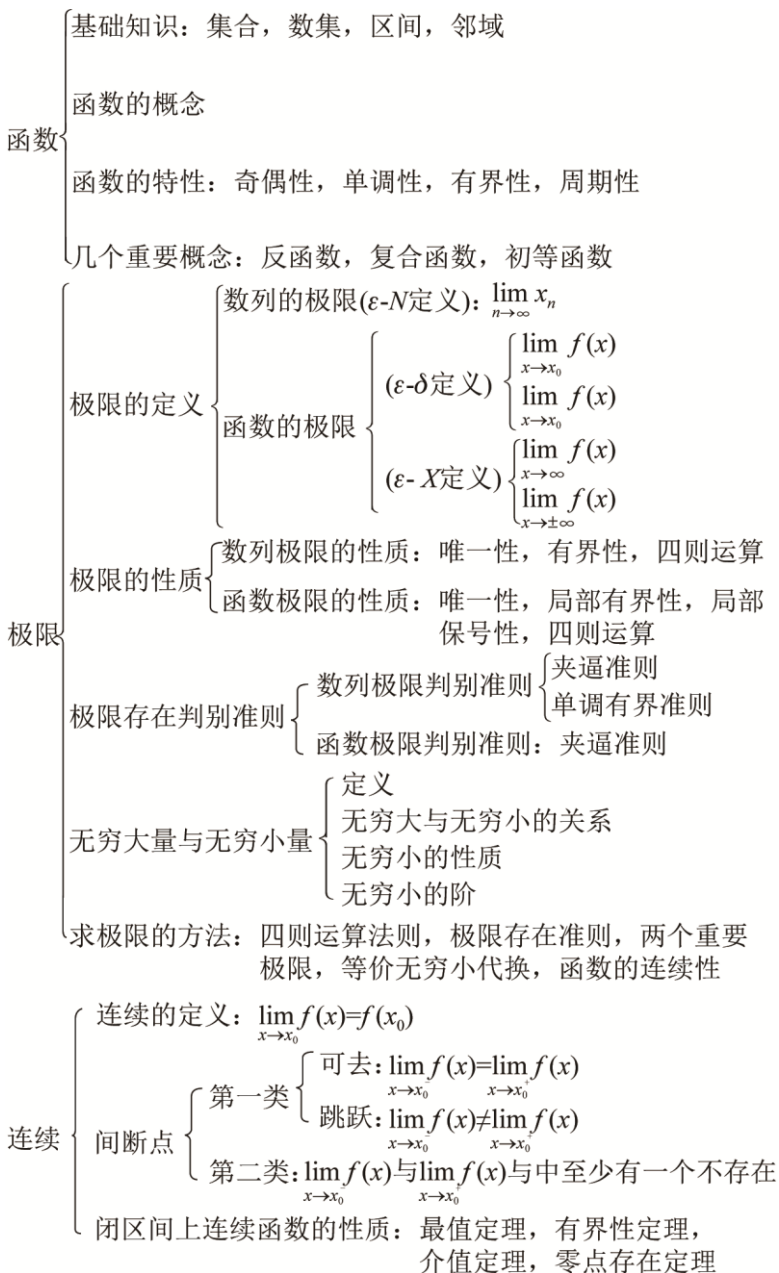


第 1 章 函数的极限与连续

本章知识导航：



1.1 函 数

1.1.1 重要知识点

1. 邻域的定义

设点 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 称集合 $E = \{x \mid |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$. 称集合 $E = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 去心邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$.

注意: 区间是个实数集, 而邻域是个特殊的对称开区间.

2. 函数的定义

设 x, y 是两个变量, x 的取值范围是非空数集 D , f 是某个对应法则. 如果对每一个 $x \in D$, 按照此法则, f 都能确定唯一的一个 y 值与之对应, 则称此对应法则 f 为定义在 D 上的函数, 或称变量 y 是变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量或函数, D 称为函数的定义域, 常记作 D_f , D_f 中每个数 x 在 f 下的像 $f(x)$ (即对应的 y 值), 也称为函数在点 x 处的函数值, 全体函数值的集合称为函数的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图像. 一元函数的图像通常是一条曲线.

确定函数的两要素: 定义域和对应法则.

3. 函数的几种特性

(1) 奇偶性

设 $y = f(x)$ 是一给定的函数, 如果对所有的 $x \in D_f$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数, 其图像关于 y 轴对称; 如果对所有的 $x \in D_f$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数, 其图像关于原点对称.

(2) 单调性

设 $f(x)$ 是一给定的函数, 区间 $I \subset D_f$, 对区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 如果恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少). 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 区间 I 上的增(减)函数的图形是沿 x 轴正上升(下降)的.

(3) 有界性

设 $f(x)$ 是一给定函数, 区间 $I \subset D_f$, 如果存在正常数 M , 使对区间 I 上任一点 x , 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

(4) 周期性

设 $f(x)$ 是一给定函数, 如果存在正常数 T , 使对 D_f 内任意一点 x 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, 正常数 T 称为周期, 把满足上式的最小正常数 T 称为函数的最小正周期或基本周期, 简称周期. 通常所说的周期一般指最小正周期.

4. 几个重要概念

(1) 反函数

设 $y = f(x)$ 是一给定函数, 如果对每个 $y \in R_f$, 都有唯一的一个满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应, 则 x 也是 y 的函数, 称此函数为原函数 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 而把 $y = f(x)$ 称为直接函数, 或说它们互为反函数. 为与习惯一致, 常将反函数改写为 $y = f^{-1}(x)$.

$y = f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是 $y = f(x)$ 是一一映射, 也就是说, 只有严格单调的函数才存在反函数; $D_{f^{-1}} = R_f$; $R_{f^{-1}} = D_f$; $f^{-1}[f(x)] = x$; $f[f^{-1}(x)] = x$; $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 复合函数

设 y 是 u 的函数: $y = f(u)$, 而 u 是 x 的函数: $u = \varphi(x)$. 如果 $D_f \cap R_\varphi \neq \emptyset$, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 是定义于数集 $\{x | u = \varphi(x) \in D_f, x \in D_\varphi\}$ 上的函数, 称此函数为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, x 仍为自变量, y 仍为因变量, 而 u 称为中间变量.

(3) 初等函数

基本初等函数:

常数函数 $y = c$ (c 为实常数);

幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实常数, $\alpha \neq 0$);

指数函数 $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$);

对数函数 $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$);

三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$;

反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

初等函数是由六种基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合运算所得到的, 由一个式子表示的函数称为初等函数.

1.1.2 典型例题解析

例 1.1.1 求下列函数的定义域.

分析 函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合或有特殊规定的自变量 x 的取值范围, 往往归结为不等式组的解集合. 求函数的定义域一般有以下几种情形: ①分式的分母不等于 0; ②偶次方根下的式子非负; ③取对数运算的式子大于 0;

④取正切运算的式子不等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; ⑤取余切运算的式子不等于 $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

⑥取反正弦、反余弦运算的式子绝对值不大于 1.

$$(1) y = \frac{1}{\lg(1-x)}.$$

$$\text{解: } \begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1).$$

$$(2) y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{x^2 - 25}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ x^2 - 25 \geq 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ x \leq -5 \text{ 或 } x \geq 5. \end{cases} \\ &\Rightarrow -2\pi \leq x \leq -5 \text{ 或 } 2k\pi \leq x < (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ D_f &= [-2\pi, -5] \cup \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -1, 0}} [2k\pi, 2k\pi + \pi). \end{aligned}$$

$$(3) y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}} \lg x.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \begin{cases} x > 0, \\ \lg x > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} \lg x > 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ 0 < \lg x < 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \\ 1 < x < 10. \end{cases} \\ D_f &= (1, 10). \end{aligned}$$

例 1.1.2 已知 $y = f(2^x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 求函数 $y = f(\log_2 x) + f(x-1)$ 的定义域.

分析 先由 $f(2^x)$ 的定义域求出 $f(x)$ 的定义域, 再求所给函数的定义域.

解: 因 $-1 \leq x \leq 1$, 所以 $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 2$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$;

$$\text{再由 } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq 2, \\ \frac{1}{2} \leq x-1 \leq 2. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} \sqrt{2} \leq x \leq 4, \\ \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

所求定义域为 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

例 1.1.3 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同, 为什么?

分析 如果两个函数的定义域和对应法则都相同, 那么这两个函数就是相同的, 此时二者的值域一定相同, 与函数表达形式及自变量用什么符号表示没有直接关系; 否则就是

不同的函数.

$$(1) f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2};$$

解: 不同, 定义域相同, 但 $g(x)=|x|$ 与 $f(x)=x$ 的函数关系不同.

$$(2) f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}.$$

解: 相同, 定义域和函数关系都相同, 所以是相同的函数.

例 1.1.4 求函数的解析表达式.

设 $f(x+1)=x^2+x+3$, 求 $f(x)$.

分析 把 $x+1$ 看成一个整体, 先用拼凑法, 再用换元法求解函数的表达式.

解法 1: $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+3$, 则 $f(x)=x^2-x+3$.

解法 2: 令 $u=x+1$, 则 $x=u-1$, 代入得

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+3=u^2-u+3,$$

所以, $f(x)=x^2-x+3$.

例 1.1.5 判断函数的奇偶性.

分析 用奇函数和偶函数的定义, 判断 $f(-x)$ 是否等于 $f(x)$.

$$(1) y=\begin{cases} x(1+x), & x<0; \\ x(1-x), & x\geq 0. \end{cases}$$

$$\text{解: } f(x)=\begin{cases} x(1+x), & x<0; \\ x(1-x), & x\geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \begin{cases} -x(1-x), & -x<0; \\ -x(1+x), & -x\geq 0. \end{cases} = \begin{cases} -x(1+x), & x\leq 0; \\ -x(1-x), & x>0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x(1+x), & x<0; \\ -x(1-x), & x\geq 0. \end{cases} = -f(x), \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) F(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right), \text{ 其中 } f(x) \text{ 为 } \mathbf{R} \text{ 上的奇函数.}$$

$$\begin{aligned} \text{解: } F(-x) &= f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right) = -f(x)\left(\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right) \\ &= -f(x)\left(1-\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right) = f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right) = F(x). \end{aligned}$$

所以, $F(x)$ 是偶函数.

例 1.1.6 判断函数的有界性.

分析 关键是要理解对定义域中的所有 x , 都要满足的某种关系.

(1) 证明 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

证明: $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $|y|=\frac{|x|}{1+x^2}$. 因 $1+x^2 \geq 2|x| \geq |x|$,

所以, $|y|=\frac{|x|}{1+x^2} \leq 1$, 故 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

(2) 证明 $y = \frac{x + \sin x}{x}$ 是有界函数.

证明: 此函数的定义域为 $x \neq 0$, 即 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\text{因为 } |y| = \left| \frac{x + \sin x}{x} \right| = \left| 1 + \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1 + \frac{|\sin x|}{|x|}.$$

又 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $|\sin x| \leq |x|$. 当 $x \neq 0$ 时, $\frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1$,

所以, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 有 $|y| \leq 1 + \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 2$.

故 $y = \frac{x + \sin x}{x}$ 是有界函数.

例 1.1.7 求下列函数的反函数.

分析 首先要判断原函数的定义域, 其次必须求原函数的值域.

$$(1) y = 2 \arcsin \frac{4x+1}{3} - 5.$$

$$\text{解: } D_f = \left[-1, \frac{1}{2}\right], \quad R_f = [-\pi - 5, \pi - 5].$$

$$\arcsin \frac{4x+1}{3} = \frac{y+5}{2}, \quad \frac{4x+1}{3} = \sin \frac{y+5}{2},$$

$$x = \frac{3}{4} \sin \frac{y+5}{2} - \frac{1}{4},$$

$$y = \frac{3}{4} \sin \frac{x+5}{2} - \frac{1}{4} \quad x \in [-\pi - 5, \pi - 5].$$

$$(2) y = \cos x, x \in [-\pi, 0].$$

$$\text{解法 1: } D_f = [-\pi, 0], \quad R_f = [-1, 1].$$

因为 $-\pi \leq x \leq 0$, 所以 $0 \leq x + \pi \leq \pi$,

$$y = \cos x = -\cos(x + \pi), \quad x + \pi = \arccos(-y),$$

$$x = -\pi + \arccos(-y) = -\pi + \pi - \arccos y = -\arccos y$$

即 $y = -\arccos x, x \in [-1, 1]$.

解法 2: 因为 $-\pi \leq x \leq 0$, 所以 $0 \leq -x \leq \pi$.

$$y = \cos x = \cos(-x), \quad -x = \arccos y.$$

即 $y = -\arccos x, x \in [-1, 1]$.

$$(3) y = \begin{cases} -x^2 - 1, & -2 < x < 0; \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2^{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

解: 当 $-2 < x < 0$ 时, $y = -x^2 - 1 \in (-5, -1)$, $x = -\sqrt{-y-1}$,

即 $y = -\sqrt{-x-1}, x \in (-5, -1)$.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = \sqrt{1-x^2} \in [0,1]$, $x = \sqrt{1-y^2}$,

即 $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$.

当 $x > 1$ 时, $y = 2^{x-1} \in (1, +\infty)$, $x = \log_2(y+1)$,

即 $y = \log_2(x+1)$, $x \in (1, +\infty)$.

所以, 反函数为
$$y = \begin{cases} -\sqrt{-x-1}, & -5 < x < -1; \\ \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1; \\ \log_2(x+1), & x > 1. \end{cases}$$

例 1.1.8 求复合函数.

设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x \leq 4, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

分析 求 $f[g(x)]$ 的方法是: 在内函数 $g(x)$ 的每一段上, 讨论使 $g(x)$ 的值落在外函数 $f(x)$ 的定义域各个段内的自变量 x 的取值范围. 在每个取值范围内, 将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 的相应表达式. 若某个范围是空集, 则在该范围内 $f[g(x)]$ 无意义.

解: (1) 当 $x \leq 2$ 时, 使 $g(x) = 4x$ 的值落在外函数 $f(x)$ 的定义域的两段 $[-1,1]$ 和 $(1,4]$ 内的自变量 x 的取值范围分别为 $\begin{cases} x \leq 2 \\ -1 \leq 4x \leq 1 \end{cases}$ 的解集: $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ 和 $\begin{cases} x \leq 2 \\ 1 < 4x \leq 4 \end{cases}$ 的解集: $\frac{1}{4} < x \leq 1$.

当 $x > 2$ 时, 使 $g(x) = x-2$ 的值落在 $[-1,1]$ 和 $(1,4]$ 内的自变量 x 的取值范围分别为不等式组 $\begin{cases} x > 2 \\ -1 \leq x-2 \leq 1 \end{cases}$ 的解集: $2 < x \leq 3$ 及不等式组 $\begin{cases} x > 2 \\ 1 < x-2 \leq 4 \end{cases}$ 的解集: $3 < x \leq 6$.

$$\text{所以, } f[g(x)] = \begin{cases} 2 \cdot (4x), & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ (4x)^2, & \frac{1}{4} < x \leq 1; \\ 2 \cdot (x-2), & 2 < x \leq 3; \\ (x-2)^2, & 3 < x \leq 6. \end{cases} = \begin{cases} 8x, & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}; \\ 16x^2, & \frac{1}{4} < x \leq 1; \\ 2x-4, & 2 < x \leq 3; \\ (x-2)^2, & 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

(2) 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 使 $f(x) = 2x$ 的值落在外函数 $g(x)$ 的定义域内的两段 $(-\infty, 2]$ 及 $(2, +\infty)$ 内的自变量 x 的取值范围分别是不等式组 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x \leq 2 \end{cases}$ 的解集: $-1 \leq x \leq 1$ 及不等式组 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x > 2 \end{cases}$ 的解集: 空集 $\emptyset$.

当 $1 < x \leq 4$ 时, 使 $f(x) = x^2$ 的值落在外函数 $g(x)$ 的定义域内的两段 $(-\infty, 2]$ 及 $(2, +\infty)$ 内的自变量 x 的取值范围分别是不等式组 $\begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ x^2 \leq 2 \end{cases}$ 的解集: $1 < x \leq \sqrt{2}$ 及不等式组

$\begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ x^2 > 2 \end{cases}$ 的解集: $\sqrt{2} < x \leq 4$.

综上所述, 可得 $g[f(x)] = \begin{cases} 8x, & -1 \leq x \leq 1; \\ 4x^2, & 1 < x \leq \sqrt{2}; \\ x^2 - 2, & \sqrt{2} < x \leq 4. \end{cases}$

例 1.1.9 函数建模实例.

某产品的单价为 400 元/台, 当年产量在 1000 台时, 可以全部售出, 当年产量超过 1000 台时, 经广告宣传可以再多售出 200 台, 每台平均广告费 40 元, 生产再多时本年就售不出去. 试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数.

分析 函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合或有特殊规定的自变量 x 的取值范围. 往往归结为不等式组的解集合.

解: 当 $0 \leq x \leq 1000$ (台) 时, 可全部售出, 此时总收入: $R(x) = 400x$ (元);

当 $1000 < x \leq 1200$ (台) 时, 前 1000 台按 400 元/台售出, 后 $x - 1000$ 台按 360 元/台售出, 此时总收入为

$$R(x) = 1000 \times 400 + (x - 1000) \times 360 = 360x + 40000 \text{ (元)};$$

当 $x > 1200$ (台) 时, 前 1000 台按 400 元/台售出, 后 200 台按 360 元/台售出, 再多余的 $x - 1200$ 台没有收入, 此时总收入为

$$R(x) = 1000 \times 400 + 200 \times 360 = 472000 \text{ (元)}.$$

综上所述, 收入函数为

$$y = \begin{cases} 400x, & 0 \leq x \leq 1000; \\ 40000 + 360x, & 1000 < x \leq 1200; \\ 472000 & x > 1200. \end{cases}$$

1.1.3 课后练习题

习题 1.1(基础训练)

1. 求函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln(2x^2 - x)$ 的定义域.

2. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 3]$, 求函数 $y = f(3 + 2x)$ 的定义域.

3. 问下列各对函数是否表示同一个函数, 为什么?

(1) $y = \sin x$ 与 $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

(2) $y = \ln x^3$ 与 $y = 3 \ln x$.

4. 已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

5. 求函数 $y = \sqrt[3]{2x+1}$ 的反函数.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = 2x + 1$. 求 $f[g(x)]$.

7. 若 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 且图形关于直线 $x = 2$ 对称. 证明: $f(x)$ 为周期函数, 并求出周期 T .

习题 1.1(能力提升)

1. 求函数 $y = \frac{4}{x^2 - 1} - \sqrt{2x - 1} + \lg(3 - x)$ 的定义域.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数 $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$) 的定义域.

3. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ($|a| \neq |b|$), 求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且对任何 $x \in \mathbf{R}$ 有: $f(x+2) = f(x) + f(2)$, 已知 $f(1) = a$,

(1) 求 $f(2)$ 与 $f(5)$;

(2) 当 a 取何值时, $f(x)$ 以 2 为周期.

5. 某地区某天对鸡蛋的需求函数为 $Q = 65 - 9p$, 供给函数为 $S = 5p - 5$ (单位: Q 为千克, p 为元/千克).

(1) 找出均衡价格, 并求出此时的供给量与需求量;

(2) 在同一坐标系内画出供给函数曲线与需求函数曲线.

1.2 数列的极限与极限存在准则

1.2.1 重要知识点

1. 数列极限的定义

定性定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$: 当 n 无限增大时, x_n 无限接近于 a .

定量定义 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2. 关于数列极限的几点说明

(1) ε 是任意给定的, 它反映了 x_n 与 a 的接近程度.

(2) N 不是唯一的, 它随 ε 的变化而变化, 通常记为 $N(\varepsilon)$.

(3) 数列极限的几何解释: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 对于任意给定正数 ε 邻域, 都存在一个足够大的确定的自然数 N , 使数列 $\{x_n\}$ 中, 所有下标大于 N 的 x_n 都落在 a 的 ε 邻域 $U(a, \varepsilon)$ 内.

3. 数列极限的性质

(1) 唯一性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它的极限唯一.

(2) 有界性: 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则数列 $\{x_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 则对任意 $n \in N$ 都有 $|x_n| \leq M$.

(3) 保号性: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$).

(4) 收敛数列与子列的关系: 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则它的任一子列也收敛, 且极限也是 a .

这也就意味着如果数列 $\{x_n\}$ 有一个子列发散或者有两个子列收敛于不同的极限, 则数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

(5) 四则运算法则: 两数列均收敛时, 和差积商的极限等于极限的和差积商(此法则适用于有限项的情形).

4. 数列极限的存在准则

(1) 夹逼准则

若 $y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

(2) 单调有界准则

单调有界数列必有极限(单调递增有上界, 或单调递减有下界).

1.2.2 典型例题解析

例 1.2.1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} \right)$.

分析 数列极限的四则运算法则仅适用于有限项的情形, 否则, 应先利用初等数学的知识将其化为有限项的情形, 再利用四则运算法则求解.

解: 错误的做法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + L + \frac{n^2}{n^3} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{n^3} + L + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3}$$

$$= 0.$$

错误的原因: 随着 $n \rightarrow \infty$, 括号里是无穷多项相加, 不是有限项的情形, 因此不能直接用四则运算法则求解.

正确的做法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + L + \frac{n^2}{n^3} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + L + n^2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{3}.$$

例 1.2.2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + L + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right).$

分析 利用夹逼准则计算数列的极限时, 最关键的一步是通过合适的“缩放法”找到两头能夹住中间目标数列且能收敛到同一极限的两个数列.

解: 由于 $\frac{n^2}{n^2 + n\pi} \leq n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + L + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq \frac{n^2}{n^2 + \pi},$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + \pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\pi}{n^2}} = 1,$

所以, 由夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + L + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$

例 1.2.3 设 $x_1 = \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, L, x_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + L + \sqrt{6}}}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求出此极限.

分析 “若数列单调递增有上界, 或单调递减有下界, 则数列必存在极限(收敛).” 对于递推数列往往使用这一准则求极限, 运用时应注意该准则需遵循以下两个步骤: ①证明数列单调, 有界即极限存在; ②假设数列的极限为 A , 通过递推式两端求极限建立关于 A 的方程, 从而求得 A .

解: 显然数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 且 $x_1 < 3, x_2 = \sqrt{6 + x_1} < \sqrt{6 + 3} = 3,$

若设 $x_{n-1} < 3$, 则 $x_n = \sqrt{6+x_{n-1}} < \sqrt{6+3} = 3$.

即归纳得数列 $\{x_n\}$ 有上界, 从而收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则由 $x_n = \sqrt{6+x_{n-1}}$ 两端取极限, 得

$$A = \sqrt{6+A}$$

解得 $A=3$ 或 $A=-2$ (舍), 于是得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

1.2.3 课后练习题

习题 1.2(基础训练)

1. 求下列数列的极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2^n}{2^n};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + L + \frac{n}{n^2} \right);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + L + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

2. 利用极限存在准则证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$

习题 1.2(能力提升)

1. 求下列数列的极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+3} - n \right];$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a|<1, |b|<1).$

2. 研究数列 $a_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$ (n 重根号) 的敛散性, 如果收敛, 求出极限.

1.3 函数的极限

1.3.1 重要知识点

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限

① 定性定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$: 当 x 无限接近 x_0 时, $f(x)$ 无限接近于 A .

② 定量定义 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) 单侧极限

左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$: x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时, $f(x)$ 无限接近于 A .

右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$: x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 时, $f(x)$ 无限接近于 A .

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (该结论常用来考察分段函数在分段点处的极限是否存在).

(4) 自变量趋于无穷时函数的极限

① 定性定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$: 当 $|x|$ 无限增大时, $f(x)$ 无限接近于 A .

② 定量定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

(5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$: 当 x 取负值而 $|x|$ 无限增大时, $f(x)$ 无限接近于 A .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$: 当 x 无限增大时, $f(x)$ 无限接近于 A .

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(7) 函数极限的性质(以 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 为例):

① 唯一性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则极限唯一.

② 局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有界.

③ 局部保号性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则在点 x_0 的某邻域内, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

1.3.2 典型例题解析

例 1.3.1 求 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

分析 当分段函数在分段点两侧的表达式不一样时, 利用“函数在一点极限存在的充要条件是函数在该点的左右极限都存在并且相等”的理论解决.

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

例 1.3.2 考察 $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的极限是否存在.

分析 当分段函数在分段点两侧的表达式一样时, 就直接求极限.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$

1.3.3 课后练习题

习题 1.3(基础训练)

1. $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的 _____ 条件.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 3, & x > 1 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

习题 1.3(能力提升)

1. 研究当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \frac{|x|}{2x}$ 的极限.

1.4 极限运算法则与两个重要极限

1.4.1 重要知识点

(1) 四则运算法则: 两函数极限均收敛时, 和差积商的极限等于极限的和差积商(此法则适用于有限项的情形).

(2) 函数极限的存在准则: 夹逼准则

若 $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$.

(3) 复合函数的极限运算法则

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, 又 $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow a} f(u) = A$.

(4) 两个重要极限

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{推广} \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \text{推广} \quad \lim_{W \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{W}\right)^W = e, \quad \lim_{W \rightarrow 0} \left(1 + W\right)^{\frac{1}{W}} = e.$$

1.4.2 典型例题解析

1. 求函数极限的方法: (一)四则运算法则

有理分式函数在有限点处的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (其中 $f(x), g(x)$ 都是多项式).

当 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.

当 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 时, 应先利用初等数学的知识(如分解因式, 分子分母有理化约去分子分母中的“非零因子”)转化为上述情形来做.

有理分式函数在无穷远点处的极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (其中 $f(x), g(x)$ 都是多项式):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = k; \\ 0, & m < k; \\ \infty, & m > k. \end{cases}$$

例 1.4.1 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-5}.$$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x-5)} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \quad (a > 0).$

解: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{a+x-a+x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})}{2} = -\sqrt{a}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5}.$

解: 考虑分子、分母中 x 的最高次数, 在此, 分子为 $4^3 x^6 \cdot 3^4 x^4$, 分母为 $6^5 x^{10}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2-3)^3(3x-2)^4}{(6x^2+7)^5} = \frac{4^3 \cdot 3^4}{6^5} = \frac{2}{3}.$$

2. 求函数极限的方法: (二) 夹逼准则

例 1.4.2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$

解: $x-1 < [x] \leq x$ 故 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}.$

当 $x > 0$ 时, $1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1,$

由夹逼准则得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$

当 $x < 0$ 时, $1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1-x$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1,$

由夹逼准则得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$

综上, 我们求得 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$

3. 求函数极限的方法: (三) 两个重要极限

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta}{\Delta} = 1, \quad \lim_{W \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{W} \right)^W = e, \quad \lim_{W \rightarrow 0} \left(1 + W \right)^{\frac{1}{W}} = e.$$

例 1.4.3 求下列函数的极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}.$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (-3x))^{\frac{1}{-3x}}\right]^{-3} = e^{-3}.$$

1.4.3 课后练习题

习题 1.4(基础训练)

1. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x+1}.$$

习题 2.4(能力提升)

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0$, 求常数 a 和 b 的值.

2. 利用夹逼准则证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, & x \geq 0 \\ \frac{\sin ax}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 求常数 a .

1.5 无穷小量与无穷大量

1.5.1 重要知识点

1. 无穷小(以 $x \rightarrow x_0$ 的极限过程为例)

(1) 定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

(2) 性质: ① 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

② 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

(3) 无穷小阶的比较:

当 $x \rightarrow x_0$ 时, 设函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 均为无穷小.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小.

记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$. 同时也称 $\beta(x)$ 为 $\alpha(x)$ 的低阶无穷小.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的同阶无穷小.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的等价无穷小.

记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$.

(4) 等价无穷小在求极限问题中的作用:

若当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha \sim \bar{\alpha}$, $\beta \sim \bar{\beta}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

2. 无穷大

定义: 若当 $x \rightarrow x_0$ 时, $|f(x)|$ 无限增大, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大. 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

3. 无穷小与无穷大之间的关系

(1) 如果函数 $f(x)$ 是某一变化过程中的无穷大, 那么其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 是该变化过程中的

无穷小;

(2) 如果函数 $f(x)$ 是某一变化过程中的无穷小 ($f(x) \neq 0$), 那么其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 是该变化

过程中的无穷大.

1.5.2 典型例题解析

求函数极限的方法: (四) 等价无穷小代换

几个常用的等价无穷小:

当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

推广 若 $x \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow 0$ 时, 则

$$\sin f(x) \sim f(x), \arcsin f(x) \sim f(x),$$

$$\tan f(x) \sim f(x), \arctan f(x) \sim f(x),$$

$$1 - \cos f(x) \sim \frac{1}{2}f(x)^2, e^{f(x)} - 1 \sim f(x),$$

$$\ln(1+f(x)) \sim f(x), (1+f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha f(x).$$

例 1.5.1 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}.$$

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.5.3 课后练习题

习题 1.5(基础训练)

1. 选择题

当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - \sin x$ 是 x 的().

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 同阶无穷小，但非等价无穷小 D. 等价无穷小

2. 填空题

若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$ (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

习题 1.5(能力提升)

求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{1 - \cos x}}{e^{\sin x} - 1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^3 x}{(\arctan x)^2 (1 - \cos x)}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x}.$$

1.6 函数的连续性

1.6.1 重要知识点

1. 函数在一点连续的定义

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

可见 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须具备以下三个条件:

- (1) $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 即 $f(x_0)$ 存在;
- (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. 函数在一点连续的等价命题

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x_0^-)}_{\text{左连续}} = f(x_0) = \underbrace{f(x_0^+)}_{\text{右连续}}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. 函数在区间上连续的定义

若 $f(x)$ 在某区间上每一点都连续, 则称它在该区间上连续, 称它为该区间上的连续函数.

4. 函数的间断点

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

于是, 若点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点, 则必然出现以下情形之一:

- (1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 无定义;
- (2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;
- (3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 虽有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 也存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

5. 间断点的分类

点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点: $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在, 若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 则称 x_0 为可去间断点. 若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 称 x_0 为跳跃间断点.

第二类间断点: $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在, 若其中有一个为无穷, 则称 x_0 为无穷间断点. 若其中有一个为振荡, 称 x_0 为振荡间断点.

6. 连续函数的运算

定理 1 在某点连续的有限个函数经有限次和、差、积、商(分母不为 0) 运算, 结果仍是一个在该点连续的函数.

定理 2 连续单调递增(递减)函数的反函数也连续单调递增(递减).

定理 3 连续函数的复合函数是连续的.

7. 初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续
 连续函数经四则运算仍连续
 连续函数的复合函数连续

} 一切初等函数在定义区间内连续.

1.6.2 典型例题解析

$$\text{例 1.6.1 设 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases} \text{, 问当 } k \text{ 为何值时, 函数 } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续.}$$

分析 一个函数在一点处连续必须同时满足三个条件: 一是有定义, 二是有极限, 三是函数值与极限值相等. 而此分段函数在分段点两侧的表达式不一致, 所以必须讨论分段点处的左、右极限来确定该点的极限是否存在.

解: 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \sin x = 1$ (重要极限),

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{x} + 1 \right) = 1 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \right),$$

有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

而 $f(0) = k$, 所以当 $k = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即当 $k = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例 1.6.2 考察函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

分析 此题是与上一题同种类型的题目, 只不过对于这个分段函数, 由于其分段点两侧的表达式一致, 所以应直接求极限, 而不再需要考察左、右极限.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例 1.6.3 设 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^3 + x^2}$.

(1) 指出 $f(x)$ 的间断点, 并判断其类型;

(2) 求出 $f(x)$ 的连续区间.

分析 $f(x)$ 在点 x_0 间断的类型:

第一类间断点 左右极限都存在 $\begin{cases} \text{左极限} = \text{右极限}: \text{可去间断点} \\ \text{左极限} \neq \text{右极限}: \text{跳跃间断点} \end{cases}$

第二类间断点 左右极限中至少有一个不存在

$\begin{cases} \text{极限表现为无穷}: \text{无穷间断点} \\ \text{极限表现为振荡}: \text{振荡间断点} \end{cases}$

解: (1) 由于 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)}$, 显然 $f(x)$ 在点 $x_1 = 0, x_2 = -1$ 处无定义, 所以, $f(x)$ 的间断点为 $x_1 = 0, x_2 = -1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2(1+x)} = \frac{1}{2}$, 所以, $x_1 = 0$ 是第一类的可去间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \cos x}{x^2(1+x)} = \infty$, 所以, $x_2 = -1$ 是第二类的无穷间断点.

(2) $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

例 1.6.4 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

分析 求函数极限的方法: 利用函数的连续性求极限.

连续函数的极限符号可以与函数符号进行交换, 这给求复合函数极限带来很大方便.

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$,

由于 $\ln x$ 连续, 而且 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e (x \rightarrow 0)$,

故上式 $= \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

例 1.6.5 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + e^x \sin 2x}{\sqrt{1+x}}$.

分析 由于初等函数在其定义区间内连续, 所以如果要求初等函数在定义区间内某点的极限时, 只需求该点的函数值即可.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + e^x \sin 2x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1^2 + e^1 \sin(2 \times 1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1 + e \sin 2}{\sqrt{2}}.$

1.6.3 课后练习题

习题 1.6(基础训练)

1. 考察函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

2. 考察函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 2e^{2x}, & x < 0 \\ a+x, & x \geq 0 \end{cases}$, 问 a 取何值时, 函数 $f(x)$ 能成为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续

函数.

4. 求函数 $f(x) = \frac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点并判别其类型.

5. 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x;$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5};$

(3) $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2\alpha)^3;$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(e^x + e^{x^2})}{\arccos x + \sqrt{3^x + 1}};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$

习题 1.6(能力提升)

1. 填空题.

$$(1) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处间断, 则常数 } a \text{ 与 } b \text{ 应满足的关系是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 求下列函数的间断点, 并指出间断点的类型.

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) y = \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(3) y = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} x, & |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$3. \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \cos^2(x-1)}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, \text{ 问函数 } f(x) \text{ 在 } x=1 \text{ 处是否连续? 若不连}$$

续, 改变函数在 $x=1$ 处的定义, 使之连续.

1.7 闭区间上连续函数的基本性质

1.7.1 重要知识点

闭区间上连续函数的性质如下。

(1) 最值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定能取得最大值和最小值。

(2) 有界性定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定有界。

(3) 介值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 若 μ 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数, 则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) = \mu$ 。

(4) 零点存在定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = 0$ 。

1.7.2 典型例题解析

例 1.7.1 设 $f(x) = x + x^2 + L + x^n (n = 2, 3, L)$, 证明 $f(x) = 1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

分析 利用闭区间上连续函数性质证明方程根的存在问题, 一般有两种方法: ①介值定理; ②零点定理。

利用介值定理, 其步骤如下:

- ① 从要证明的等式找出连续函数 $f(x)$ 所需取得的数 C ;
- ② 说明 C 在 $f(x)$ 的相关区间的最大值和最小值之间;
- ③ 利用介值定理得到结论。

证明: $f(x)$ 显然在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = n > 1$, 由介值定理知, 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 1$, 从而 $f(x) = 1$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

例 1.7.2 证明曲线 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点。

分析 证明曲线 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少与 x 轴有一个交点, 就是证明函数 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 10$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少有一个零点, 与证明 $x^4 - 3x^2 + 7x - 10 = 0$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 之间至少有一个实根是同一个问题。

选用零点定理证明有关根的相关问题的基本步骤如下。

- ① 作辅助函数。
 - a. 将要证明的等式中的 ξ 换成 x , 得到相应方程;
 - b. 通过移项, 使方程一边为 0;
 - c. 将方程不为 0 的一边设为辅助函数。

② 根据题意, 找到闭区间, 使辅助函数在闭区间两端点异号.

③ 利用零点定理得到结论.

证明: 函数 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 10$ 显然在 $[1, 2]$ 上连续, 并且 $y(1) = 1 - 3 + 7 - 10 = -5 < 0$, $y(2) = 16 - 12 + 14 - 10 = 8 > 0$, 由零点定理知, 函数 $y = x^4 - 3x^2 + 7x - 10$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个零点, 即曲线在 $x = 1$ 与 $x = 2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

1.7.3 课后练习题

习题 1.7(基础训练)

1. 证明三次代数方程 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在开区间 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

2. 证明方程 $x = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少存在一个实数根.

3. 试证明方程 $x = a \sin x + b (a, b > 0)$ 至少有一个正实根, 且不超过 $a + b$.

习题 1.7(能力提升)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且函数的值域也是 $[a, b]$, 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \xi$, 其中 $b > a$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a < c < d < b$, 证明在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $pf(c) + qf(d) = (p + q)f(\xi)$, 其中, p, q 为任意正常数.