

3.1 旋转体的运动方程

目前,在机电一体化产品与伺服系统中,广泛使用交流伺服电动机驱动。对于一个机电一体化产品的设计者来说,不仅需要充分了解交流伺服电动机的特性,而且需要深入了解被驱动对象——机械装置的特性,并将交流伺服电动机和被驱动机械装置统一考虑,才能设计出品质优良的机电一体化产品。

在选择交流伺服电动机时,首先必须了解被驱动机械所要实现的各种运动,了解整个机械装置的工作过程,看看对交流伺服电动机驱动系统究竟提出了哪些要求,以此作为选择交流伺服电动机的依据。因此,有必要充分理解驱动对象的机械特性及其力学性质。

首先,以交流伺服电动机为例加以说明。

1. 转速

伺服电动机的转速是指其转子的旋转速度,以单位时间内转过的角度(rad/s),或单位时间内的转数(r/min)来表示。

这种在单位时间里角度 θ 的变化称为角速度 Ω ,二者之间的关系为

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{rad/s}) \quad (3-1)$$

当用电动机转速 n 来表示时,则

$$\Omega = 2\pi n \quad (\text{rad/s}) \quad (3-2)$$

现在,来考虑直线运动和旋转运动之间的关系。直线运动的线速度 v 是指单位时间里运动体所移动的距离 $s(\text{m})$ 。若旋转半径为 $r(\text{m})$,角速度为 $\Omega(\text{rad/s})$,则线速度和角速度之间的关系为

$$v = \Omega r \quad (\text{m/s}) \quad (3-3)$$

2. 转矩

伺服电动机的转矩 T_e 是以作用在转子上的力 $F(\text{N})$ 与其作用点的旋转半径 $r(\text{m})$ 之积来表示:

$$T_e = Fr \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (3-4)$$

3. 功

某物体在受到力 F 作用并沿力的方向移动 s 时,力 F 所做的功 A 用力 F 与距离 s 的乘积表示:

$$A = Fs = Fr\theta = T\theta \quad (\text{J}) \quad (3-5)$$

式中: θ ——旋转体所转过的角位移;

T ——旋转体所受到的转矩。

4. 功率

单位时间内所做的功称为功率 $P(\text{J/s}$ 或 $\text{W})$ 。当旋转体运动时,功率 P 可用转矩 T 和角速度 Ω 之积表示为

$$P = \frac{dA}{dt} = T \frac{d\theta}{dt} = T\Omega \quad (\text{W}) \quad (3-6)$$

当物体受力 F 的作用后移动距离 s 时,若所做的功为 A ,则直线运动时的功率为

$$P = \frac{dA}{dt} = F \frac{ds}{dt} = Fv \quad (\text{W}) \quad (3-7)$$

5. 动能和惯量

质量 $m(\text{kg})$ 的物体以速度 $v(\text{m/s})$ 沿直线运动时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{J}) \quad (3-8)$$

把直线运动和旋转运动的速度表达式代入式(3-8),便可以求得旋转运动时的动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\Omega^2 = \frac{1}{2}J\Omega^2 \quad (3-9)$$

式中: J ——转动惯量, $\text{kg} \cdot \text{m}^2$, $J = mr^2$ 。

当一个旋转体是由若干个旋转质点组成时,该旋转体的转动惯量等于各质点的转动惯量之和:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (3-10)$$

但实际旋转体是由连续质点组成的。若在半径 r 处的质点密度为 $\rho(\text{kg/m}^3)$,该处的体积微分为 dV ,则旋转体的转动惯量为

$$J = \int_V \rho r^2 dV \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^2) \quad (3-11)$$

在实际设计机电一体化产品时,需要知道伺服电动机所驱动的机械惯量 J ,并把它折算到伺服电动机轴上。如图 3-1 所示,在具有惯量为 J_1 的交流伺服电动机轴上,借助于变速机构连接具有惯量为 J_2 的负载。

设交流伺服电动机的角速度为 Ω_1 ,负载的角速度为 Ω_2 ,则整个机械系统的动能为

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}J_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\Omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(J_1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}J_2\right)\Omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[J_1 + \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)J_2\right]\Omega_1^2 = \frac{1}{2}(J_1 + \alpha^2 J_2)\Omega_1^2 \end{aligned} \quad (3-12)$$

式中: α ——变速比, $\alpha = Z_2/Z_1$ 。

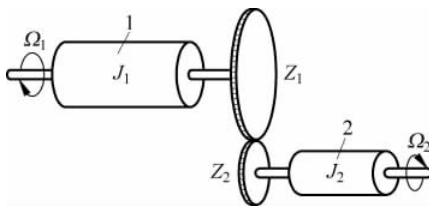


图 3-1 用变速机构连接的旋转体

1—交流伺服电动机; 2—负载

在图 3-2 中,若在惯量为 J_1 的交流伺服电动机轴上,直接连一个惯量为 J_2 的滚筒,并借助于软连接将一个质量为 m 的质点连接在该滚筒上,则质点 m 在交流伺服电动机轴上的惯量折算值可用下述方法来求得。

设交流伺服电动机的角速度为 Ω ,转速为 n ,滚筒直径为 D ,质点 m 的速度为 v ,则全部的动能 E_k 可由下式表示:

$$E_k = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\Omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2 + \frac{mv^2}{\Omega^2}\right)\Omega^2 \quad (3-13)$$

把 $v = \pi Dn$, $\Omega = 2\pi n$ 代入上式,则有

$$E_k = \frac{1}{2}\left[J_1 + J_2 + \frac{m(\pi Dn)^2}{(2\pi n)^2}\right]\Omega^2 = \frac{1}{2}\left(J_1 + J_2 + \frac{mD^2}{4}\right)\Omega^2 \quad (3-14)$$

式中: J_1 ——交流伺服电动机的惯量;

J_2 ——滚筒的惯量。

由式(3-14)可见,质量为 m 的质点在直径为 D 的旋转轴上作直线运动,回转轴的惯量为 $mD^2/4$ 。

图 3-3 表示通过丝杠牵引质量为 m_1 的质点和质量为 m_2 的工作台。

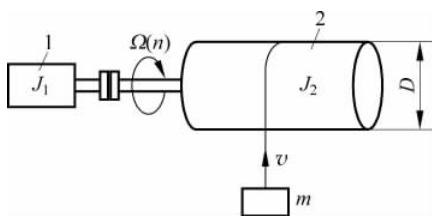


图 3-2 直线运动体的惯量
1—交流伺服电动机; 2—滚筒

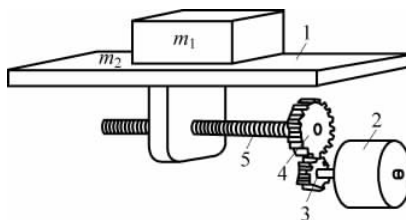


图 3-3 牵引丝杠驱动的对象
1—工作台; 2—交流伺服电动机; 3—小齿轮;
4—大齿轮; 5—丝杠

机械系统的总惯量 J 的计算如下:

$$J = J_1 + J_2 + \alpha^2 \left[J_3 + (m_1 + m_2) \frac{D^2}{4} \right] \quad (3-15)$$

式中: J_1 ——交流伺服电动机的惯量;

J_2 ——小齿轮的惯量;

J_3 ——大齿轮的惯量;

D ——转动丝杠的直径;

m_1 ——质点的质量;

m_2 ——工作台的质量;

α ——减速比。

6. 运动方程式

据牛顿第二定律可知,当质量为 m 的物体在受力 F 作用时,若以速度 v 运动,则有

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (3-16)$$

牛顿第二定律也适合于旋转运动。

设旋转半径为 r ,角速度为 Ω ,并把 $v = r\Omega$ 代入上式,则有

$$F = mr \frac{d\Omega}{dt} \quad (3-17)$$

两边乘以 r , 得

$$Fr = T = mr^2 \frac{d\Omega}{dt} = J \frac{d\Omega}{dt}$$

即

$$T = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (3-18)$$

式中: J ——旋转体的惯量;

T ——转矩。

3.2 负载的转矩特性

在机电一体化机器中,驱动机械运动的交流伺服电动机运行方式通常如图 3-4 所示。

交流伺服电动机从零速起动,一直加速到所规定的速度,并以此速度运行。当完成工作接到停止命令时,交流伺服电动机就从工作速度开始减速,直到停止,这就结束了一个连续运行的过程。为了按上述运行方式来控制交流伺服电动机,必须产生足够的转矩 T_e ,以克服负载转矩 T_L 、机械部分的摩擦转矩 T_f 和负载加减速时所需要的加速转矩 T_a ($T_a = J \frac{d\Omega}{dt}$) 之和的反作用。

如上所述,交流伺服电动机所产生的转矩和负载转矩之间的关系如图 3-5 所示。

若用运动方程表示,则有

$$T_e = T_L + T_f + J \frac{d\Omega}{dt} \quad (3-19)$$

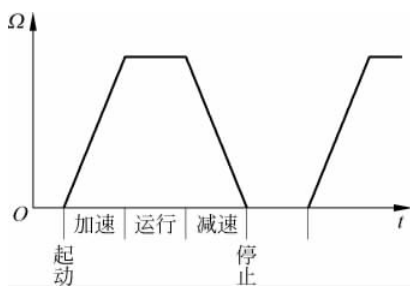


图 3-4 运动方式

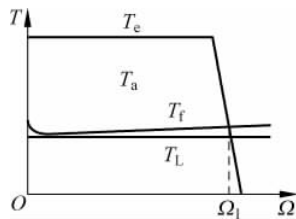


图 3-5 交流伺服电动机所产生的转矩和负载转矩之间的关系

旋转体在轴承等处所受到的摩擦转矩在加速过程中的变化情况相当复杂,但一般可认为有如下规律:物体从静止状态开始转动时,存在较大的静摩擦转矩,当电动机所产生的转矩大于该摩擦转矩时,电动机便开始旋转。电动机旋转起来后,摩擦力便随之变小,而后随着角速度的上升而逐渐增加。除起动时外,旋转摩擦转矩可分为与角速度有关的摩擦转矩和与角速度无关的摩擦转矩。通常,与速度成比例的摩擦系数较小,可以忽略不计。一般来说,由电动机所驱动的负载,其转矩-速度特性可大致分为三类,如图 3-6 所示。

(1) 恒转矩负载:在这类负载中,负载转矩不随负载速度变化而变化,负载功率则随着速度

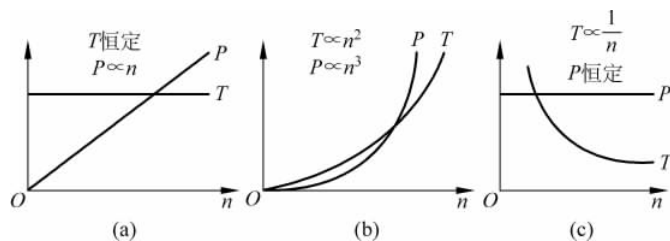


图 3-6 负载的种类和转矩-速度特性

(a) 恒转矩负载; (b) 流体负载; (c) 恒功率负载

的增大而线性增加。像卷扬机等重力负载、机床进给机构等摩擦负载就是恒转矩负载的代表。

(2) 流体类负载: 这类负载的转矩与转速的二次方成比例, 功率与转速的三次方成比例。风机、水泵等就是这类负载的代表。

(3) 恒功率负载: 这类负载的特点是转矩与转速成反比, 但其乘积即功率近似保持不变。这类负载的典型代表有金属切削机床的主轴驱动和卷取机等。

由图 3-5 知道, 交流伺服电动机的转矩-转速特性是一条直线, 即转矩为一个常数。所以交流伺服电动机特别适用于驱动机床进给轴这类恒转矩负载。

下面, 根据不同负载, 就计算交流伺服电动机容量与转矩的方法作简要说明。

1. 摩擦负载

传送带和机床工作台等负载是使物体在水平方向上运动, 这类负载就是一种摩擦负载。当质量为 m 的物体对摩擦面施加的垂直方向的力为 F_v 时, 若摩擦系数为 μ , 则使物体沿水平方向移动的力为

$$F_h = \mu F_v \quad (\text{N}) \quad (3-20)$$

当以速度 v 移动时所需的功率为

$$P = F_h v = \mu F_v v \quad (\text{W}) \quad (3-21)$$

当物体以角速度 Ω 作旋转运动时, 若轴承半径为 r , 则此时所需要克服的摩擦转矩 T_f 和所提供的功率 P 分别为

$$T_f = \mu F_v r \quad (\text{J}) \quad (3-22)$$

$$P = \mu F_v r \Omega \quad (\text{W}) \quad (3-23)$$

在一定的速度内, 可以认为摩擦系数不变, 故对一定的速度而言, 摩擦负载为恒转矩负载特性, 其功率与速度成正比。

2. 重力负载

卷扬机、多关节型机器人等机械克服重力将物体上、下移动, 这种负载称为重力负载。将质量为 m 的负载以速度 v 向上卷起时的力 F_v 和功率 P 分别为

$$F_v = mg \quad (\text{N}) \quad (3-24)$$

$$P = F_v v = mgv \quad (\text{W}) \quad (3-25)$$

由于重力加速度 g 是一定的, 不随速度而变化, 所以这种负载对速度而言呈现恒转矩特性, 功率与速度成正比。

3. 恒功率负载

机床的主轴和卷取机等负载都是恒功率负载的例子。在切削加工时, 切削阻力的合力

F 如图 3-7 所示。在合力 F 中,需要提供分力 F_f ,以使驱动装置移动,作纵向进给。由于图 3-7 中所示的刀具不作横向进给运动,所以分力 F_p 并不消耗功率。主分力 F_v 对应于主轴的驱动功率。若主轴运动速度及进给速度分别为 v 和 v_f ,则主轴驱动功率和进给功率分别为

$$P_v = F_v v \quad (\text{W}) \quad (3-26)$$

$$P_f = F_f v_f \quad (\text{W}) \quad (3-27)$$

切削阻力因工件的材质而异,与刀具材质几乎无关。

当工件的材质及切削角度一定时,虽然可以认为切削阻力是一定的,但由于工件半径的变化,转矩也随之改变。一般来说,当被加工的工件半径变小时,应使工件的转速升高;而当工件半径较大时,应使其转速降低。这样才能保证工件圆周的线速度保持为一常数,不随半径变化而变化,从而确保加工质量。

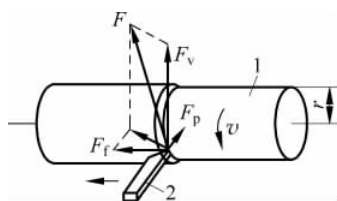


图 3-7 切削阻力的分力

1—被加工工件; 2—车刀

4. 加速负载

在印制电路板的元件插入装置、绘图机等负载中,其负载很轻,但却处于频繁起动与制动运行方式中,在这种情况下,不仅需要较大的起动与制动转矩,也需确定交流伺服电动机的容量。

设质量为 m 的物体以加速度 a (m/s^2) 加速或减速时的功率分别为

$$P_a = (ma + F_L)at \quad (\text{W}) \quad (3-28)$$

$$P_d = (-ma + F_L)(v_0 - at) \quad (\text{W}) \quad (3-29)$$

式中: F_L ——负载的阻力;

v_0 ——初始速度。

惯量为 J 的旋转体以角加速度 Ω (rad/s^2) 加、减速度时的转矩分别为

$$T_a = J\Omega + T_L \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (3-30)$$

$$T_d = -J\Omega + T_L \quad (\text{N} \cdot \text{m}) \quad (3-31)$$

式中: T_L ——旋转体的阻力矩。当初始角速度为 Ω_0 时,所需的加、减速功率分别为

$$P_a = (J\Omega + T_L)(\Omega_0 + \Omega t) \quad (\text{W}) \quad (3-32)$$

$$P_d = (-J\Omega + T_L)(\Omega_0 - \Omega t) \quad (\text{W}) \quad (3-33)$$

当初始角速度 $\Omega_0 = 0$ 时,即从静止状态以角加速度 Ω 加速到 $\Omega = \Omega_1$ 时的功率为

$$P_a = (J\Omega + T_L)\Omega t \quad (\text{W}) \quad (3-34)$$

从初始速度 $\Omega_0 = \Omega_1$,以角加速度 Ω 减速到静止状态时的功率为

$$P_d = (-J\Omega + T_L)(\Omega_1 - \Omega t) \quad (\text{W}) \quad (3-35)$$

3.3 几种典型的非线性现象

在交流伺服系统中,除了在第 2 章中介绍过电机转子速度干涉交、直轴电流所造成的非线性因素之外,执行元件伺服电动机一般还兼有死区和饱和特性,如图 3-8(a)、(b)所示。由于电机轴上都存在摩擦力矩和负载力矩,因此,当输入电压达到一定数值时,电机才会转动,即存在不灵敏区,当输入电压超过一定数值时,电机的转速就会出现饱和,见图 3-8(c)。

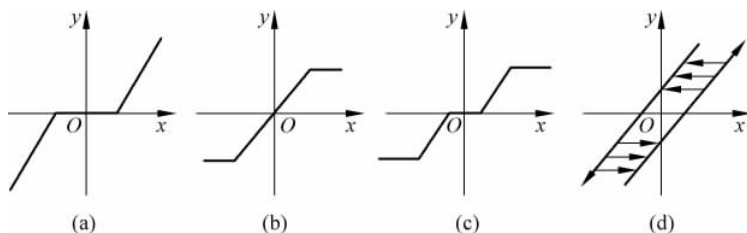


图 3-8 伺服系统可能存在的几种典型的非线性特性

另外,各种传动机构,例如齿轮减速装置、杆系传动,由于加工和装配精度限制,在传动过程中都存在间隙特性,如图 3-8(d)所示。由此可见,这些非线性特性在实际的伺服系统中是普遍存在的。在性能要求很高的伺服系统中,必须认真对待这些非线性因素。

3.3.1 现象分析

死区又称为不灵敏区,其特性如图 3-9 所示。它的特点是:当输入量 $|x| \leq \Delta$ 时,输出量 $y=0$;当 $|x| > \Delta$ 时, y 与 x 呈线性关系。图中 $-\Delta \sim \Delta$ 是死区范围, $K = \tan\beta$ 是死区特性直线段的斜率。

系统中的死区是由测量元件的死区、放大元件的死区以及执行机构的死区造成的。对于图 3-10 所示的系统, K_1 、 K_2 、 K_3 分别为误差检测器、放大元件和执行机构的传递系数, Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 分别为它们的死区。把放大元件和执行机构的死区都折算到误差检测器上,得到总的死区特性为

$$\Delta = \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{K_1} + \frac{\Delta_3}{K_1 K_2} \quad (3-36)$$

由此可见,处于系统前向通路最前边的元件,其死区造成的影响最大,而放大元件和执行元件死区的影响,可以通过提高这些元件前几级的传递系数来减小。

死区对系统最直接的影响是造成稳态误差。当输入信号是斜坡函数时,死区的存在会造成系统输出量在时间上的滞后,从而降低系统的跟踪精度,如图 3-11 所示。

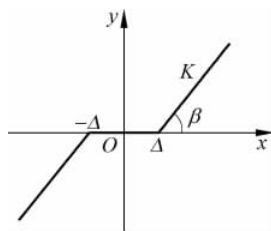


图 3-9 死区特性



图 3-10 含有死区的非线性系统

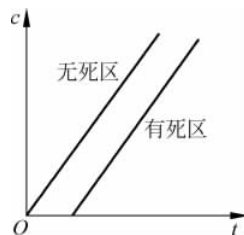


图 3-11 斜坡输入时,系统的输出量

死区特性的等效增益如图 3-12 所示。在图 3-12(a)中, K 为死区特性直线段的斜率, k 为死区特性的等效增益。显然,当 $|x| \leq \Delta$ 时, $k=0$;当 $x \rightarrow \infty$ 时, $k \rightarrow \infty$,如图 3-12(b)所示。因此,死区的存在相当于降低了系统的开环增益,从而提高了系统的稳定性,减弱了过渡过程的振荡性。另外,死区能滤除在输入端作小幅振荡的干扰信号,从而提高系统的抗干扰能力。

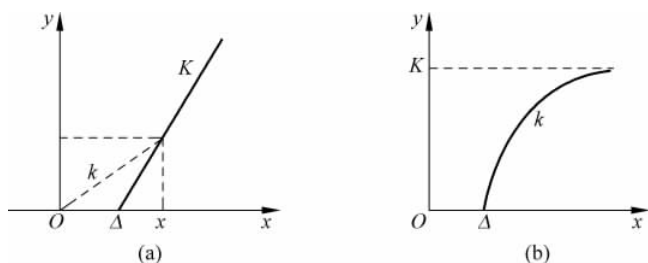


图 3-12 死区特性的等效增益

3.3.2 饱和现象研究

具有饱和特性的元件很多,几乎各类放大器和电磁元件都会出现饱和现象。实际上,执行元件的功率限制也是一种饱和现象。饱和特性及其等效增益如图 3-13 所示。图 3-13(a)所示为饱和特性,它的特点是:当输入量 $|x| \leq a$ 时,输出量与 x 呈线性关系。图中 $-a \sim a$ 是线性范围, K 是线性范围内的传递系数。由图可见,饱和特性在线性范围内的增益为 K ,而在饱和区虽然输入量继续增大,但输出却保持不变,所以饱和特性的等效增益 k ,将随着输入量的增大而减小,如图 3-13(b)所示。

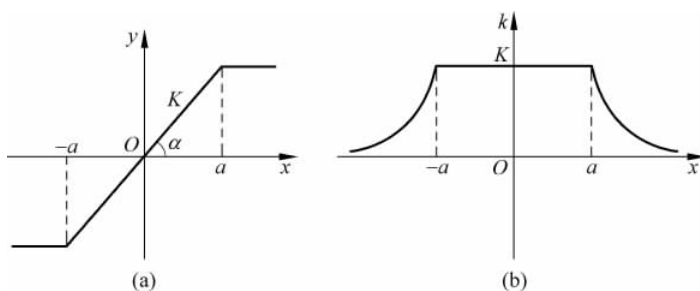


图 3-13 饱和特性及其等效增益

(a) 饱和特性; (b) 等效增益

饱和特性对系统性能的影响是多种多样的,下面仅讨论两种情况。对稳定的系统而言,饱和特性带来的开环增益下降,会使系统的超调量下降,振荡减弱。这可用图 3-14 所示的伺服系统为例来说明。图 3-14 所示为具有饱和特性的伺服系统框图,定性说明如下:当系统中无饱和限制时,开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_1 K_2}{s(T_m s + 1)}$,其根轨迹如图 3-15(a)所示,当开环增益为 $K = K_1 K_2$ 时,闭环极点位于 s_1 和 s_2 处,在幅值较大的阶跃信号作用下,系统的阶跃响应如图 3-15(b)中的曲线 1 所示。当考虑饱和限制后,幅值较大的阶跃输入使系统工作在饱和区,于是,开环增益 $K = K_1 K_2$ 下降,闭环的两个极点变为 s'_1 和 s'_2 ,它们比 s_1 、 s_2 更靠近实轴,见图 3-15(a)。这相当于阻尼比 ξ 增大,系统的阶跃响应如图 3-15(b)中的曲线 2 所示,显然超调量下降,振荡减弱(对于开环增益减小时,稳定裕度反而减小的个别系统,饱和特性的引入反而会使系统的振荡情况加剧)。

对于振荡发散的不稳定系统,当受到饱和限制后,系统会出现自激振荡。例如,在如图 3-14 所示的伺服系统中,若 $G(s) = \frac{K_2}{s(T_m s + 1)(s + 1)}$,并且不考虑饱和限制,当开环增益

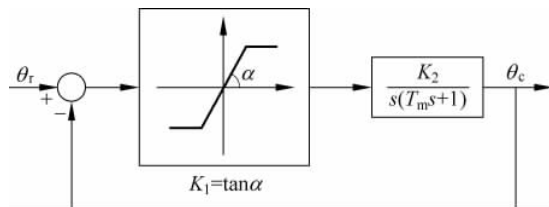


图 3-14 具有饱和特性的伺服系统框图

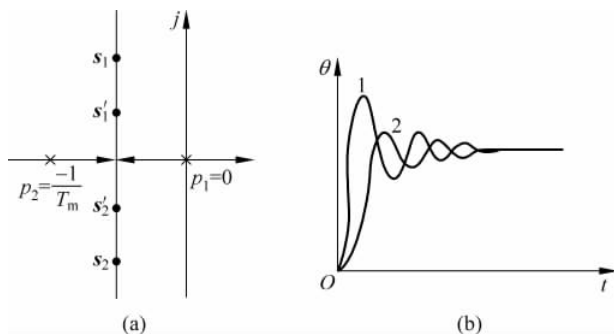


图 3-15 系统的根轨迹图及阶跃响应曲线

$K = K_1 K_2$ 大于临界值 K_c 时,系统是振荡发散的,其阶跃响应曲线如图 3-16 中的曲线 1 所示。当考虑了饱和特性后,系统的发散结果会使误差 e (e 为指令输入与输出的误差)增大,从而使饱和特性的增量 K_1 下降,当 $K = K_1 K_2$ 小于系统的临界开环增益 K_c 时,系统的输出就有收敛的趋势;当收敛到使 e 进入饱和特性的线性范围时, $K = K_1 K_2$ 又大于 K_c ,输出又振荡发散。反复上述过程,使系统输出既不能无限发散,也不会收敛到零,最终将不稳定的发散振荡压抑为大幅度的自振,如图 3-16 中的曲线 2 所示。

总之,饱和特性对系统性能影响比较复杂,并因系统结构参数的不同而不同,但粗略地看,可以用线性系统开环增益减小时,对系统性能产生的影响做近似分析。例如,使系统的稳态误差增大,当系统输入信号为斜坡函数时,因跟踪速度受到限制,从而使系统的跟踪误差变大。但一般来说,饱和特性会使系统的动态特性变好。

在设计伺服系统时,应力求在输入信号增大时,所有元件同时进入饱和区,至少也要使功率级首先进入饱和区,这将使功率元件得到充分利用,在经济上是合理的。

3.3.3 间隙现象的讨论

传动机构(如齿轮传动、杆系传动)的间隙也是控制系统中常见的非线性因素,由加工精

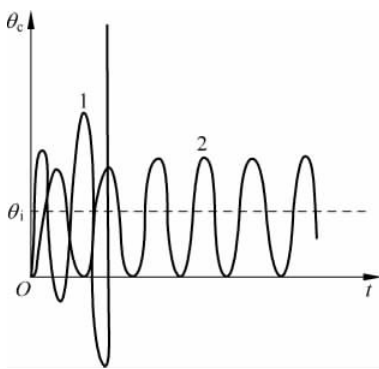


图 3-16 图 3-14 中 $G(s) = \frac{K_2}{s(T_m s + 1)(s + 1)}$ 时,系统的阶跃响应曲线

度和装配上的限制,间隙往往是很难避免的。如图 3-17(a)所示的减速齿轮箱中,一对齿轮的啮合间隙如图 3-17(b)所示。主动轮的 A 位于从动轮的齿 B_1 、 B_2 中间。图 3-17(c)给出了这对啮合齿轮输入量和输出量之间的关系。当主动轮正向转动而未越过间隙 b 时,从动轮不动,这相当于死区 Ob 段;然后从动轮随主动轮以线性关系旋转,即 bc 段;当主动轮反转时,必须越过 $2b$ 的空行 cd 段以后,从动轮才反转,即 de 段;当主动轮再正转时,从动轮再次停止,即 ef 段;然后从动轮跟随主动轮正向旋转,即 fb 段。从而形成了如图 3-17(c)所示的间隙特性。它具有非单值非线性特性,因为一个输入值可以有两个输出值。

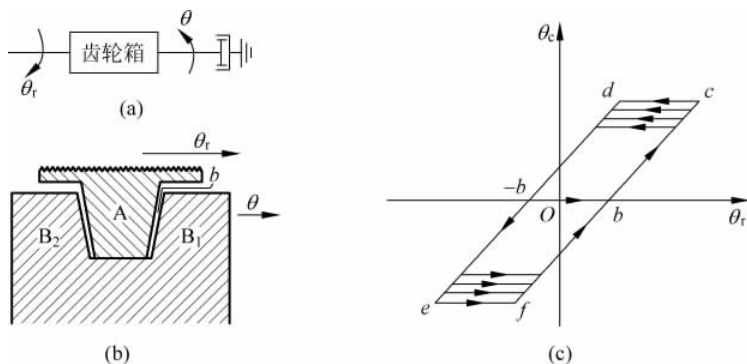


图 3-17 齿轮间隙和间隙特性

间隙特性对系统性能的主要影响:一是增大了系统的稳态误差,降低了控制精度,这相当于死区的影响;二是使系统过渡过程的振荡加剧,甚至可能使系统不稳定,这一点可以用间隙特性在正弦信号作用下,输出的波形图 3-18 来说明。

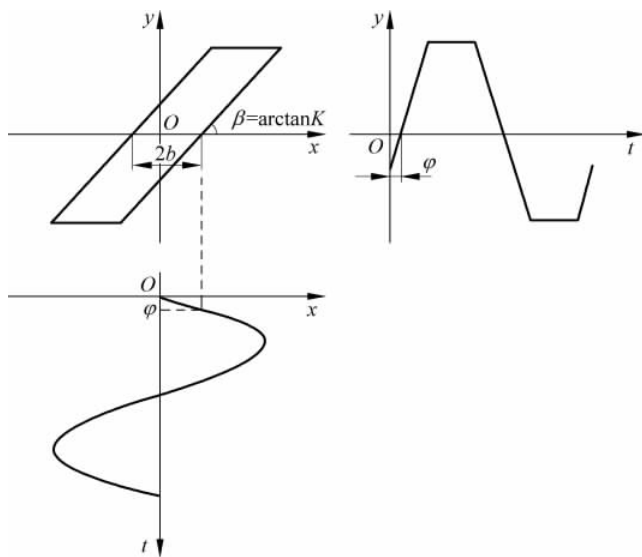


图 3-18 间隙的输入-输出波形

由图 3-18 可见,输出在相位上落后输入 φ 角,这相当于在开环系统中引入一个相角滞后环节,从而使系统的相角裕度减小,过渡过程振荡加剧,动态性能变坏,甚至造成系统不稳定。从能量的观点来分析,当主动轮越过间隙时,系统的执行元件不带动负载,因而不消耗