统 S_2 的输入为 $u(t)$, 输出为 $y_2(t)$; 第 1 个子系统 S_1 的输入为 $y_2(t)$, 输出为 $y(t)$, 参见图 3.6.5.

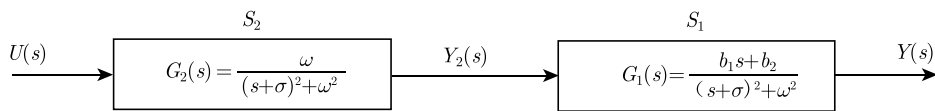


图 3.6.5 串联组合系统

参见式 (3.6.14)、式 (3.6.15), 可以写出第 2 个子系统的三对角标准形实现为

$$S_2 : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y_2 = [1, 0] \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.6.19)$$

参见式 (3.6.12)、式 (3.6.13), 可以写出第 1 个子系统的三对角标准形实现为

$$S_1 : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_2, \\ y = \left(\frac{b_2 - b_1\sigma}{\omega}, b_1 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.6.20)$$

参照串联组合系统状态空间模型 (3.6.18), 可以得到三对角标准形实现为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & -\sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = \left(\frac{b_2 - b_1\sigma}{\omega}, b_1, 0, 0 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (3.6.21)$$

4. $2k$ 阶系统重复数极点传递函数的三对角标准形实现

可以将上述方法推广用于研究下列多重数极点传递函数的三对角标准形

$$G(s) = \frac{b'_1s + b'_2}{[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^k}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \omega > 0, b'_1 \in \mathbb{R}, b'_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

把 $G(s)$ 写成下列形式

$$G(s) = \frac{b_1s + b_2}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \cdots \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

$$=: G_1(s)G_2(s)\cdots G_2(s), \quad b_1 := b'_1/\omega^{k-1}, \quad b_2 := b'_2/\omega^{k-1}.$$

依次运用两两子系统串联即可得到其三对角形实现.

3.6.6 利用 MATLAB 函数进行模型转换

利用 MATLAB 函数可进行系统模型之间的相互转换. MATLAB 提供了很多命令, 使得模型间的变换十分简单 (但不一定是规范型或标准形). 例如, 函数 `tf2ss` 把传递函数变换为状态空间模型, `c2d` 把连续时间模型变换为离散时间模型, `ss2tf` 把状态空间模型转化为传递函数, `d2c` 把离散时间模型转化为连续时间模型. 还设置了传递函数模型 `tf`, 状态空间模型 `ss` 等函数. 这些命令使用起来特别方便, 其用法可借助于 MATLAB 的 `help` 命令查询, 例如 `help tf` 可查函数 `tf` 的用法. 假设要产生传递函数

$$Gs = \frac{4s^2 + 5s + 6}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4},$$

可使用下面命令:

```
1 >> Gs=tf([0,4,5,6],[1,2,3,4])
2
3 Transfer function:
4      4 s^2 + 5 s + 6
5 -----
6      s^3 + 2 s^2 + 3 s + 4
```

将上述传递函数变换为状态空间模型的命令为 `ss1=ss(Gs)`, 运行如下,

```
1 >> ss1=ss(Gs)
2 a =
3      x1      x2      x3
4      x1      -2   -0.75  -0.5
5      x2       4       0       0
6      x3       0       2       0
7
8 b =
9      u1
10     x1    2
11     x2    0
12     x3    0
13
14 c =
15      x1      x2      x3
16     y1      2   0.625  0.375
17
18 d =
19      u1
20     y1    0
21
22 Continuous-time model.
```

这个状态空间模型的数学表达式为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -0.75 & -0.50 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [2, 0.625, 0.375] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 0u. \end{cases}$$

下面是产生分子分母同次数的传递函数, 以及转化传递函数为状态空间模型的命令:

```

1  >> Gs2=tf([4,5,6,7],[1,2,3,4])
2
3  Transfer function:
4  4 s^3 + 5 s^2 + 6 s + 7
5  -----
6  s^3 + 2 s^2 + 3 s + 4
7
8  >> ss2=ss(Gs2)
9
10 a =
11      x1      x2      x3
12  x1      -2   -0.75   -0.5
13  x2       4     0     0
14  x3       0     2     0
15
16 b =
17      u1
18  x1     2
19  x2     0
20  x3     0
21
22 c =
23      x1      x2      x3
24  y1     -1.5   -0.75  -0.5625
25
26 d =
27      u1
28  y1     4
29
30 Continuous-time model.
```

对应的传递函数为

$$G(s) = \frac{4s^3 + 5s^2 + 6s + 7}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4},$$

状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -0.75 & -0.50 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [-1.5, -0.75, -0.5625] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 4u. \end{cases}$$

此外, 产生采样周期为 2 的离散时间传递函数命令如下,

```
1 >> Gz=tf([0,4,5,6],[1,2,3,4],2)
2
3 Transfer function:
4      4 z^2 + 5 z + 6
5  -----
6      z^3 + 2 z^2 + 3 z + 4
7
8 Sampling time: 2
```

当然, 这些命令可直接写到 m 文件中, 就可在 MATLAB 环境下运行.

3.7 多变量系统传递矩阵的计算

描述线性时不变 SISO 系统输入输出映射关系的一种方式传递函数. 多变量系统的输入输出关系可用状态空间模型描述, 线性时不变多变量系统可以用传递函数矩阵描述. 传递函数矩阵有时简称为 **传递函数阵** 或 **传递矩阵** (Transfer Matrix).

多变量系统即多输入多输出系统, 其示意图如图 3.7.1 所示. 多变量系统有多个输入, 构成一个输入向量 $\mathbf{u}(t) := [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r$ (r 个输入), 多个输出构成一个输出向量 $\mathbf{y}(t) := [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ (m 个输出).

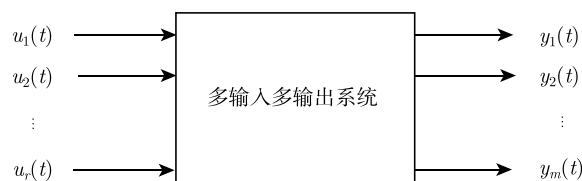


图 3.7.1 多输入多输出系统

线性时不变多变量系统的输入输出关系可以表达为

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \quad (3.7.1)$$

或

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{pmatrix}, \quad (3.7.2)$$

其中 $\mathbf{Y}(s) := \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix} = \mathcal{L}[\mathbf{y}(t)] \in \mathbb{R}^m$ 为输出向量 $\mathbf{y}(t)$ 的拉氏变换, $\mathbf{U}(s) := \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_r(s) \end{pmatrix} = \mathcal{L}[\mathbf{u}(t)] \in \mathbb{R}^r$ 为输入向量 $\mathbf{u}(t)$ 的拉氏变换, $\mathbf{G}(s)$ 为系统的传递函数矩阵:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times r},$$

$G_{ij}(s)$ 是第 j 个输入 $u_j(t)$ 到第 i 个输出 $y_i(t)$ 的传递函数. 式 (3.7.2) 可以分解为 m 个多输入单输出 (子) 系统, 第 i 个子系统为

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \cdots + G_{ir}(s)U_r(s) \\ &= \sum_{j=1}^r G_{ij}(s)U_j(s), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

两输入两输出系统结构图如图 3.7.2 所示.

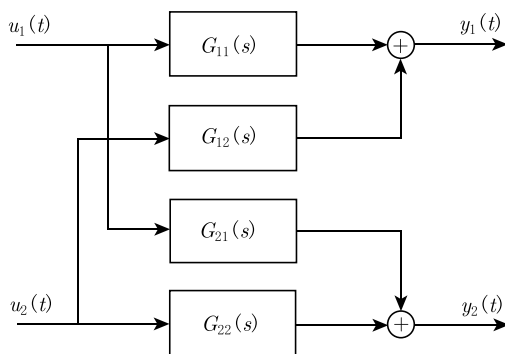


图 3.7.2 两输入两输出系统

3.7.1 多变量系统误差传递函数矩阵

设多变量反馈系统如图 3.7.3 所示 (负反馈), 其中 $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 为前向通道的传递矩阵, $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ 为反馈通道的传递矩阵, 下面推导从输入 $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到输出 $\mathbf{Y}(s) \in \mathbb{R}^m$ 的闭环系统传递矩阵. 求闭环传递矩阵有两种方法, 下面分别介绍.

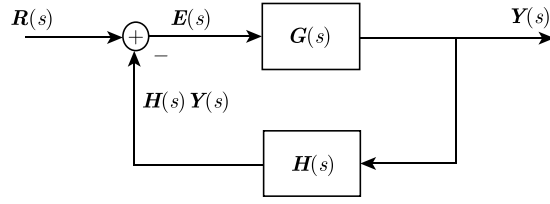


图 3.7.3 多变量反馈系统

由图 3.7.3 可知, 误差信号为

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{R}(s) - \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s).$$

将 $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{E}(s)$ 代入上式可得

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{R}(s) - \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)\mathbf{E}(s).$$

把右边第 2 项移到左边可得

$$[\mathbf{I}_r + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]\mathbf{E}(s) = \mathbf{R}(s).$$

求解得到

$$\mathbf{E}(s) = [\mathbf{I}_r + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1}\mathbf{R}(s). \quad (3.7.4)$$

由式 (3.7.4) 可得从输入 $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到误差信号 $\mathbf{E}(s) \in \mathbb{R}^r$ 的 误差传递函数矩阵 (Error Transfer Function Matrix) 为

$$\mathbf{G}_e(s) = [\mathbf{I}_r + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}. \quad (3.7.5)$$

3.7.2 多变量系统闭环传递函数矩阵

使用式 (3.7.4), 我们有

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I}_r + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1}\mathbf{R}(s).$$

故从输入 $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到输出 $\mathbf{Y}(s) \in \mathbb{R}^m$ 的 闭环系统传递矩阵 为

$$\mathbf{G}_b(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I}_r + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times r}. \quad (3.7.6)$$

下面给出传递矩阵的另一个表达式. 由图 3.7.3 可知,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{R}(s) - \mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s)],$$

或

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s) - \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)\mathbf{Y}(s).$$

把右边第 2 项移到左边可得

$$[\mathbf{I}_m + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s).$$

求解得到

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{I}_m + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s)\mathbf{R}(s). \quad (3.7.7)$$

故从输入 $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^r$ 到输出 $\mathbf{Y}(s) \in \mathbb{R}^m$ 的 闭环传递函数矩阵 (Closed-Loop Transfer Function Matrix) 为

$$\mathbf{G}_b(s) = [\mathbf{I}_m + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times r}. \quad (3.7.8)$$

尽管式 (3.7.6) 与式 (3.7.8) 两个闭环传递矩阵的形式不同, 但可以证明它们是相等的 (读者可证明之), 即

$$\mathbf{G}(s)[\mathbf{I}_r + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} = [\mathbf{I}_m + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s).$$

3.7.3 求闭环传递矩阵的例子

例 3.7.1 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵.

解 这是一个 $r = 2$ 输入、 $m = 2$ 输出系统. 先采用第 1 种方法, 计算

$$\mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{(s+1)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

从输入 $\mathbf{R}(s)$ 到误差信号 $\mathbf{E}(s)$ 的 误差传递矩阵 为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e(s) &= [\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{(s+1)^2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{s(s+1)^3}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{s+1} \\ -\frac{2}{(s+1)^2} & \frac{s-1}{s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} s(s+1)^3 & s(s+1)^2 \\ -2s(s+1) & (s-1)(s+1)^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

按照式 (3.7.6) 可得闭环传递矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_b(s) &= \mathbf{G}(s)[\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} s(s+1)^3 & s(s+1)^2 \\ -2s(s+1) & (s-1)(s+1)^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} s^3 + 3s^2 + s + 1 & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & 2s(s+1) \end{pmatrix}.$$

再采用第2种方法, 计算

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ -\frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{I}_2 + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ -\frac{2}{s+1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{s(s+1)^3}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{s-1}{s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} s(s+1)^3 & -s(s+1) \\ 2s(s+1)^2 & (s-1)(s+1)^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

按照式 (3.7.8) 可得闭环传递矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_b(s) &= [\mathbf{I}_2 + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s) \\ &= \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} s(s+1)^3 & -s(s+1) \\ 2s(s+1)^2 & (s-1)(s+1)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s^4 + 2s^3 - 1} \begin{pmatrix} s^3 + 3s^2 + s + 1 & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & 2s(s+1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这个例子验证了两种方法求得的传递函数矩阵是相等的.

例 3.7.2 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+1} \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵. 这个反馈多变量系统框图如图 3.7.4 所示.

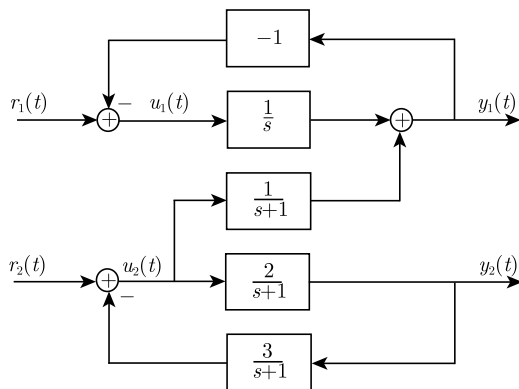


图 3.7.4 反馈多变量系统框图

解 这是一个 $r = 2$ 输入、 $m = 2$ 输出系统. 先采用第 1 种方法, 计算

$$\mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{6}{(s+1)^2} \end{pmatrix},$$

从输入 $\mathbf{R}(s)$ 到误差信号 $\mathbf{E}(s)$ 的误差传递矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_e(s) &= [\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & -\frac{1}{s+1} \\ 0 & 1 + \frac{6}{(s+1)^2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{s(s+1)^2}{(s-1)(s^2+2s+7)} \begin{pmatrix} \frac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{s-1}{s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

按照式 (3.7.6) 可得闭环传递矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_b(s) &= \mathbf{G}(s)[\mathbf{I}_2 + \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

再采用第 2 种方法, 计算

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s} & \frac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{6}{(s+1)^2} \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{I}_2 + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & \frac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & 1 + \frac{6}{(s+1)^2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{s(s+1)^2}{(s-1)(s^2+2s+7)} \begin{pmatrix} \frac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} & -\frac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s-1}{s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s}{s-1} & -\frac{3s}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

按照式 (3.7.8) 可得闭环传递矩阵:

$$\mathbf{G}_b(s) = [\mathbf{I}_2 + \mathbf{G}(s)\mathbf{H}(s)]^{-1}\mathbf{G}(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{s}{s-1} & -\frac{3s}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

这个例子也验证了两种方法求得的传递函数矩阵是相等的.

也可以根据图 3.7.4 中变量之间的关系, 列写方程, 导出输入输出间的关系, 从而获得系统的闭环传递矩阵. 由图 3.7.4, 可得控制输入 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 参考输入 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$, 以及系统输出 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 之间的关系:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \frac{1}{s}u_1(t) + \frac{1}{s+1}u_2(t), & y_2(t) &= \frac{2}{s+1}u_2(t), \\
u_1(t) &= r_1(t) + y_1(t), & u_2(t) &= r_2(t) - \frac{3}{s+1}y_2(t).
\end{aligned}$$

消除 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 可得参考输入 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$ 到系统输出 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 之间的关系

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \frac{1}{s}[r_1(t) + y_1(t)] + \frac{1}{s+1}[r_2(t) - \frac{3}{s+1}y_2(t)], \\
y_2(t) &= \frac{2}{s+1}[r_2(t) - \frac{3}{s+1}y_2(t)].
\end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned}
\frac{s-1}{s}y_1(t) + \frac{3}{(s+1)^2}y_2(t) &= \frac{1}{s}r_1(t) + \frac{1}{s+1}r_2(t), \\
\frac{s^2+2s+7}{(s+1)^2}y_2(t) &= \frac{2}{s+1}r_2(t).
\end{aligned}$$

它们写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & \frac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix}.$$

求解得到

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s} & \frac{3}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s^2+2s+7}{(s+1)^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{s}{s-1} & -\frac{3s}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(s) \\ r_2(s) \end{pmatrix},$$

所以系统的闭环传递函数为

$$\mathbf{G}_b(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{s(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+7)} \\ 0 & \frac{2(s+1)}{s^2+2s+7} \end{pmatrix}.$$

它与上面的结果是一样的.

3.8 思考题

1. 求下列系统的传递函数,

$$(1) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -2\sigma & -\sigma^2 - \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = [b_1, b_2] \mathbf{x}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega^2 \\ -1 & -\sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(\frac{-b_1\sigma + b_2}{\omega^2}, b_1 \right) \mathbf{x}. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\sigma & 100\omega^2 \\ -0.01 & -\sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(\frac{-b_1\sigma + b_2}{100\omega^2}, b_1 \right) \mathbf{x}. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -\sigma & \omega \\ -\omega & -\sigma \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = \left(\frac{-b_1\sigma + b_2}{\omega}, b_1 \right) \mathbf{x}. \end{cases}$$

这个题说明一个系统的传递函数是唯一的, 但状态空间模型是不唯一的.

2. 求下列状态空间系统的特征多项式、传递函数,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [b_1, b_2, b_3] \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

3. 求下列友矩阵的特征多项式,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{A}_{co} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{A}_o &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathbf{A}_{ob} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

4. 写出下列系统传递函数的 4 种规范型,

$$(1) G(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}, \quad (2) G(s) = \frac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

5. 写出下列单输入单输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [7, 1998] \mathbf{x}(t) + 7.17u(t). \end{cases}$$

6. 写出下列单输入单输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = [13, 14, 1967] \mathbf{x}(t) + 10.15u(t). \end{cases}$$

7. 写出下列 2 输入单输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), \\ y(t) = [16, 17, 18] \mathbf{x}(t) + [1963, 3.09] \mathbf{u}(t). \end{cases}$$

8. 写出下列单输入 2 输出系统的对偶系统,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 1931 \\ 16 & 17 & 2013 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 8.17 \\ 3.26 \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

9. 求下列系统的传递函数矩阵, 以及对偶系统的传递函数矩阵,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 7 & 1922 \\ 9 & 2015 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 3.22 \\ 5.26 \end{pmatrix} u(t). \end{cases}$$

10. 写出下列系统传递函数的对角标准形,

$$(1) G_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad (2) G_2(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

11. 写出下列系统传递函数的约当标准形,

$$(1) G(s) = \frac{5s^2 + 13s + 9}{(s^2 + 2s + 1)(s+2)},$$

$$(2) G(s) = \frac{3s^2 + 8s + 6}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1},$$

$$(3) G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}.$$

12. 举例把状态空间模型化为规范型.

13. 举例把状态空间模型化为对角标准形或约当标准形.

14. 举例求状态空间规范型和标准形的传递函数.

15. 考虑一个两输入两输出多变量系统, 其前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{3}{s+2} & \frac{4}{s+3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵 (负反馈).

16. 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵.

17. 设一个多变量系统的前向通道和反馈通道传递函数矩阵分别为

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s-1} \\ \frac{3}{s-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix},$$

求系统的闭环传递函数矩阵.

18. 将下列离散状态空间模型化为 4 种规范型,

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k), \\ y(k) = [1, 0] \mathbf{x}(k). \end{cases}$$

19. 设离散系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} u(k), \\ y(k) = [7, 8] \mathbf{x}(k), \end{cases}$$

求系统的传递算子, 把该系统化为差分方程模型.

20. 计算下列斜对角矩阵的行列式,

$$\bar{\mathbf{A}} := \text{adiag}[a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ a_n & & \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

21. 计算下列矩阵的行列式,

$$(1) \mathbf{A} = [x_i y_j] = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n},$$

$$(2) \mathbf{A} = [x_i + y_j] = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \cdots & x_1 + y_n \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & \cdots & x_2 + y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n + y_1 & x_n + y_2 & \cdots & x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n},$$

$$(3) \mathbf{A} = \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n + y_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times n}.$$

22. 计算下列矩阵的特征多项式,

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}.$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}.$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

即矩阵的四周元为 1, 内部元都为零.

23. 设 $\lambda_{\max}[\mathbf{X}]$ 表示 $\mathbf{X}$ 的最大特征值, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是列满秩或行满秩长方阵, 证明:

$$(1) \lambda_{\max}[\mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T] = 1.$$

$$(2) \lambda_{\max}[\mathbf{A}^T(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}] = 1.$$

$$(3) \lambda_{\max}[\mathbf{A} \mathbf{A}^T] = \lambda_{\max}[\mathbf{A}^T \mathbf{A}].$$

24. 设 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵, 且

$$\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n,$$

证明 $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ 的伴随矩阵为

$$\begin{aligned} \text{adj}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= (s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \cdots + a_{n-2} s + a_{n-1}) \mathbf{I} \\ &\quad + (s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \cdots + a_{n-3} s + a_{n-2}) \mathbf{A} + \cdots + (s + a_1) \mathbf{A}^{n-2} + \mathbf{A}^{n-1}; \end{aligned}$$

进一步说明存在严格真有理函数 $\alpha_i(s)$ 使得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \alpha_0(s) \mathbf{I} + \alpha_1(s) \mathbf{A} + \alpha_2(s) \mathbf{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(s) \mathbf{A}^{n-1}.$$

这说明存在解析函数 $\beta_i(t)$ 使得下式成立,

$$e^{\mathbf{A}t} = \beta_0(t) \mathbf{I} + \beta_1(t) \mathbf{A} + \beta_2(t) \mathbf{A}^2 + \cdots + \beta_{n-1}(t) \mathbf{A}^{n-1}.$$