

第 3 章 离散傅里叶变换(DFT)

3.1(3.1) 如图 P3.1 所示, 序列 $x(n]$ 是周期为 6 的周期性序列, 试求其傅里叶级数的系数。

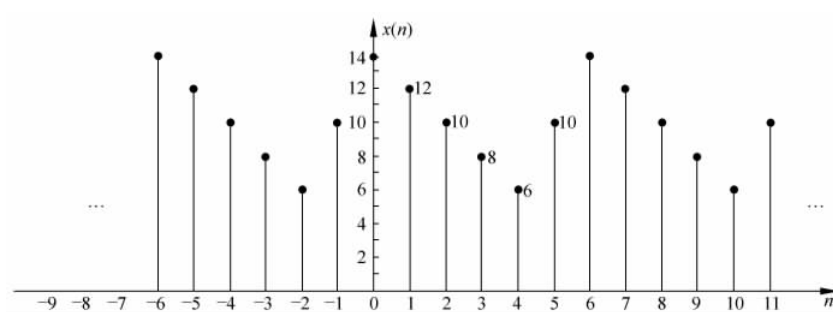


图 P3.1

分析

利用 DFS 的定义求解。

解

由

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) W_6^{nk} = \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} \\ &= 14 + 12e^{-j\frac{2\pi}{6}k} + 10e^{-j\frac{2\pi}{6}2k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} + 6e^{-j\frac{2\pi}{6}4k} + 10e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}\end{aligned}$$

计算求得

$$\begin{aligned}\tilde{X}(0) &= 60, & \tilde{X}(1) &= 9 - j3\sqrt{3}, & \tilde{X}(2) &= 3 + j\sqrt{3} \\ \tilde{X}(3) &= 0, & \tilde{X}(4) &= 3 - j\sqrt{3}, & \tilde{X}(5) &= 9 + j3\sqrt{3}\end{aligned}$$

3.2 (3.2) 设 $x(n) = R_4(n)$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 试求 $\tilde{X}(k)$, 并作图表示 $\tilde{x}(n)$ 、 $\tilde{X}(k)$ 。

分析

利用 DFS 的定义求解。

解

由

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) W_6^{nk} = \sum_{n=0}^5 \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{6}nk} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\pi k}$$

计算求得

$$\begin{aligned}\tilde{X}(0) &= 4, & \tilde{X}(1) &= -j\sqrt{3}, & \tilde{X}(2) &= 1 \\ \tilde{X}(3) &= 0, & \tilde{X}(4) &= 1, & \tilde{X}(5) &= j\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\tilde{x}(n)$ 、 $|\tilde{X}(k)|$ 如图 P3.2 所示。

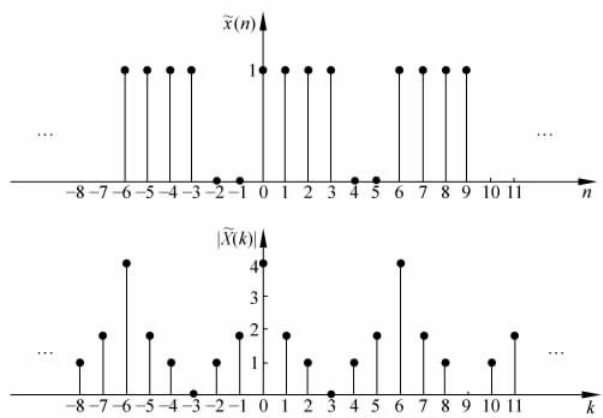


图 P3.2

3.3(3.3) 设

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$h(n) = R_4(n-2)$$

令

$$\tilde{x}(n) = x((n))_6, \quad \tilde{h}(n) = h((n))_6$$

试求 $\tilde{x}(n)$ 与 $\tilde{h}(n)$ 的周期卷积, 并作图。

分析

可以用列表法求解, 直观方便。由于

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}(n) * \tilde{h}(n) = \sum_m \tilde{x}(m) \tilde{h}(n-m)$$

只要将表 P3.3 中对应于某个 n 的一行中的 $\tilde{h}(n-m)$ 值和第一行中与之对应的 $\tilde{x}(m)$ 值相乘, 然后再将所有乘积结果相加, 就得到此 n 的 $\tilde{y}(n)$ 值。

表 P3.3

$\tilde{h}(n-m) \backslash \tilde{x}(m)$	1	2	3	4	5	0	$\tilde{y}(n)$
n							
0	0	1	1	1	1	0	14
1	0	0	1	1	1	1	12
2	1	0	0	1	1	1	10
3	1	1	0	0	1	1	8
4	1	1	1	0	0	1	6
5	1	1	1	1	0	0	10

解

在一个周期内的计算值

$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}(n) * \tilde{h}(n) = \sum_m \tilde{x}(m) \tilde{h}(n-m)$$

$\tilde{y}(n)$ 如图 P3.3 所示。

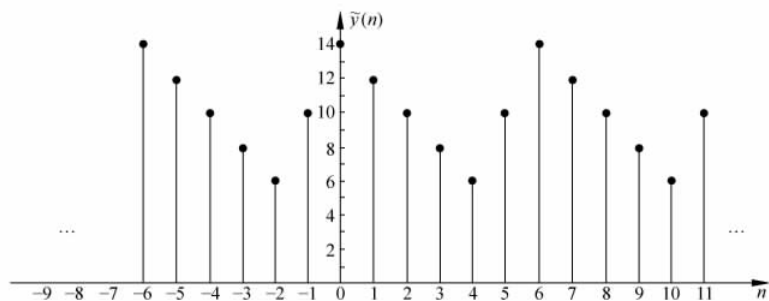


图 P3.3

3.4(3.4) 已知 $x(n]$ 如图 P3.4 所示为 $\{1, 1, 3, 2\}$, 试画出 $x((-n))_5$, $x((-n))_6 R_6(n)$, $x((n))_3 R_3(n)$, $x((n))_6$, $x((n-3))_5 R_5(n)$, $x((n))_7 R_7(n)$ 等各序列。



图 P3.4

分析

此题需注意周期延拓的数值, 也就是 $x((n))_N$ 中 N 的数值。如果 N 比序列的点数多, 则需补零; 如果 N 比序列的点数少, 则需将序列按 N 为周期进行周期延拓, 混叠相加形成新序列。

解

各序列如图 P3.4(1) 所示。

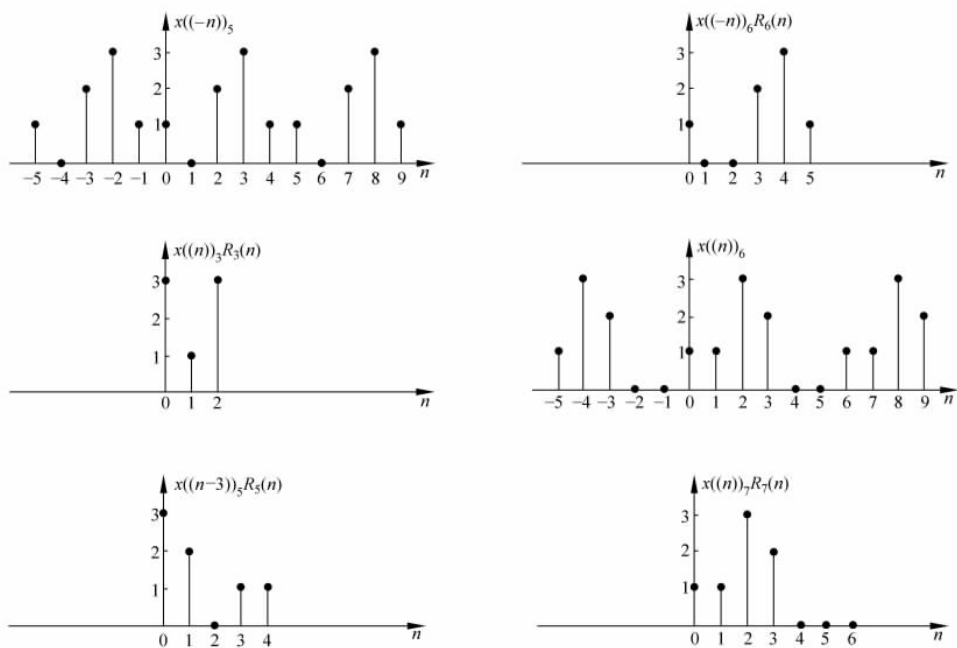


图 P3.4(1)

3.5 (3.5) 试求以下有限长序列的 N 点 DFT(闭合形式表达式):

$$(1) x(n) = a(\cos\omega_0 n)R_N(n) \quad (2) x(n) = a^n R_N(n)$$

$$(3) x(n) = \delta(n - n_0), \quad 0 < n_0 < N \quad (4) x(n) = nR_N(n)$$

$$(5) x(n) = n^2 R_N(n)$$

分析

利用有限长序列的 DFT 的定义: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1$ 。第(4)小题利用代数化简的办法, 必须去掉 $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} nW_N^{nk}R_N(k)$ 中的变量 n 便于求解。第(5)小题则利用(4)的关系来进行化简。

解

(1) 因为 $x(n) = a\cos(\omega_0 n)R_N(n)$, 所以

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a\cos(\omega_0 n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) \\ &= \frac{1}{2}a \left[\sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\omega_0 n} + e^{j\omega_0 n})e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right] R_N(k) \\ &= \frac{1}{2}a \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)n} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)n} \right] R_N(k) \\ &= \frac{1}{2}a \left[\frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)}} + \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)}} \right] R_N(k) \\ &= \frac{1}{2}a \left[\frac{e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}} (e^{j\frac{\omega_0 N}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)} (e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)} - e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)})} - \right. \\ &\quad \left. \frac{e^{j\frac{\omega_0 N}{2}} (e^{j\frac{\omega_0 N}{2}} - e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}})}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)} (e^{j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)} - e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)})} \right] \\ &= \frac{1}{2}a \left[\frac{e^{-j\frac{\omega_0 N}{2}} \sin\left(\frac{\omega_0 N}{2}\right)}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k + \omega_0)} \sin\left(\frac{\pi}{N}k + \frac{1}{2}\omega_0\right)} - \frac{e^{j\frac{\omega_0 N}{2}} \sin\left(\frac{\omega_0 N}{2}\right)}{e^{-j\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{N}k - \omega_0)} \sin\left(\frac{\pi}{N}k - \frac{1}{2}\omega_0\right)} \right] \end{aligned}$$

(2) 因为 $x(n) = a^n R_N(n)$, 所以

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1 - a^N}{1 - ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

(3) 因为 $x(n) = \delta(n - n_0), 0 < n_0 < N$, 所以

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} R_N(k) \\ &= e^{-j\frac{2\pi}{N}n_0 k} R_N(k) \end{aligned}$$

(4) 由 $x(n) = nR_N(n)$, 得

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N}{2}(N-1)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} n W_N^{nk} R_N(k), \quad 1 \leq k \leq N-1$$

$$W_N^k X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} n W_N^{(n+1)k} R_N(k)$$

$$\begin{aligned} X(k)(1 - W_N^k) &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} n W_N^{nk} - \sum_{n=0}^{N-1} n W_N^{(n+1)k} \right) R_N(k) \\ &= [W_N^k + 2W_N^{2k} + 3W_N^{3k} + \cdots + (N-1)W_N^{(N-1)k} - (W_N^{2k} + 2W_N^{3k} + \cdots + \\ &\quad (N-2)W_N^{(N-1)k} + N-1)] R_N(k) \\ &= -(N-1) + \sum_{n=1}^{N-1} W_N^{nk} R_N(k) \\ &= \left[-(N-1) + \frac{W_N^k - 1}{1 - W_N^k} \right] R_N(k) = -NR_N(k) \end{aligned}$$

所以

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{N(N-1)}{2}$$

$$X(k) = \frac{-N}{1 - W_N^k} R_N(k), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

(5) 由 $x(n) = n^2 R_N(n)$, 则

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{nk} R_N(k)$$

根据第(4)小题的结论

$$x_1(n) = nR_N(n)$$

则

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} n W_N^{nk} = \frac{-N}{1 - W_N^k} R_N(k)$$

$$\begin{aligned} X(k)(1 - W_N^k) &= \sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{nk} - \sum_{n=0}^{N-1} n^2 W_N^{(n+1)k} \\ &= W_N^k + 4W_N^{2k} + 9W_N^{3k} + \cdots + (N-1)^2 W_N^{(N-1)k} - [W_N^{2k} + 4W_N^{3k} + \cdots + \\ &\quad (N-2)^2 W_N^{(N-1)k} + (N-1)^2] \\ &= -(N-1)^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (2n-1) W_N^{nk} \\ &= -N(N-2) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} n W_N^{nk} \\ &= -N(N-2) + 2X_1(k) \\ &= -N(N-2) - \frac{2N}{1 - W_N^k} \end{aligned}$$

所以

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = (N-1) \cdot N \cdot (2N-1)/6$$

$$X(k) = \frac{N(N-2)W_N^k - N^2}{(1 - W_N^k)^2}, \quad 1 \leq k \leq N-1$$

3.6(3.6) 已知 $x(n) = \{2, 1, 4, 2, 3\}$

(1) 计算 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 及 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 并说明二者的关系。

(2) 将 $x(n)$ 的尾部补零, 得到 $x_0(n) = \{2, 1, 4, 2, 3, 0, 0, 0\}$

计算 $X_0(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_0(n)]$, $X_0(k) = \text{DFT}[x_0(n)]$

(3) 将(1)、(2)的结果加以比较, 得出相应的结论。

分析

根据 DTFT 和 DFT 的定义求解。

解

$$(1) X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^4 x(n)e^{-j\omega n} = 2 + e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + 3e^{-j4\omega}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^4 x(n)W_5^{nk} = 2 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + 4e^{-j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{-j\frac{6\pi}{5}k} + 3e^{-j\frac{8\pi}{5}k}$$

由此可知两者的关系为 $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{5}k}$, 即 $X(k)$ 为 $X(e^{j\omega})$ 在频率 $\omega = \frac{2\pi}{5}k$ 处的抽样值。

$$(2) X_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^4 x_0(n)e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) = 2 + e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 2e^{-j3\omega} + 3e^{-j4\omega}$$

$$X_0(k) = \sum_{n=0}^7 x_0(n)W_8^{nk} = 2 + e^{-j\frac{\pi}{4}k} + 4e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 2e^{-j\frac{3\pi}{4}k} + 3e^{-j\pi k}$$

(3) 由(1)、(2)结论可知, 对 DTFT, 序列补零后 DTFT 不变, 即 $X_0(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$, 对 DFT, 序列补零后改变了 DFT 的点数, 从而改变了抽样的位置, 因此补零之后的序列的 DFT 与原序列的 DFT 不同。

3.7(3.7) 设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列, 则它一定也是周期为 $2N$ 的周期序列。

若

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk}, \quad \tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} \tilde{x}(n)W_{2N}^{nk}$$

试用 $\tilde{X}(k)$ 来表示 $\tilde{X}_1(k)$ 。

分析

根据 DFT 的性质求解。

解

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(k) &= \sum_{n=0}^{2N-1} \tilde{x}(n)W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_{2N}^{nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} \tilde{x}(n)W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{\frac{k}{2}} + \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n-N)W_{2N}^{(n-N)k} \\ &= \tilde{X}\left(\frac{1}{2}k\right) + W_{2N}^{-Nk} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{\frac{k}{2}} \\ &= \tilde{X}\left(\frac{1}{2}k\right) + \cos(\pi k) \tilde{X}\left(\frac{1}{2}k\right) = \begin{cases} 2\tilde{X}\left(\frac{1}{2}k\right), & k \text{ 为偶数} \\ 0, & k \text{ 为奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

3.8(3.8) 图 P3.8 画出了几个周期序列 $\tilde{x}(n)$, 这些序列可以表示成傅里叶级数

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j(2\pi/N)nk}$$

问:

- (1) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ 成为实数?
- (2) 哪些序列能够通过选择时间原点使所有的 $\tilde{X}(k)$ [除 $\tilde{X}(0)$ 外] 成为虚数?
- (3) 哪些序列能做到 $\tilde{X}(k) = 0, k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$

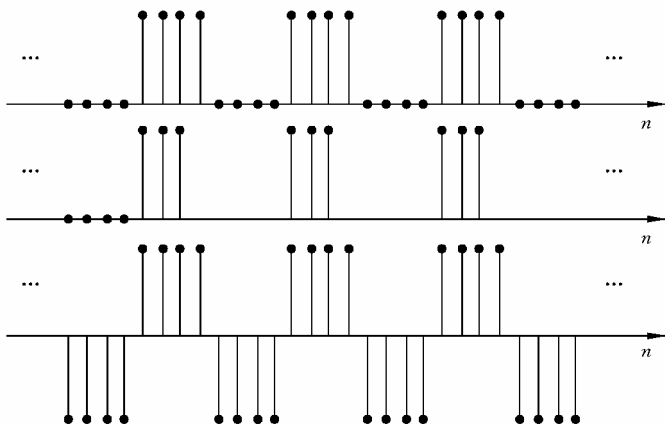


图 P3.8

分析

对于(1)、(2), 要利用 DFS 的对称性质来求解。(1) 要求 $\tilde{X}(k)$ 为实数, 则 $\tilde{x}(n)$ 应为实部偶对称, 虚部奇对称, 但 $\tilde{x}(n)$ 只有实部, 因此必须满足实偶对称条件 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(-n)$ 。(2) 要求 $\tilde{X}(k)$ 为纯虚数, 则 $\tilde{x}(n)$ 应满足实部奇对称、虚部偶对称, 但已知 $\tilde{x}(n)$ 为实序列, 故应满足奇对称条件 $\tilde{x}(n) = -\tilde{x}(-n)$ 。(3) 则必须求出每个序列的 $\tilde{X}(k)$, 看它是否满足所给条件。

解

- (1) 要使 $\tilde{X}(k)$ 为实数, 即要求

$$\tilde{X}^*(k) = \tilde{X}(k)$$

根据 DFT 的性质, $\tilde{x}(n)$ 应满足实部偶对称, 虚部奇对称 (以 $n=0$ 为轴)。又由图知, $\tilde{x}(n)$ 为实序列, 虚部为零, 故 $\tilde{x}(n)$ 应满足偶对称

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(-n)$$

即 $\tilde{x}(n)$ 是以 $n=0$ 为对称轴的偶对称, 可看出第二个序列满足这个条件。

如图 P3.8(1) 所示。

- (2) 要使 $\tilde{X}(k)$ 为虚数, 即要求

$$\tilde{X}^*(k) = -\tilde{X}(k)$$

根据 DFT 的性质, $\tilde{x}(n)$ 应满足实部奇对称, 虚部偶对称 (以 $n=0$ 为轴), 又已知 $\tilde{x}(n)$ 为实序

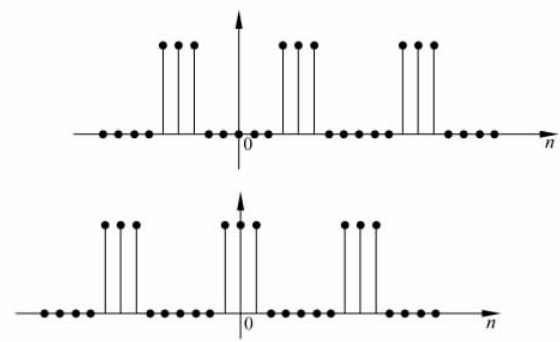


图 P3.8(1)

列,故

$$\tilde{x}(n) = -\tilde{x}(-n)$$

即 $\tilde{x}(n)$ 应该是以 $n=0$ 为对称轴的奇对称序列,所以这三个序列都不满足这个条件。

(3) 由于是 8 点周期序列,对于第一个序列有

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当 $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ 时, $\tilde{X}_1(k) = 0$ 。

对于第二个序列有

$$\tilde{X}_1(k) = \sum_{n=0}^2 e^{-j\frac{\pi}{4}nk} = \frac{1 - e^{-j\frac{3}{4}\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当 $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ 时, $\tilde{X}_1(k) \neq 0$ 。

对于第三个序列有

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) - \tilde{x}_1(n+4)$$

根据序列移位性质可知

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) - e^{-j\pi k} \tilde{X}_1(k) = (1 - e^{j\pi k}) \frac{1 - (-1)^k}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

当 $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ 时, $\tilde{X}_3(k) = 0$ 。

综上所述,第一个和第三个序列满足 $\tilde{X}(k) = 0, k = \pm 2, \pm 4, \dots$

3.9(3.9) 图 P3.9 画出了两个有限长序列,试画出它们的 6 点圆周卷积。

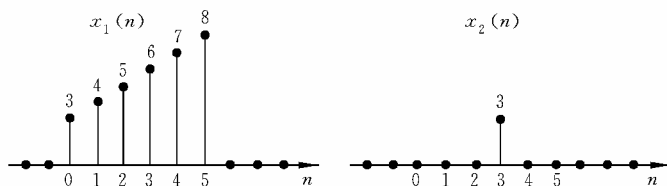


图 P3.9

分析

该题可以直接利用圆周卷积公式求解,也可以用以下方法求解。由

$$\tilde{x}_1(n) = x_1((n))_6, \quad \tilde{x}_2(n) = x_2((n))_6 = 3\delta((n-3))_6$$

得

$$\begin{aligned} y(n) &= [\tilde{x}_1(n) * \tilde{x}_2(n)]R_6(n) \\ &= [x_1((n))_6 * 3\delta((n-3))_6]R_6(n) \\ &= 3x_1((n-3))_6R_6(n) \end{aligned}$$

解

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^5 x_1(m)x_2((n-m))_6 \right]R_6(n)$$

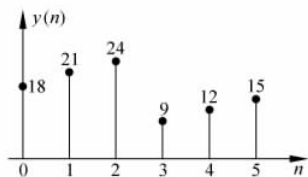


图 P3.9(1)

结果如图 P3.9(1)所示。

3.10(3.10) 图 P3.10 表示一个 5 点序列 $x(n)$, 试画出:

- (1) $x(n) * x(n)$ (2) $x(n) \textcircled{5} x(n)$ (3) $x(n) \textcircled{10} x(n)$

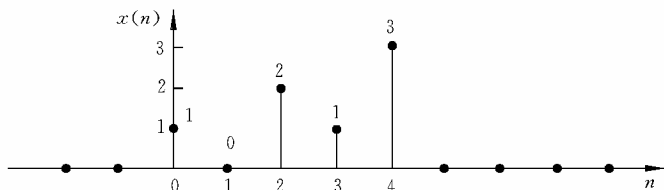


图 P3.10

分析

分别按定义求解。但应注意 $x(n)$ 是 5 点序列, 故 $x(n) * x(n)$ 是 $5+5-1=9$ 点序列, 因此, $x(n) \textcircled{10} x(n)$ 的前 9 个点 ($n=0, 1, \dots, 8$) 就是 $x(n) * x(n)$ 值, 后一个点 ($n=9$) 为零值, 因为 L 点圆周卷积等于线性卷积结果的 L 点周期延拓、混叠相加后的主值区间内的序列 (L 可以是任意整数)。

解

各小题的结果分别如图 P3.10(1)、(2)、(3)所示。

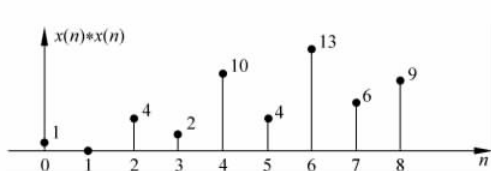


图 P3.10(1)

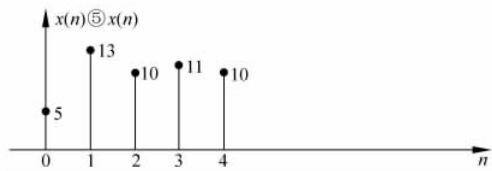


图 P3.10(2)

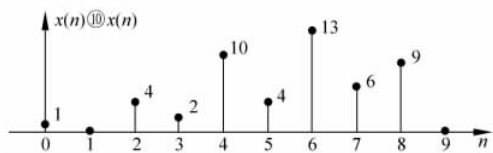


图 P3.10(3)

3.11(3.11) 设抽样频率为 720Hz 的时域抽样序列为

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)$$

对 $x(n)$ 作 72 点 DFT 运算。

(1) 问所选 72 点截断是否能保证得到周期序列? 说明理由。

(2) 是否会产生频谱泄漏? 请粗略画出信号谱线, 并做说明。

分析

按离散周期序列的一个周期或其整数倍截断可避免产生频谱的泄漏。

解

(1) 考查各个频率分量信号, 对 $\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$, 其周期为 $T_1 = 2\pi/(\pi/6) = 12$ 。

对 $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$, 其周期为 $T_2 = 2\pi/\frac{\pi}{3} = 6$

对 $\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)$, 其周期为 $T_3 = 2\pi/\frac{\pi}{7} = 14$

因此序列的周期为 T_1 、 T_2 、 T_3 的最小公倍数, 即 $T = 84$ 。

由此可知, 如果对给定序列进行 72 点截断不能得到周期序列。

(2) 由于时域的 $N = 72$ 点序列不是给定周期序列的周期整数倍, 进行频谱分析时, 其频谱的周期延拓不再是周期序列, 因此一定会产生频谱泄漏。

将给定序列作 72 点 DFT 所得频谱如图 P3.11 所示。

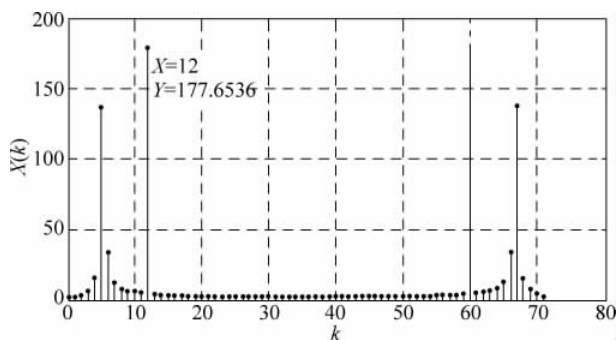


图 P3.11

按 $f = \omega f_s / (2\pi)$, 可求得 $x(n)$ 中的三个正弦信号频率分别为 51.4Hz, 60Hz, 120Hz。

由图可知, 当 $k = 4$, 即 $f_4 = 4f_s/72 = 40\text{Hz}$ 处有值。

当 $k = 5$, 即 $f_5 = 5f_s/72 = 50\text{Hz}$ 处有值, 而 $\sin\left(\frac{\pi}{7}n\right)$ 的频率为 51.4Hz。

当 $k = 6$, 即 $f_6 = 6f_s/72 = 60\text{Hz}$ 处有值, 对应 $\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$ 分量。

当 $k = 12$, 即 $f_{12} = 12f_s/72 = 120\text{Hz}$ 处有值, 对应 $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$ 分量。

所以说作 72 点 DFT 时出现了频谱泄漏。

3.12(3.12) 设有两个序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq 14 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

各作 15 点的 DFT,然后将两个 DFT 相乘,再求乘积的 IDFT,设所得结果为 $f(n)$,问 $f(n)$ 的哪些点(用序号 n 表示)对应于 $x(n) * y(n)$ 应该得到的点。

分析

该题是在时域作圆周卷积。如上题那样分析,设线性卷积结果序列有 N 点,若作 L 点圆周卷积,则应将线性卷积结果以 L 点为周期作周期延拓、混叠相加,然后再取主值区间($n=0 \sim L-1$)的序列,该序列即为 L 点圆周卷积结果。混叠点数为 $N-L$ (这里 $N-L=5$),故在 $n=0 \sim N-L-1$ (此题为 $n=0 \sim 4$)处发生混叠, $n=N-L$ 到 $N=L-1$ 点处,圆周卷积结果相当于线性卷积结果。

解

序列 $x(n)$ 的点数为 $N_1=6$, $y(n)$ 的点数为 $N_2=15$,故 $x(n) * y(n)$ 的点数为

$$N = N_1 + N_2 - 1 = 20$$

又 $f(n)$ 为 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的 15 点的圆周卷积,即 $L=15$ 。所以,混叠点数为 $N-L=20-15=5$ 。即线性卷积以 15 为周期延拓形成圆周卷积序列 $f(n)$ 时,一个周期内在 $n=0$ 到 $n=4(=N-L-1)$ 这 5 点处发生混叠,即 $f(n)$ 中只有 $n=5$ 到 $n=14$ 的点对应于 $x(n) * y(n)$ 应该得到的点。

3.13(3.13) 已知两个有限长序列为

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} -1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 1, & 5 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

试用图表示 $x(n)$ 、 $y(n)$ 以及 $f(n)=x(n) \textcircled{*} y(n)$ 。

分析

直接利用圆周卷积公式求解。

解

结果如图 P3.13 所示。

3.14(3.14) 已知 $N=7$ 点的实序列的 DFT 在偶数点的值为 $X(0)=4.8$, $X(2)=3.1+j2.5$, $X(4)=2.4+j4.2$, $X(6)=5.2+j3.7$ 。

求 DFT 在奇数点的数值。

分析

根据实序列的 DFT 满足圆周共轭对称性质($X(k)=X^*(N-k)$)求解。

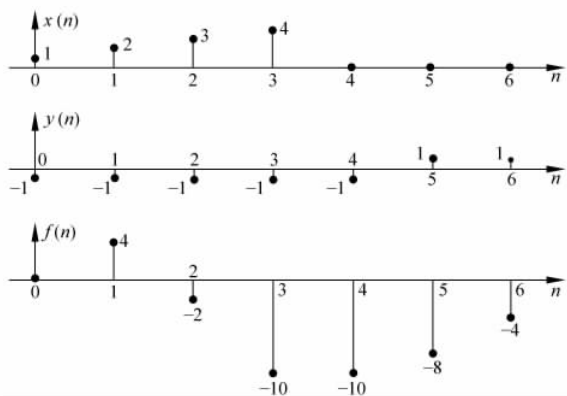


图 P3.13

解

由于 $x(n)$ 为实序列, 且 $N=7$, 因此由实序列 DFT 的圆周共轭对称性质, 可求得

$$X(1) = X^*(7-1) = X^*(6) = 5.2 - j3.7$$

$$X(3) = X^*(7-3) = X^*(4) = 2.4 - j4.2$$

$$X(5) = X^*(7-5) = X^*(2) = 3.1 - j2.5$$

$$X(7) = X^*(7-7) = X^*(0) = 4.8$$

3.15(3.15) 设 $x(n)$ 为 $N=6$ 点的实有限长序列

$$x(n) = \{1, 2, 4, 3, 0, 5\}$$

试确定以下表达式的数值, 并用 MATLAB 计算 DFT 进行验证。

$$(1) X(0) \quad (2) X(3) \quad (3) \sum_{k=0}^5 X(k) \quad (4) \sum_{k=0}^5 |X(k)|^2$$

分析

(1)、(2) 由 DFT 基本性质求解; (3) 根据实序列 DFT 的圆周共轭对称性质求解;
(4) 根据 DFT 形式下的帕塞瓦定理求解。

解

$$(1) X(0) = \sum_{n=0}^5 x(n) W_6^{n \cdot 0} = \sum_{n=0}^5 x(n) = 1 + 2 + 4 + 3 + 0 + 5 = 15$$

$$(2) X(3) = \sum_{n=0}^5 x(n) W_6^{3n} = 1W_6^0 + 2W_6^3 + 4W_6^6 + 3W_6^9 + 5W_6^{15} = -5$$

(3) 由 $x(n)$ 为实序列, 根据实序列 DFT 的圆周共轭对称性质, 有 $X(k) = X^*(N-k)$
所以 $X(5) = X^*(1), X(4) = X^*(2)$

$$\begin{aligned} \text{因此 } X(1) + X(5) &= X(1) + X^*(1) = \sum_{n=0}^5 x(n) W_6^n + \sum_{n=0}^5 x(n) W_6^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^5 x(n) (e^{-j\frac{\pi}{3}n} + e^{j\frac{\pi}{3}n}) = 2 \sum_{n=0}^5 x(n) \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \\ &= 2 \left[x(0) + x(1) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + x(2) \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + x(3) \cos(\pi) + \right. \\ &\quad \left. x(4) \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + x(5) \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) \right] = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X(2) + X(4) &= X(2) + X^*(2) = \sum_{n=0}^5 x(n)W_6^{2n} + \sum_{n=0}^5 x(n)W_6^{-2n} \\
 &= 2 \sum_{n=0}^5 x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^5 X(k) &= X(0) + X(1) + X(2) + X(3) + X(4) + X(5) \\
 &= 15 - 1 - 3 - 5 = 6
 \end{aligned}$$

(4) 根据 DFT 形式下的帕塞瓦定理,有

$$\sum_{k=0}^5 |X(k)|^2 = 6 \sum_{n=0}^5 |x(n)|^2 = 6 \times 55 = 330$$

MATLAB 程序及运行结果如下,从运行结果可知以上求解是正确的。

```

clear all;clc
n = 1:6; xn = [1,2,4,3,0,5];
N = length(n);
[Xk] = dft(xn,N);
y1 = Xk(1)
y2 = Xk(4)
y3 = sum(Xk)
y4 = sum(abs(Xk).^2)

y1 = 15
y2 = -5.0000 - 0.0000i
y3 = 6.0000 - 0.0000i
y4 = 330.0000

```

3.16(3.16) 已知 $X(k)$ 为 8 点实序列的 DFT,且已知

$$X(0)=6, \quad X(1)=4+j3, \quad X(2)=-3-j2, \quad X(3)=2-j, \quad X(4)=4$$

试利用 DFT 的性质(不必求 IDFT)来确定以下各表达式的值。

$$(1) x(0) \quad (2) x(4) \quad (3) \sum_{n=0}^7 x(n) \quad (4) \sum_{n=0}^7 |x(n)|^2$$

分析

第(1)、(2)、(3)问根据实序列 DFT 的圆周共轭对称性质及圆周移位性质求解;第(4)问根据 DFT 形式的帕塞瓦定理求解。

解

由于 $x(n)$ 为实序列,由实序列 DFT 的圆周共轭对称性质可得

$$X(5) = X^*(3) = 2 + j$$

$$X(6) = X^*(2) = -3 + j2$$

$$X(7) = X^*(1) = 4 - j3$$

$$\begin{aligned}
 (1) x(0) &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X(k)W_8^{-0 \cdot k} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X(k) = \frac{1}{8} (6 + 4 + j3 - 3 - j2 + 2 - j + 4 + 2 + \\
 &\quad j - 3 + j2 + 4 - j3) = 2
 \end{aligned}$$

(2) 根据实序列 DFT 的圆周移位性质, 对

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

有

$$X_m(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}km} X(k)$$

因此

$$\begin{aligned} x(4) = x_4(0) &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_4(k) W_8^{-nk} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 e^{j\frac{2\pi}{8}4k} X(k) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 (-1)^k X(k) \\ &= \frac{1}{8} (6 - 4 - j3 - 3 - j2 - 2 + j + 4 - 2 - j - 3 + j2 - 4 + j3) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$(3) \sum_{n=0}^7 x(n) = \sum_{n=0}^7 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} \Big|_{k=0} = X(0) = 6$$

(4) 根据 DFT 形式下的帕塞瓦定理, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^7 |x(n)|^2 &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 |X(k)|^2 \\ &= \frac{1}{8} [6^2 + 2(4^2 + 3^2) + 2(3^2 + 2^2) + 2(2^2 + 1) + 4^2] = 17.25 \end{aligned}$$

3.17(3, 17) 已知 $x(n)$ 是 N 点的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$ 。现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零值点, 得到一个 rN 点的有限长序列

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

试求 rN 点 DFT $[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

分析

利用 DFT 定义求解。 $y(n)$ 是 rN 点序列, 因而结果相当于在频域序列进行插值。

解

由

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

可得

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{i=0}^{N-1} x(ir/r) W_{rN}^{irk} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W_N^{ik}, \quad 0 \leq k \leq rN-1 \end{aligned}$$

因而

$$Y(k) = X((k))_N R_{rN}(k)$$

所以 $Y(k)$ 是将 $X(k)$ (周期为 N) 以 N 为周期延拓 r 次而形成的序列, 而 $Y(k)$ 的周期为 rN 。

3.18(3.18) 频谱分析的模拟信号以 8kHz 被抽样,计算了 512 个抽样的 DFT,试确定频谱抽样之间的频率间隔。

分析

利用频域抽样间隔 F_0 和时域抽样频率 f_s 以及抽样点数 N 的关系 $f_s = NF_0$ 。

证明

由

$$f_s = \frac{\Omega_s}{2\pi}, \quad F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

得

$$\frac{f_s}{F_0} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0}$$

其中 Ω_s 是以角频率为变量的频谱的周期, Ω_0 是频谱抽样之间的频谱间隔。

又

$$\frac{f_s}{F_0} = \frac{\Omega_s}{\Omega_0} = N$$

则

$$F_0 = \frac{f_s}{N}$$

对于本题有

$$f_s = 8\text{kHz}, \quad N = 512$$

所以

$$F_0 = \frac{8000}{512} = 15.625\text{Hz}$$

3.19(3.19) 设有一谱分析用的信号处理器,抽样点数必须为 2 的整数幂,假定没有采用任何特殊数据处理措施,要求频率分辨率 $\leq 10\text{Hz}$,如果采用的抽样时间间隔为 0.1ms ,试确定:

- (1) 最小记录长度;
- (2) 所允许处理的信号的最高频率;
- (3) 在一个记录中的最少点数。

分析

抽样间隔 T 和抽样频率 f_s 满足 $f_s = 1/T$, 记录长度 T_0 和频域分辨力 F_0 的关系为 $T_0 = 1/F_0$, 抽样定理为 $f_s > 2f_h$ (f_h 为信号最高频率分量), 一个记录中最少的抽样总数 N 满足

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0} > \frac{2f_h}{F_0}$$

解

- (1) 因为 $T_0 = \frac{1}{F_0}$, 而 $F_0 \leq 10\text{Hz}$, 所以

$$T_0 \geq \frac{1}{10}\text{s}$$

即最小记录长度为 0.1s 。

(2) 因为 $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.1} \times 10^3 = 10\text{kHz}$, 而

$$f_s > 2f_h$$

所以

$$f_h < \frac{1}{2}f_s = 5\text{kHz}$$

即允许处理的信号的最高频率为 5kHz 。

(3) $N \geq \frac{T_0}{T} = \frac{0.1}{0.1} \times 10^3 = 1000$, 又因 N 必须为 2 的整数幂, 所以一个记录中的最少点数为 $N = 2^{10} = 1024$ 。

3.20 有一调幅信号

$$x_a(t) = [1 + \cos(2\pi \times 100t)]\cos(2\pi \times 600t)$$

用 DFT 做频谱分析, 要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量, 问

(1) 抽样频率应为多少赫兹(Hz)?

(2) 抽样时间间隔应为多少秒(s)?

(3) 抽样点数应为多少点?

(4) 若用 $f_s = 3\text{kHz}$ 频率抽样, 抽样数据为 512 点, 做频谱分析, 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 512 点, 并粗略画出 $X(k)$ 的幅频特性 $|X(k)|$, 标出主要点的坐标值。

分析

根据时域抽样定理, 时域抽样频率 f_s 应满足大于等于信号最高频率的 2 倍, 即

$$f_s \geq 2f_h$$

长度为 N 的信号序列对应的频谱中能分辨的两个最小频率分量峰值的最小频率间隔 F_0 为频率分辨率, 它与数据长度 T_0 成反比。若不做数据补零处理, 则时域抽样点数 N 与 T_0 的关系为

$$T_0 = NT = \frac{N}{f_s} = \frac{1}{F_0}$$

解

(1) 原时域模拟信号可表示为

$$x_a(t) = \cos(2\pi \times 600t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi \times 500t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi \times 700t)$$

因此信号中含 3 个频率分量, 分别为

$$f_1 = 600\text{Hz}, \quad f_2 = 500\text{Hz}, \quad f_3 = 700\text{Hz}$$

所以要求

$$f_s > 2f_3 = 1400\text{Hz}$$

考虑到要使抽样后的离散序列为周期序列, 可知 f_s 应为

$$f_s = 3f_3 = 2100\text{Hz}$$

(2) 根据抽样时间间隔与抽样频率的关系, 有

$$T = 1/f_s = \frac{1}{2100}\text{s}$$

(3) 在 $f_s = 2100\text{Hz}$ 时, 抽样所得到的离散序列为

$$x(n) = x_a(t) \big|_{t=nT} = \cos\left(\frac{4\pi}{7}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{10\pi}{21}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

这里有 3 个频率分量, 且

$$\frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \times \frac{7}{4\pi} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \times \frac{21}{10\pi} = \frac{21}{5}$$

$$\frac{2\pi}{\omega_3} = 2\pi \times \frac{3}{2\pi} = 3$$

可知其最小公倍数为 $N=21$, 故 $x(n)$ 的周期 $N=21$ 。

一个周期的数据长度为

$$T_0 = NT = 21 \times \frac{1}{2100} = 10^{-2}\text{s}$$

当抽样点数为周期的整数倍时, 不会产生频谱泄漏。

由于题目给定的信号中最小频率间隔为 $(f_1 - f_2 = 100\text{Hz})$, 所以

$$F_0 = 100\text{Hz}$$

为此所需的数据长度为

$$T_0 = \frac{1}{F_0} = 10^{-2}\text{s}$$

与一个周期的数据长度相同, 因此可取抽样点数为一个周期点数, 即

$$N = 21$$

(4) 采用 MATLAB 方法做频谱分析, 程序如下。

```
clear all;clc
N1 = 21;           % 抽样频率 fs = 2100Hz, 抽样点 N = 21
n1 = [0:1:N1-1]; k1 = [0:1:N1-1];
xn1 = cos(4 * (pi/7) * n1) + 0.5 * cos(2 * (pi/3) * n1) + 0.5 * cos(10 * (pi/21) * n1);
WN1 = exp(-j * 2 * pi/N1); nk1 = n1' * k1;
WNNk1 = WN1.^nk1; Xk1 = xn1 * WNNk1;
X1 = abs(Xk1);
subplot(2,1,1); stem(k1, X1, '.'); grid
xlabel('K'); title('幅频特性曲线(K=21, fs=2100Hz)'); ylabel('|X(k)|')
N2 = 512;          % 抽样频率 fs = 3000Hz, 抽样点 N = 512
n2 = [0:1:N2-1]; k2 = [0:1:N2-1];
xn2 = cos(2 * (pi/5) * n2) + 0.5 * cos(7 * (pi/15) * n2) + 0.5 * cos((pi/3) * n2);
WN2 = exp(-j * 2 * pi/N2); nk2 = n2' * k2;
WNNk2 = WN2.^nk2; Xk2 = xn2 * WNNk2;
X2 = abs(Xk2);
subplot(2,1,2); stem(k2, X2, '.'); grid
xlabel('K'); title('幅频特性曲线(K=512, fs=3000Hz)'); ylabel('|X(k)|')
```

程序运行结果如图 P3.20 所示。

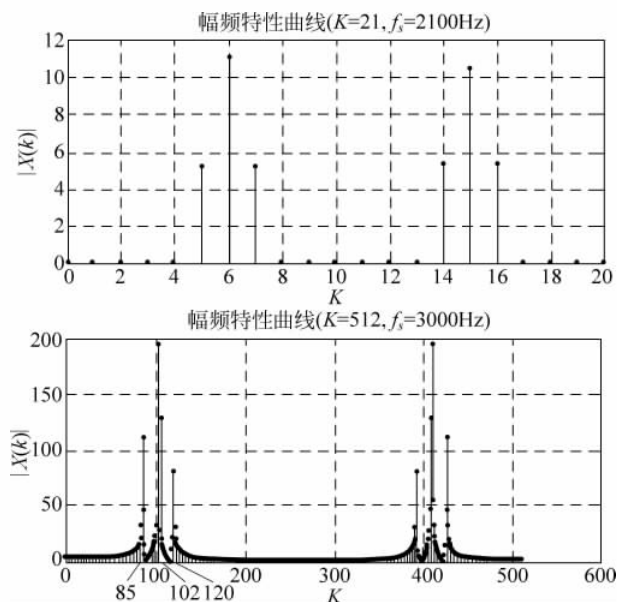


图 P3.20

这里打印出 $k=81$ 到 $k=120$ 时幅频响应的数值。

```
x2 = [ ... 11.5133 13.2232 15.8664 20.6234 32.2084 111.87 46.6111 14.5154
        6.19207 2.14438 0.42441 2.35043 3.98513 5.51921 7.08713 8.81539
        10.8599 13.4581 17.038 22.5099 32.2805 55.6074 194.255 128.402
        47.4118 28.5095 19.9393 14.9436 11.5842 9.08826 7.07816 5.33544
        3.7085 2.06414 0.247381 1.97959 5.08328 10.2444 21.815 81.3441 ...]
```

从图中可以看出,对 $f_s=2100\text{Hz}$, $N=21$ 的频谱,

$$k=5 \text{ 时, 对应 } f_1 = \frac{5}{21}f_s = 500\text{Hz}$$

$$k=6 \text{ 时, 对应 } f_2 = \frac{6}{21}f_s = 600\text{Hz}$$

$$k=7 \text{ 时, 对应 } f_3 = \frac{7}{21}f_s = 700\text{Hz}$$

可知没有出现频率泄漏,频率分辨率达到要求。

对 $f_s=3000\text{Hz}$, $N=512$ 的频谱,

$k=85, f_1 = \frac{85}{512}f_s = 498.047\text{Hz}$; $k=86, f_1 = \frac{86}{512}f_s = 503.9\text{Hz}$, 故 500Hz 频率分量在这两个频率之间。

$k=102, f_2 = \frac{102}{512}f_s = 597.656\text{Hz}$; $k=103, f_2 = \frac{103}{512}f_s = 603.516\text{Hz}$, 故 600Hz 频率分量在这两个频率之间。

$k=119, f_3 = \frac{119}{512}f_s = 697.265\text{Hz}$; $k=120, f_3 = \frac{120}{512}f_s = 703.125\text{Hz}$, 故 700Hz 频率分量在这两个频率之间。

频率分辨率能够满足要求,但出现了少量的频谱泄漏。原因在于所取序列点数不是序列周期的整数倍。

(3.20) 试用一个 N 点 DFT 计算一个 $2N$ 点的实序列 DFT。

分析

通过将 $2N$ 点实序列的前 N 点作为 N 点 DFT 输入的实部,后 N 点作为 N 点 DFT 输入的虚部,形成一个 N 点复序列,对该 N 点复序列求 DFT,再根据 DFT 的共轭对称性,求得 $2N$ 点的 DFT。

解

设 $x(n)$ 为 $2N$ 点的实序列。

$x_1(n) = x(n)R_N(n)$ 表示 $x(n)$ 的前 N 点;

$x_2(n) = x(n+N)R_N(n)$ 表示 $x(n)$ 的后 N 点;

将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 构造成一个复序列,即

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

则

$$\begin{aligned} \text{DFT}[w(n)] &= W(k) = \text{DFT}[x_1(n) + jx_2(n)] \\ &= \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

其中 $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$, $X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)]$, 分别为 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 的 DFT。

由于 $x_1(n) = \text{Re}[w(n)]$, 由教程式(3.4.26)可得

$$X_1(k) = \text{DFT}\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) = \frac{1}{2}[W(k) + W^*(N-k)]$$

同理, 由于 $x_2(n) = \text{Im}(w(n))$, 由教程式(3.4.27)可得

$$X_2(k) = \text{DFT}\{\text{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*(N-k)]$$

因此 $x(n)$ 的 DFT 可表示为

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_{2N}^{nk} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{\frac{n}{2}k} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n+N)W_{2N}^{(n+N)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{\frac{n}{2}k} + W_{2N}^{Nk} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W_N^{\frac{n}{2}k} = X_1\left(\frac{k}{2}\right) + e^{-j\pi k} X_2\left(\frac{k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[W\left(\frac{k}{2}\right) + W^*\left(N - \frac{k}{2}\right)\right] + e^{-j\pi k} \frac{1}{2j}\left[W\left(\frac{k}{2}\right) - W^*\left(N - \frac{k}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}[1 + e^{-j\pi(k+\frac{1}{2})}]W\left(\frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2}[1 + e^{-j\pi(k-\frac{1}{2})}]W^*\left(N - \frac{k}{2}\right) \end{aligned}$$

3.21(3.21) 已知序列 $x(n) = 3\delta(n) + 5\delta(n-2) + 4\delta(n-4)$, 则可求出 8 点 DFT 为 $X(k)$

(1) 若 $y(n)$ ($0 \leq n \leq 7$) 的 8 点 DFT 为 $Y(k) = W_8^{3k} X(k)$, $0 \leq k \leq 7$, 求 $y(n)$;

(2) 若 $w(n)$ ($0 \leq n \leq 7$) 的 8 点 DFT 为 $W(k) = \text{Re}[X(k)]$, $0 \leq k \leq 7$, 求 $w(n)$;

(3) 若 $u(n)$ ($0 \leq n \leq 3$) 的 4 点 DFT 为 $U(k) = X(2k)$, $0 \leq k \leq 3$, 求 $u(n)$ 。

分析

根据 DFT 的基本性质求解。

解

由 $x(n) = 3\delta(n) + 5\delta(n-2) + 4\delta(n-4)$

可知 $x(n) = \{3, 0, 5, 0, 4\}$ 。

因此

$$X(k) = 3W_8^0 + 5W_8^{2k} + 4W_8^{4k}$$

$$(1) Y(k) = W_8^{3k} X(k) = 3W_8^{3k} + 5W_8^{5k} + 4W_8^{7k} = \sum_{n=0}^7 y(n) W_8^{nk}$$

所以

$$y(n) = \{0, 0, 0, 3, 0, 5, 0, 4\}$$

$$(2) W(k) = \text{Re}[X(k)] = 3 + \text{Re}[5W_8^{2k}] + \text{Re}[4W_8^{4k}]$$

$$= 3 + 5\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) + 4\cos(\pi k)$$

$$= 3 + \frac{5}{2}(e^{j\frac{\pi}{2}k} + e^{-j\frac{\pi}{2}k}) + 2(e^{j\pi k} + e^{-j\pi k})$$

$$= 3 + \frac{5}{2}W_8^{2k} + \frac{5}{2}W_8^{-2k} + 2W_8^{4k} + 2W_8^{-4k}$$

由于

$$W_N^{-nk} = W_N^{(N-n)k}$$

所以

$$W(k) = 3 + \frac{5}{2}W_8^{2k} + 4W_8^{4k} + \frac{5}{2}W_8^{6k} = \sum_{n=0}^7 w(n) W_8^{nk}$$

由此可求得

$$w(n) = \left\{3, 0, \frac{5}{2}, 0, 4, 0, \frac{5}{2}, 0\right\}$$

$$(3) U(k) = X(2k) = 3 + 5W_8^{4k} + 4W_8^{8k}$$

由于

$$W_8^{8k} = W_8^0 = 1 = W_4^0$$

$$W_8^{4k} = W_4^{2k}$$

所以

$$U(k) = 7W_4^0 + 5W_4^{2k} = \sum_{n=0}^3 u(n) W_4^{nk}$$

由此可求得

$$u(n) = \{7, 0, 5, 0\}$$

$$3.22 \quad \text{已知 } X_1(k) = \begin{cases} 5, & k=0 \\ 2, & 1 \leq k \leq 7 \end{cases}, \quad X_2(k) = \begin{cases} 4, & k=5 \\ 1, & 1 \leq k \leq 4, 6 \leq k \leq 9 \end{cases}$$

求

$$x_1(n) = \text{IDFT}[X_1(k)], 8 \text{ 点}$$

$$x_2(n) = \text{IDFT}[X_2(k)], 10 \text{ 点}$$

分析

根据 IDFT 的定义

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

来求解。

解

$$(1) x_1(n) = \text{IDFT}[X_1(k)] = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_1(k) W_8^{-nk}$$

$$x_1(0) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_1(k) = \frac{1}{8} (5 + 2 \times 7) = \frac{19}{8}$$

$$\begin{aligned} x_1(1) &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_1(k) W_8^{-nk} \Big|_{n=1} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_1(k) e^{j\pi k/4} \\ &= \frac{1}{8} [X_1(0) + e^{j\frac{\pi}{4}} X_1(1) + e^{j\frac{\pi}{2}} X_1(2) + e^{j\frac{3\pi}{4}} X_1(3) + e^{j\pi} X_1(4) + e^{j\frac{5\pi}{4}} X_1(5) + \\ &\quad e^{j\frac{3\pi}{2}} X_1(6) + e^{j\frac{7\pi}{4}} X_1(7)] \\ &= \frac{1}{8} [5 + 2(e^{j\frac{\pi}{4}} + j + e^{j\frac{3\pi}{4}} - 1 + e^{-j\frac{3\pi}{4}} - j + e^{-j\frac{\pi}{4}})] \\ &= \frac{1}{8} [5 - 2] \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(2) &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X_1(k) W_8^{-nk} \Big|_{n=2} = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 e^{j\frac{2\pi}{8} \cdot 2k} X_1(k) \\ &= \frac{1}{8} [X_1(0) + e^{j\frac{\pi}{2}} X_1(1) + e^{j\pi} X_1(2) + e^{j\frac{3\pi}{2}} X_1(3) + e^{j2\pi} X_1(4) + e^{j\frac{5\pi}{2}} X_1(5) + \\ &\quad e^{j3\pi} X_1(6) + e^{j\frac{7\pi}{2}} X_1(7)] \\ &= \frac{1}{8} [5 + 2(j - 1 - j + 1 + j - 1 - j)] \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$x_1(3) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 e^{j\frac{3\pi}{4}k} X_1(k) = \frac{3}{8}$$

$$x_1(4) = \frac{3}{8}$$

$$x_1(5) = \frac{3}{8}$$

$$x_1(6) = \frac{3}{8}$$

$$x_1(7) = \frac{3}{8}$$

所以

$$x_1(n) = \begin{cases} \frac{19}{8}, & n = 0 \\ \frac{3}{8}, & 1 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x_2(n) &= \text{IDFT}[X_2(k)] = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^4 X_2(k) W_{10}^{-nk} \\
 &= \frac{1}{10} [W_{10}^{-n} + W_{10}^{-2n} + W_{10}^{-3n} + W_{10}^{-4n} + 4W_{10}^{-5n} + W_{10}^{-6n} + W_{10}^{-7n} + W_{10}^{-8n} + W_{10}^{-9n}] \\
 &= \frac{1}{10} \left[2\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right) + 4\cos(\pi n) \right] \\
 &= \frac{2}{5} \left[\cos(\pi n) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}n\right) \right]
 \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
 x_2(0) &= \frac{6}{5} \\
 x_2(1) &= -\frac{2}{5} \\
 x_2(2) &= \frac{2}{5} \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} \right) \\
 x_2(3) &= -\frac{2}{5} \\
 x_2(4) &= \frac{2}{5} \left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} \right) \\
 x_2(5) &= -\frac{2}{5} \\
 x_2(6) &= \frac{2}{5} \left(1 - 2\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5} \right) \\
 x_2(7) &= -\frac{2}{5} \\
 x_2(8) &= \frac{2}{5} \left(1 - 2\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5} \right) \\
 x_2(9) &= -\frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

(3.22) (1) 设有两个周期序列 $\tilde{x}_1(n)$ 的周期为 N_1 , $\tilde{x}_2(n)$ 的周期为 N_2 。试求 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n)$ 的周期;

(2) 若 $\tilde{X}_1(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)]$, N_1 点, $\tilde{X}_2(k) = \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)]$, N_2 点, 试求 $\tilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{y}(n)]$ 。

分析

(1) 周期信号的和仍为周期信号, 且周期为原来各信号周期的最小公倍数。

(2) 根据 DFS 的线性和周期性求解。

解

(1) 由 $\tilde{x}_1(n)$ 的周期为 N_1 , $\tilde{x}_2(n)$ 的周期为 N_2 , 可知 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n)$ 也为周期信号, 且 $\tilde{y}(n)$ 的周期为 N_1, N_2 的最小公倍数。若 N_1 与 N_2 互素, 则 $\tilde{y}(n)$ 的周期为

$$N = N_1 N_2$$

(2) 由 DFS 的线性性质, 可知

$$\tilde{Y}(k) = \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \text{DFS}[\tilde{x}_1(n) + \tilde{x}_2(n)]$$

$$= \text{DFS}[\tilde{x}_1(n)] + \text{DFS}[\tilde{x}_2(n)] = \tilde{X}_1(k) + \tilde{X}_2(k)$$

根据 DFS 的周期性质,如果 $\tilde{x}(n)$ 为 N 点周期序列,则 $\text{DFS}[\tilde{x}(n)]$ 也为周期序列且周期为 N 。

由此可知 $\tilde{X}_1(k)$ 的周期为 N_1 , $\tilde{X}_2(k)$ 的周期为 N_2 , 根据(1)的结论, $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) + \tilde{X}_2(k)$ 的周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数, 假设 N_1 和 N_2 互素, 则 $\tilde{Y}(k)$ 的周期为 $N = N_1 N_2$ 。

3.23(3.23) 令 $X(k)$ 表示 N 点序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换, 证明:

(1) 如果 $x(n)$ 满足关系式 $x(n) = -x(N-1-n)$, 则 $X(0) = 0$;

(2) 当 N 为偶数时, 如果 $x(n) = x(N-1-n)$, 则 $X(N/2) = 0$ 。

分析

这两个是有限长序列, 当 $x(n) = x(N-1-n)$ 时称 $x(n)$ 为偶对称序列, 偶对称中心为 $n = (N-1)/2$; 当 $x(n) = -x(N-1-n)$ 时称 $x(n)$ 为奇对称序列, 奇对称中心为 $n = (N-1)/2$ 。在教程第 8(7)章中会讨论以它们作为单位抽样响应时滤波器特性的情况。

证明

(1) 因为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

当 $x(n) = -x(N-1-n)$ 时

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [-x(N-1-n) R_N(n) W_N^{nk}] \\ &= - \sum_{n=0}^{N-1} [x((N-1-n))_N R_N(n) W_N^{-k(N-1-n)} W_N^{k(N-1)}] \\ &= - \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} W_N^{k(N-1)} \end{aligned}$$

即可得到

$$X(k) = -X((-k))_N W_N^{k(N-1)} R_N(k)$$

当 $k=0$ 时

$$X(0) = -X(-0) = -X(0)$$

即

$$X(0) = 0$$

(2) 依照(1), 当 $x(n) = x(N-1-n)$ 时, 可得

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} [x((N-1-n))_N R_N(n) W_N^{nk}] \\ &= X((-k))_N W_N^{k(N-1)} R_N(k) \end{aligned}$$

当 $k = \frac{N}{2}$ (N 为偶数) 时

$$X\left(\frac{N}{2}\right) = X\left(\left(-\frac{N}{2}\right)\right)_N R_N\left(\frac{N}{2}\right) e^{-j\frac{2\pi N}{2}(N-1)}$$

由 N 为偶数, 则有

$$e^{-j\frac{2\pi N}{2}(N-1)} = e^{-j\pi(N-1)} = -1$$

所以

$$X\left(\frac{N}{2}\right) = -X\left(N - \frac{N}{2}\right) = -X\left(\frac{N}{2}\right)$$

即

$$X\left(\frac{N}{2}\right) = 0$$

3.24(3.24) 设 $x_1(n) = R_5(n)$, 求:

- (1) $X_1(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x_1(n)]$, 画出它的幅频特性和相频特性(标出主要坐标值);
- (2) $X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)]$, 画出它的幅频特性;
- (3) $X_2(k) = \text{DFT}[x_1((n))_{10} R_{10}(n)]$, 画出它的幅频特性;
- (4) $X_3(k) = \text{DFT}[(-1)^n x_1((n))_{10} R_{10}(n)]$, 画出它的幅频特性;
- (5) $x_4(n) = \text{IDFT}[X_{2\text{ep}}(k)]$;
- (6) $x_5(n) = \text{IDFT}[\text{Im}[X_2(k)]]$;
- (7) $x_6(n) = \text{IDFT}[X_2((N-1-k))_N R_N(k)]$;
- (8) $x_7(n) = \text{IDFT}[W_{10}^{-2k} X_2(k) X_2(k)]$ 。

分析

根据 DFT 的圆周共轭对称性质、圆周翻褶序列 DFT 以及 DFT 的对偶性进行求解。

解

$$\begin{aligned} (1) X_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^4 x_1(n) e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} + e^{-j4\omega} \\ &= \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j2\omega} \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \end{aligned}$$

采用 MATLAB 工具可画出 $X_1(e^{j\omega})$ 的频谱图如图 P3.24(a) 所示。

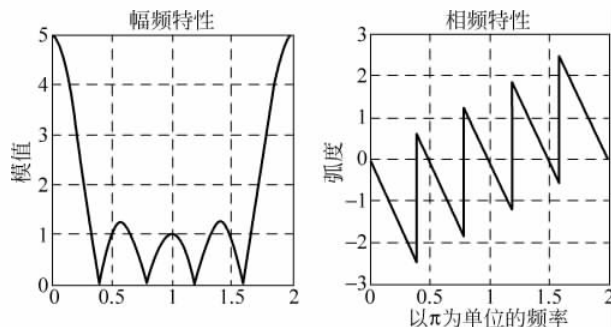


图 P3.24(a)

(2) 由 DFT 和 DTFT 之间的关系可求得

$$X_1(k) = X_1(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{5}k} = e^{-j\frac{4\pi}{5}k} \cdot \frac{\sin(\pi k)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}k\right)} = 5\delta(k)$$

即 $X_1(k) = \{5, 0, 0, 0, 0\}$ 。

由此可画出 $X_1(k)$ 的幅频特性曲线如图 P3.24(b) 所示。

(3) 先求解 $X_2(e^{j\omega})$, 则有

$$\begin{aligned} X_2(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^9 [x_1((n))_{10} R_{10}(n)] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^4 e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j2\omega} \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \end{aligned}$$

因此可求得

$$X_2(k) = X_2(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{10}k} = e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} = \begin{cases} 5, & k=0 \\ 0, & k=1, 2, \dots, 9 \end{cases}$$

即 $X_2(k) = \{5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ 。

由此可画出 $X_2(k)$ 的幅频特性曲线如图 P3.24(c) 所示。

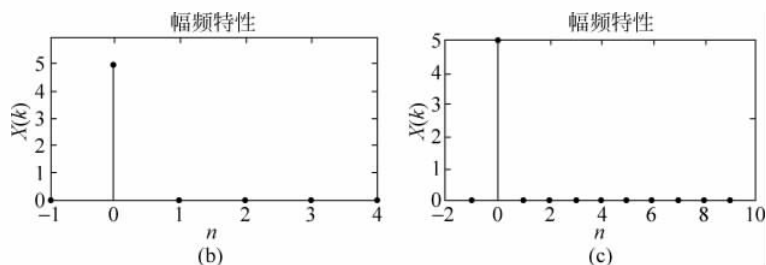


图 P3.24

(4) 先求解 $X_3(e^{j\omega})$, 则有

$$\begin{aligned} X_3(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^9 (-1)^n x_1((n))_{10} R_{10}(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^4 (-1)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^4 (-e^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1 - e^{-j5\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = e^{-j2\omega} \frac{j\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} X_3(k) &= X_3(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{10}k} = e^{-j\frac{5\pi}{5}k} \frac{j\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}k\right)} \\ &= \begin{cases} 5, & k=5 \\ 0, & k \neq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

即 $X_3(k) = \{0, 0, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0\}$ 。

由此可画出 $X_3(k)$ 的幅频特性曲线如图 P3.24(d) 所示。

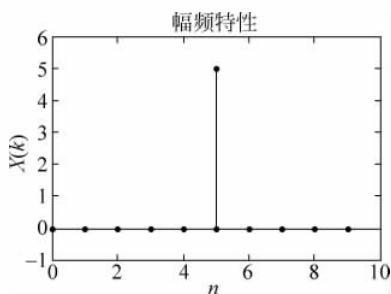


图 P3.24(d)

所示。

(5) 由于

$$X_2(k) = \{5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

所以

$$\begin{aligned} X_{2\text{ep}}(k) &= \frac{1}{2}[X_2(k) + X_2^*(10-k)] \\ &= \{5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

由此可求得

$$\begin{aligned} x_4(n) &= \text{IDFT}[X_{2\text{ep}}(k)] = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 X_{2\text{ep}}(k) W_{10}^{nk} \\ &= 0.5, \quad 0 \leq n \leq 9 \end{aligned}$$

即

$$x_4(n) = \{0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5\}$$

(6) 由(3)的结果可知

$$\text{Im}[X_2(k)] = 0$$

所以

$$x_5(n) = \text{IDFT}[\text{Im}[X_2(k)]] = 0, \quad 0 \leq n \leq 9$$

$$(7) \quad x_6(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [X_2(N-1-k) R_N(k)] W_N^{-nk} = \frac{1}{10} \cdot 5 \cdot W_{10}^{-9n} = 0.5 e^{j\frac{9\pi}{5}n}$$

$$(8) \quad x_7(n) = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 [W_{10}^{-k} X_2(k)]^2 \cdot W_{10}^{-nk}$$

由于

$$X_2(k) = \begin{cases} 5, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

因此

$$x_7(n) = \frac{1}{10} [W_{10}^{-0} X_2(0)]^2 W_{10}^{-0n} = 2.5, \quad 0 \leq n \leq 9$$

即

$$x_7(n) = \{2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5\}$$

3.25 已知 $y(n) = x(N-1-n)$, $u(n) = (-1)^n x(n)$, 且 $x(n)$, $u(n)$, $y(n)$ 都是 N 点实序列。试用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 、 $U(k)$, 其中 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, $U(k) = \text{DFT}[u(n)]$ 。

分析

根据 DFT 移位性质来求解。

解

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(N-1-m)k} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-mk} \cdot W_N^{-k} \\ &= X(N-k) W_N^{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} u(n) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{Nn/2} x(n) W_N^{nk} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\frac{N}{2})n} = X\left(k + \frac{N}{2}\right)_N R_N(k)
 \end{aligned}$$

(3.25) 设有限长序列 $x(n), 0 \leq n \leq N-1, X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, N 点

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}, \quad Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

试用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 。

分析

利用 DFT 定义求解。

解

$$\text{由} \quad X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\begin{aligned}
 \text{可得} \quad \textcircled{1} \quad Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{rN}nk} \\
 &= X\left(\frac{k}{r}\right), \quad k = lr, l = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

所以在一个周期内, $Y(k)$ 的抽样点数是 $X(k)$ 的 r 倍, 相当于在 $X(k)$ 的每两个值之间插入 $r-1$ 个其他的数值, 而当 k 为 r 的整数 l 倍时, $Y(k)$ 与 $X\left(\frac{k}{r}\right)$ 相等。

② 当 $\frac{k}{r} \neq \text{整数}$ 时, 在 $X(k)$ 的每两个值之间插入的其他数值为

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k') W_N^{-k'n} \right] W_{rN}^{nk} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k') \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(\frac{k}{r}-k')n} = \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k') \frac{1 - W_N^{(\frac{k}{r}-k')N}}{1 - W_N^{(\frac{k}{r}-k')}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} e^{j[\arg(x(k')) - \pi(\frac{N-1}{N})(\frac{k}{r}-k')]} \cdot |X(k')| \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{k}{r}-k'\right)\right]}{\sin\left[\pi\left(\frac{k}{r}-k'\right)/N\right]} \\
 &\quad \frac{k}{r} \neq \text{整数}, 0 \leq k \leq rN-1
 \end{aligned}$$

3.26 (3.26) 复数有限长序列 $f(n)$ 是由两个实有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n) (0 \leq n \leq N-1)$ 组成的, $f(n) = x(n) + jy(n)$, 且已知 $F(k) = \text{DFT}[f(n)]$ 有以下两种表达式:

$$(1) F(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} \quad (2) F(k) = 1 + jN$$

其中 a, b 为实数。试用 $F(k)$ 求 $X(k) = \text{DFT}[x(n)], Y(k) = \text{DFT}[y(n)], x(n), y(n)$ 。

分析

根据 DFT 运算中的圆周共轭对称性求解。

解

(1) 由题意,有

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) + jy(n)]W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} + j \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk} = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} + j \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} \end{aligned}$$

根据 DFT 的圆周共轭对称性

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}[\text{Re}[f(n)]] = F_{ep}(k) \\ &= \frac{1}{2}[F(k) + F^*(N-k)] = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} \\ Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[j\text{Im}[f(n)]] \\ &= \frac{1}{j}F_{op}(k) = \frac{1}{2}[F(k) - F^*(N-k)] = \frac{1-b^N}{1-bW_N^k} \end{aligned}$$

又因为

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{nk} = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$$

所以

$$x(n) = a^n R_N(n)$$

同理

$$y(n) = b^n R_N(n)$$

(2) 由题意,有

$$F(k) = 1 + jN$$

因此

$$F^*(k) = 1 - jN$$

根据 DFT 的圆周共轭对称性,有

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)] = \text{DFT}[\text{Re}[f(n)]] \\ &= \frac{1}{2}[F(k) + F^*(N-k)] = 1, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ Y(k) &= \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[\text{Im}[f(n)]] \\ &= \frac{1}{2j}[F(k) - F^*(N-k)] = N, \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N}(W_N^0 + W_N^{-n} + \cdots + W_N^{-(N-1)n}) \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1-W_N^{-nN}}{1-W_N^{-n}} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$x(n) = \{1, 0, 0, \cdots, 0\}$$

同理

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-nk} = \begin{cases} N, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

即

$$y(n) = \{N, 0, 0, \dots, 0\}$$

3.27 $x(n)$ 、 $y(n)$ 为 N 点实序列, 设 $w(n) = x(n) + jy(n)$

$$W(k) = \text{DFT}[w(n)] = \text{Re}[W(k)] + j\text{Im}[W(k)]$$

(1) 若已知 $\text{Re}[W(k)]$ 及 $\text{Im}[W(k)]$, 请用它们来表示序列 $x(n)$ 及 $y(n)$ 的 N 点 DFT。

(2) 若已知 $W(k)$ 的共轭对称分量 $W_{ep}(k)$ 及共轭反对称分量 $W_{op}(k)$, 试用它们来表示 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的 N 点 DFT。

分析

根据 DFT 的圆周共轭对称性和实序列的共轭对称性来求解。

解

(1) 由 $W(k) = \text{Re}[W(k)] + j\text{Im}[W(k)]$, 可求得

$$W^*(N-k) = \text{Re}[W(N-k)] - j\text{Im}[W(N-k)]$$

根据 DFT 的圆周共轭对称性, 有

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{2} [W(k) + W^*(N-k)] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Re}[W(k) + W(N-k)] + j\text{Im}[W(k) - W(N-k)] \} \\ Y(k) &= \frac{1}{2j} [W(k) - W^*(N-k)] \\ &= \frac{1}{2} \{ \text{Im}[W(k) + W(N-k)] - j\text{Re}[W(k) - W(N-k)] \} \end{aligned}$$

(2) 由于 $x(n)$ 、 $y(n)$ 都是实序列, 根据实序列的共轭对称性, 有

$$X(k) = W_{ep}(k), \quad Y(k) = -jW_{op}(k)$$

(3.27) 见 3.42

3.28(3.28) 设 $x(n) = \{2, 1, 3, 0, 4\}$, $y(n) = \{3, 0, 4, 2, 1\}$ 。

(1) 求 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$; $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 5 点; $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$, 5 点。

(2) 讨论 $Y(k)$ 与 $X(k)$ 及 $X(e^{j\omega})$ 的关系。

分析

根据定义求解。

解

$$\begin{aligned} (1) \quad X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-1}^3 x(n)e^{-j\omega n} = 2e^{j\omega} + 1 + 3e^{-j\omega} + 4e^{-j3\omega} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^4 x((n))_5 R_5(n) W_5^{nk} = 1 + 3e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + 4e^{j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{2\pi}{5}k} \\ Y(k) &= \sum_{n=0}^4 y(n) W_5^{nk} = 3 + 4e^{-j\frac{4\pi}{5}k} + 2e^{j\frac{4\pi}{5}k} + e^{j\frac{2\pi}{5}k} \end{aligned}$$

(2) 由(1)的结果可知

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega = \frac{2\pi}{5}k}$$

即 $X(k)$ 为 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $\omega = \frac{2\pi}{5}k$ 处的抽样值。

$$Y(k) = W_5^{-k} X(k)$$

即 $Y(k)$ 对应的序列 $y(n)$ 为 $X(k)$ 对应的序列 $x(n)$ 的圆周右移 1 位。故

$$y(n) = x((n-1))_5 R_5(n)$$

3.29 利用 MATLAB 编程完成此题。用 DFT 对下列信号进行谱分析,选择合适的变换区间长度 N ,并画出幅度特性和相位特性。

分析 略。

$$(1) x_1(n) = 3\cos(0.25\pi n)R_8(n) \quad (2) x_2(n) = 0.8^{|n|}R_{15}(n+7)$$

解

(1)

```
clear all;clc
N=8;n=0:1:N-1;
xn=3*cos(0.25*pi*n);
[Xk]=dft(xn,N);
magXk=abs(Xk)
angXk=angle(Xk)
subplot(1,2,1);stem(n,magXk,'. ');grid;xlabel('n');title('幅频特性');ylabel('模值')
subplot(1,2,2);stem(n,angXk,'. ');grid;xlabel('n');title('相频特性');ylabel('弧度')
```

程序运行结果如下:

```
magXk = 0.0000 12.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 12.0000
angXk = 3.1416 0.0000 -2.3231 -1.9417 -1.4877 -1.0251 -0.5444 0.0000
```

幅频特性和相频特性如图 P3.29(a)所示。

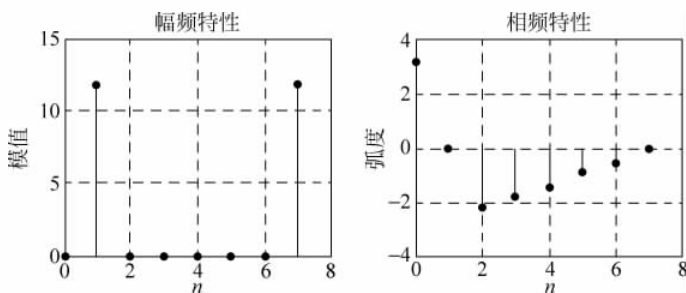


图 P3.29(a)

(2)

```
clear all;clc
N=15;n=-7:1:7;
for i=1:1:N
xn(i)=0.8^(abs(i-8));
end
[Xk]=dft(xn,N)
magXk=abs(Xk)
angXk=angle(Xk)
subplot(1,2,1);stem(n,magXk,'. ');grid;xlabel('n');title('幅频特性');ylabel('模值')
subplot(1,2,2);stem(n,angXk,'. ');grid;xlabel('n');title('相频特性');ylabel('弧度')
```

程序运行结果如下:

```
magXk = 7.3223  2.3869  0.5246  0.3616  0.1744  0.1613  0.1156  0.1145  0.1145
        0.1156  0.1613  0.1744  0.3616  0.5246  2.3869
angXk = 0      -2.9322  0.4189  -2.5133  0.8378  -2.0944  1.2566  -1.6755
        1.6755  -1.2566  2.0944  -0.8378  2.5133  -0.4189  2.9322
```

幅频特性和相频特性如图 P3.29(b)所示。

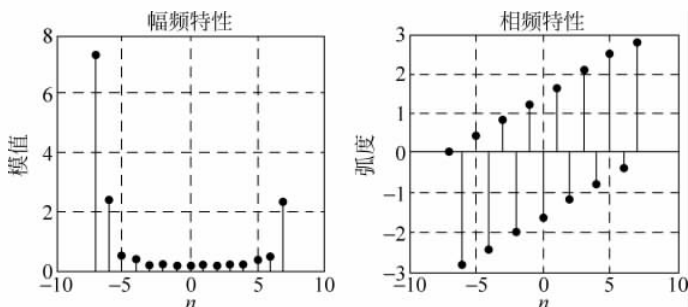


图 P3.29(b)

(3.29) 见 3.41

3.30(3.30) 对教程表 3.2 中的序列及其 DFT 的实、虚、偶、奇关系加以证明。

分析

根据 DFT 的对称性质证明。

证明:

(1) 如果 $x(n)$ 为偶对称, 则 $X(k)$ 也为偶对称。

由于

$$x(n) = x(N-n)$$

所以

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(N-m)k} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(N-k)m} \quad (\text{因为 } W_N^{Nk} = W_N^0 = 1) \\ &= X(N-k) \end{aligned}$$

(2) 如果 $x(n)$ 为奇对称, 则 $X(k)$ 也为奇对称

由于

$$x(n) = -x(N-n)$$

所以

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = - \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{nk} = -X(N-k)$$

(3) 如果 $x(n)$ 为实序列, 则 $X(k)$ 的实部为偶对称, 虚部为奇对称。

由于

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$$

所以当 $x(n) = x^*(n)$ 时

$$X(k) = X^*(N-k)$$

表示成实部、虚部,则有

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

(4) 如果 $x(n)$ 为虚序列,则 $X(k)$ 实部为奇对称,虚部为偶对称。

由于

$$x^*(n) = -x(n)$$

所以

$$\operatorname{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k) = -\operatorname{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k) = -X^*(N-k)$$

表示成实部、虚部形式,则有

$$\operatorname{Re}[X(k)] = -\operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = \operatorname{Im}[X(N-k)]$$

(5) 如果 $x(n)$ 为偶对称实序列,则 $X(k)$ 为偶对称实序列。

由 DFT 的性质,有

$$\operatorname{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$$

由 $x(n)$ 为实序列,有

$$x^*(n) = x(n)$$

所以

$$X(k) = X^*(N-k)$$

又因为 $x(n)$ 为偶对称,根据(1)的结论,有

$$X(k) = X(N-k) \quad (\text{偶对称})$$

综上,则有

$$X(k) = X^*(k) \quad (\text{实序列})$$

(6) 如果 $x(n)$ 为奇对称实序列,则 $X(k)$ 为奇对称虚序列。

由于 $x(n)$ 为实序列,有

$$x^*(n) = x(n)$$

因此

$$X(k) = X^*(N-k)$$

又因为 $x(n)$ 为奇对称序列,根据(2)的结论,有

$$X(k) = -X(N-k) \quad (\text{奇对称})$$

综上,则有

$$X(k) = -X^*(k) \quad (\text{虚序列})$$

(7) 如果 $x(n)$ 为偶对称虚序列,则 $X(k)$ 为偶对称虚序列。

由 $x(n)$ 为虚序列,有

$$x^*(n) = -x(n)$$

所以根据(4)的结论,有

$$X(k) = -X^*(N-k)$$

又因为 $x(n)$ 为偶对称, 有

$$X(k) = X(N-k) \quad (\text{偶对称})$$

综上, 则有

$$X(k) = -X^*(k) \quad (\text{虚序列})$$

(8) 如果 $x(n)$ 为奇对称虚序列, 则 $X(k)$ 为奇对称实序列。

由于 $x(n)$ 为虚序列, 根据(4)的结论, 有

$$X(k) = -X^*(N-k)$$

又因为 $x(n)$ 为奇对称, 根据(2)的结论, 有

$$X(k) = -X(N-k) \quad (\text{奇对称})$$

综上, 则有

$$X(k) = X^*(k) \quad (\text{实序列})$$

3.31(3.31) 已知 $x_1(n)$ 是 50 点有限长序列, 非零值范围为 $0 \leq n \leq 49$; $x_2(n)$ 是 15 点的有限长序列, 非零值范围为 $5 \leq n \leq 19$; 两序列作 50 点圆周卷积, 即

$$y(n) = x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{m=0}^{49} x_1(m) x_2((n-m))_{50} R_{50}(n)$$

试问 $y(n)$ 中哪个 n 值范围对应于 $x_1(n) * x_2(n)$ 的结果。

分析

若两序列的 L 点圆周卷积和为 $y(n)$, N_1 、 N_2 分别为该两序列的长度, 则当 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 时, $y(n)$ 能代表此两序列的线性卷积和 $y_L(n)$ 。

当 $L < N_1 + N_2 - 1 = M$ 时, 则圆周卷积和 $y(n)$ 只在 $M - L \leq n \leq L - 1$ 范围内才能代表线性卷积和。

解

由题意可知两序列的长度分别为

$$N_1 = 50, \quad N_2 = 15$$

因此该两序列的线性卷积和 $y_L(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 的长度为

$$M = N_1 + N_2 - 1 = 64$$

又因为对序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, n 的取值范围分别为

$$0 \leq n \leq 49$$

$$5 \leq n \leq 19$$

所以线性卷积和 $y_L(n)$ 的有值区域为

$$5 \leq n \leq 68$$

由于 $y(n)$ 为两序列的 50 点圆周卷积和, 即

$$L = 50$$

显然有

$$L < M$$

因此 $y(n)$ 中只有部分能代表线性卷积 $y_L(n)$ 。

对圆周卷积 $y(n)$, 其有值区域为

$$0 \leq n \leq 49$$

将线性卷积和 $y_l(h)$ 以 $L=50$ 分别向左右延拓一个 L 点周期 $y_l(n+L)$ 和 $y_l(n-L)$, 则 $y_l(n+L)$ 的有值区域为

$$-45 \leq n_1 \leq 18$$

$y_l(n-L)$ 的有值区域为

$$55 \leq n_2 \leq 118$$

将 $y_l(n)$ 、 $y_l(n+L)$ 、 $y_l(n-L)$ 与 $y(n)$ 相比较, 可知在 $y(n)$ 的主值区间 ($0 \leq n \leq 49$) 内, 没有重叠的部分为

$$19 \leq n \leq 49$$

在 $50 \leq n \leq 54$ 范围虽然没有 $y_l(n)$ 与 $y_l(n-50)$ 的重叠部分, 但它已在圆周卷积 $0 \leq n \leq 49$ 范围之外, 没有 $y(n)$ 的值。

所以, 在 $y(n)$ 中对应于 $y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 的 n 值范围是

$$19 \leq n \leq 49$$

结果如图 P3.31 所示。

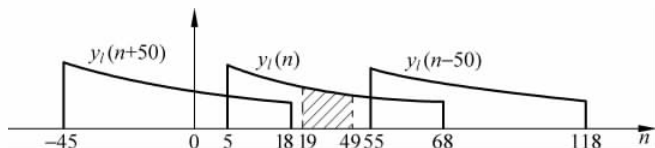


图 P3.31

3.32(3.32) 研究取数据足够长情况下的高频率分辨率的频谱以及数据不够的情况下靠补零值而造成的计算频率间距减小后的频谱, 看它们的区别, 研究序列

$$x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

求它的有限样本的频谱。

- (1) 取 $0 \leq n \leq 10$, 确定并画出 $\text{DFT}[x(n)]$;
- (2) 对(1)中序列补 90 个零值后, 确定并画出 $\text{DFT}[x(n)]$;
- (3) 取 $0 \leq n \leq 100$, 确定并画出 $\text{DFT}[x(n)]$ 。

试采用 MATLAB 方法来求解。

分析

根据 DFT 的定义求解。

解

由 $\text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$, 采用 MATLAB 方法求解如下。

(1) 当 $0 \leq n \leq 10$ 时, 序列长度为 11, MATLAB 程序如下:

```
clear all;clc
N=11;                                     % 序列长度
n=[0:1:N-1];k=[0:1:N-1];
xn=cos(0.48*pi*n)+cos(0.52*pi*n);       % 原始序列 x(n)
WN=exp(-j*2*pi/N);                       % DFT 公式的具体实现
```

```
nk = n' * k;
WNnk = WN.^nk;
Xk = xn * WNnk;
plot(k, Xk); grid % 作图
xlabel('k'); title('幅频特性曲线'); ylabel('X(k)')
```

程序运行结果如图 P3.32(a)所示。

(2) 将(1)中序列补 90 个零值, 序列长度变成 $N = 101$, 但有效数据不变, 对应的 MATLAB 程序如下:

```
clear all; clc
N = 101; % 序列长度
n = [0:1:N-1]; k = [0:1:N-1];
n1 = [0:1:10];
xn = cos(0.48 * pi * n1) + cos(0.52 * pi * n1); % 前 11 个点为原始序列 x(n)
xn = [xn, zeros(1, N - length(n1))]; % 将序列补 90 个 0 至所需长度
WN = exp(-j * 2 * pi / N); % DFT 公式的具体实现
nk = n' * k;
WNnk = WN.^nk;
Xk = xn * WNnk;
plot(k, Xk); grid % 作图
xlabel('k'); title('幅频特性曲线'); ylabel('X(k)')
```

程序运行结果如图 P3.32(b)所示。

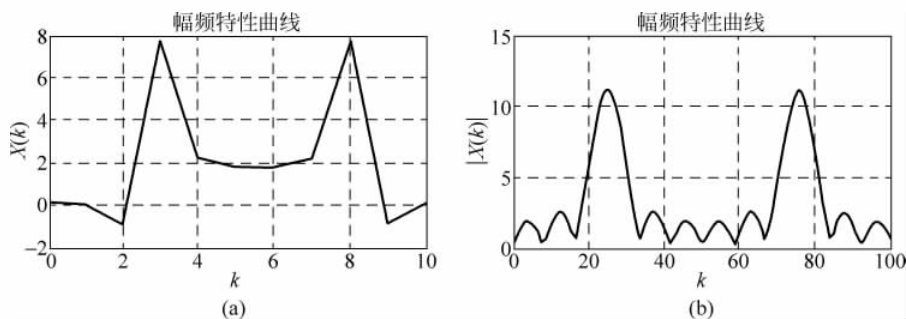


图 P3.32

(3) 取 $N = 101$ 时, 相应的 MATLAB 程序如下:

```
clear all; clc
N = 101; % 序列长度
n = [0:1:N-1];
k = [0:1:N-1];
xn = cos(0.48 * pi * n) + cos(0.52 * pi * n); % 原始序列 x(n)
WN = exp(-j * 2 * pi / N); % DFT 公式的具体实现
nk = n' * k;
WNnk = WN.^nk;
Xk = xn * WNnk;
plot(k, abs(Xk)); grid % 作图
xlabel('k'); title('幅频特性曲线'); ylabel('|X(k)|')
```

程序运行结果如图 P3.32(c)所示。

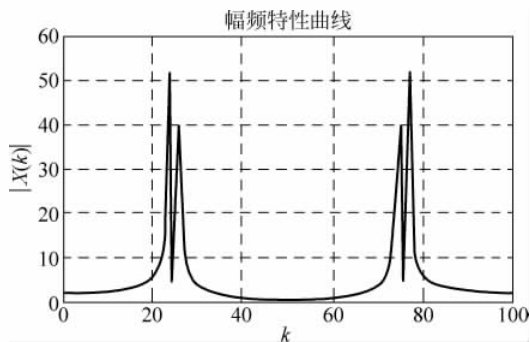


图 P3.32(c)

对比图 P3.32(a)、(b)、(c)可知,时域抽样点数不变的条件下,在有效数据后增加零值点可以减小栅栏效应,减小 DFT 计算的频率间距,但是不能提高频率分辨率。只有增加数据有效长度才能提高频率分辨率,如图 P3.32(c)所示,能分辨出所给出的两个频率的信号。

3.33(3.33) 设某 LSI 因果系统的频率响应为 $H(e^{j\omega})$ 。

(1) 若
$$\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \cos(k\omega)$$

用解析方法求该系统的单位冲激响应,采用 IDFT(IFFT)作为计算工具,验证所得结果,并选择合适的计算长度点数 N 。

(2) 若
$$\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^4 2k \sin(k\omega), \text{ 且有 } \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 0$$

用解析方法求此系统的单位冲激响应 $h(n)$,采用 IDFT(IFFT)作为计算工具,验证所得结果,并选择合适的计算长度点数 N 。

分析

根据因果序列的共轭对称、共轭反对称分量及实部虚部的关系。

令 $x_e(n)$ 为 $x(n)$ 对应的共轭对称分量, $x_o(n)$ 为 $x(n)$ 的共轭反对称分量,有

$$\operatorname{Re}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{DTFT}[x_e(n)]$$

$$j\operatorname{Im}[X(e^{j\omega})] = \operatorname{DTFT}[x_o(n)]$$

再根据因果序列的奇偶性,可知

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), & n > 0 \\ x_e(n), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), & n > 0 \\ x(0), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

解

(1) 由题意

$$\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \cos(k\omega)$$

所以
$$\operatorname{Re}[H(e^{-j\omega})] = \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \cos(-k\omega) = \operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]$$

因此 $h(n)$ 为实序列。

根据实因果序列奇偶虚实性质,令 $h_e(n)$ 为 $h(n)$ 的共轭对称分量,则有

$$\begin{aligned}
 h_e(n) &= \text{IDTFT}\{\text{Re}[H(e^{j\omega})]\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}[H(e^{j\omega})] e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \cos(k\omega) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \frac{1}{2} (e^{jk\omega} + e^{-jk\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \left[\frac{1}{n+k} \cdot \frac{e^{j(n+k)\pi} - e^{-j(n+k)\pi}}{j2} + \frac{1}{n-k} \cdot \frac{e^{j(n-k)\pi} - e^{-j(n-k)\pi}}{j2} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^4 (0.6)^k \left[\frac{\sin[\pi(n+k)]}{n+k} + \frac{\sin[\pi(n-k)]}{n-k} \right]
 \end{aligned}$$

(注意: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 因此上式中方括号内第一项只在 $n=k=0$ 时有值, 第二项只在 $n=k$ 时才有值。)

由此可求得

$$\begin{aligned}
 h_e(0) &= 1, h_e(1) = \frac{1}{2} \cdot 0.6 \\
 h_e(2) &= \frac{1}{2} \cdot (0.6)^2, \quad h_e(3) = \frac{1}{2} \cdot (0.6)^3 \\
 h_e(4) &= \frac{1}{2} \cdot (0.6)^4
 \end{aligned}$$

因此可求得 $h(n)$ 为

$$\begin{aligned}
 h(0) &= h_e(0) = 1 \\
 h(1) &= 2h_e(1) = 0.6 \\
 h(2) &= 2h_e(2) = (0.6)^2 \\
 h(3) &= 2h_e(3) = (0.6)^3 \\
 h(4) &= 2h_e(4) = (0.6)^4
 \end{aligned}$$

即

$$h(n) = (0.6)^n R_5(n)$$

(2) 由题意

$$\text{Im}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=0}^4 2k \sin(k\omega)$$

所以

$$\text{Im}[H(e^{-j\omega})] = - \sum_{k=0}^4 2k \sin(k\omega) = - \text{Im}[H(e^{j\omega})]$$

因此 $h(n)$ 为实序列。

根据实因果序列的奇偶虚实性,令 $h_o(n)$ 为 $h(n)$ 对应的共轭反对称分量,则有

$$\begin{aligned}
 h_o(n) &= \text{IDTFT}\{j \text{Im}[H(e^{j\omega})]\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j \cdot \sum_{k=0}^4 2k \sin(k\omega) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^4 k \int_{-\pi}^{\pi} (e^{jk\omega} - e^{-jk\omega}) e^{j\omega n} d\omega
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^4 2k \left[\frac{\sin[\pi(n+k)]}{n+k} - \frac{\sin[\pi(n-k)]}{n-k} \right]$$

由此可知(讨论同(1))

$$h_o(1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^4 2k \left[\frac{\sin[(k+1)\pi]}{k+1} - \frac{\sin[(k-1)\pi]}{k-1} \right] = -1$$

$$h_o(2) = -2$$

$$h_o(3) = -3$$

$$h_o(4) = -4$$

又因为

$$h(0) = h(n) \big|_{n=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \big|_{n=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 0$$

根据

$$x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), & n > 0 \\ x(0), & n = 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

可求得

$$h(1) = 2h_o(1) = -2$$

$$h(2) = 2h_o(2) = -4$$

$$h(3) = 2h_o(3) = -6$$

$$h(4) = 2h_o(4) = -8$$

即

$$h(n) = -2nR_5(n)$$

3.34(3.34) 在教程例 3.6(MATLAB 版例 3.7)中,利用圆周共轭对称性,可以用一次 N 点 DFT 运算来计算两个 N 点实序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的 DFT(见例 3.6 的分析)。试按例 3.6 的讨论开发一个 MATLAB 函数来实现它。

分析

根据实序列 DFT 的圆周共轭对称性质求解。

步骤:

① 将两个实序列构成一个复序列,即

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

② 求复序列 $w(n)$ 的 N 点 DFT

$$\text{DFT}[w(n)] = W(k) = \text{DFT}[x_1(n)] + j\text{DFT}[x_2(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$$

③ 求 $W(k)$ 的圆周共轭对称序列,即

$$W^*(N-k)$$

④ 根据圆周共轭对称性质求得 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 DFT

$$X_1(k) = \frac{1}{2} [W(k) + W^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2j} [W(k) - W^*(N-k)]$$

解

根据实序列的圆周共轭对称性质,得到以下 MATLAB 程序:

```

function[Xk1,Xk2] = doubledft(xn1,xn2)
% 利用共轭对称性,用一次 N 点 DFT 运算实现两个 N 点实数序列的 DFT
% -----
% [Xk1,Xk2] = doubledft(xn1,xn2)
% 两个实数序列分别为 xn1 和 xn2,序列长度均为 N;相应的 N 点 DFT 分别为 Xk1 和 Xk2
%
N = length(xn1);           % 序列长度
n = [0:1:N-1];             % n 的行向量
k = [0:1:N-1];             % k 的行向量
wn = xn1 + j * xn2;        % 将两个实数序列构成一个复序列
WN = exp(-j * 2 * pi/N);    % WN 因子
nk = n' * k;               % 产生一个含 nk 值的 N 乘 N 维矩阵
WNnk = WN.^(-nk);          % DFT 矩阵
Wk = wn * WNnk;            % DFT 系数的行向量
Wk1 = conj(Wk(mod(-n,N)+1)); % 求复序列 wn 对应的 DFT 的圆周共轭对称序列
Xk1 = (Wk + Wk1)/2;        % 根据圆周共轭对称关系得到 xn1 的 N 点 DFT
Xk2 = (Wk - Wk1)/(2 * j);   % 根据圆周共轭对称关系得到 xn2 的 N 点 DFT

```

3.35 对以下各序列,计算:① N 点圆周卷积 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$; ② 线性卷积 $y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$; ③ 讨论 $y(n)$ 和 $y_l(n)$ 的区别。

- (1) $x_1(n) = \{1, 1, 1, 1\}$, $x_2(n) = \cos(\pi n/4)R_6(n)$; $N=8$;
- (2) $x_1(n) = \cos(2\pi n/N)R_{16}(n)$, $x_2(n) = \sin(2\pi n/N)R_{16}(n)$; $N=32$;
- (3) $x_1(n) = (0.8)^n R_{10}(n)$, $x_2(n) = (-0.8)^n R_{10}(n)$; $N=15$;
- (4) $x_1(n) = nR_{10}(n)$, $x_2(n) = (N-n)R_{10}(n)$; $N=10$ 。

分析

根据圆周卷积和线性卷积的定义求解。

根据线性卷积和与圆周卷积和的关系:若两序列的 L 点圆周卷积为 $y(n)$,当 $L \geq N_1 + N_2 - 1 = M$ 时, $y(n)$ 能代表此两序列的线性卷积和 $y_l(n)$; 当 $L < M$ 时,圆周卷积和 $y(n)$ 只在部分区间中能代表线性卷积和。

解

(1) ① 将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 补零形成 $N=8$ 点序列,则

$$x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & 6 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

即

$$x_2(n) = \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right\}$$

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^7 x_1(m) x_2((n-m))_8 R_8(n)$$

所以

$$y(0) = \sum_{m=0}^7 x_1(m) x_2((-m))_8 = -0.7071$$

$$y(1) = 1.7071$$

$$y(2) = 1.7071$$

$$\begin{aligned}
 y(3) &= 1 \\
 y(4) &= -1 \\
 y(5) &= -2.4142 \\
 y(6) &= -2.4142 \\
 y(7) &= -1.7071
 \end{aligned}$$

即

$$y(n) = \{-0.7071, 1.7071, 1.7071, 1, -1, -2.4142, -2.4142, -1.7071\}$$

$$\textcircled{2} y_l(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

采用对位相乘相加法求解

			1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	
					1	1	1	1	
			1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	
		1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$		
	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$			
1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$				
1	1.7071	1.7071	1	-1	-2.4142	-2.4142	-1.7071	-1.7071	

所以

$$y_l(n) = \{1, 1.7071, 1.7071, 1, -1, -2.4142, -2.4142, -1.7071, -1.7071\}$$

③ 比较①和②的结果可知, $y(n)$ 的长度为 $N=8$, $y_l(n)$ 的长度为 $M=N_1+N_2-1=4+6-1=9$, 长度不同。

由于 $N < M$, 因此 $y(n)$ 和 $y_l(n)$ 取值有部分不同, 将 $y_l(n)$ 按 $N=8$ 进行周期延拓并对位相加取主值区域即得到 $y(n)$, 其余未重叠部分结果相同, 即

$$\begin{cases} y(0) = y_l(0) + y_l(8) \\ y(n) = y_l(n), \quad 1 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

(2) 采用 MATLAB 工具进行求解。

① 求解圆周卷积的步骤为:

将序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 通过补零变成长度为 N 的序列;

将 $x_2(n)$ 进行翻折并圆周移位;

构造圆周卷积矩阵;

进行对位相乘相加求出圆周卷积和。

② 采用 MATLAB 自带线性卷积函数 conv 求解。

以下为 MATLAB 程序, 其中 cirshift 为圆周移位子函数, circonvt 为圆周卷积子函数。

主函数

```
clc;clear all
```

```
% 对两个输入序列 x1,x2 求解 N 点圆周卷积以及线性卷积
```

```
N=32
```

```
n=[0:1:15];
```

```
x1=cos(pi*n/16);
```

```
% 序列 x1
```

```
x2=sin(pi*n/16);
```

```
% 序列 x2
```

```
y = circonvt(x1,x2,N)           % 圆周卷积输出序列
y1 = conv(x1,x2)                % 线性卷积输出序列
```

程序运行结果为

```
y = [0      0.1951    0.5740    1.1111    1.7678    2.4944    3.2336    3.9231
      4.5000    4.9039    5.0813    4.9888    4.5962    3.8890    2.8701    1.5607
      0.0000   -1.3656   -2.4874   -3.3334   -3.8891   -4.1573   -4.1575   -3.9231
      -3.5000   -2.9424   -2.3097   -1.6629   -1.0607   -0.5556   -0.1913    0]

y1 = [0      0.1951    0.5740    1.1111    1.7678    2.4944    3.2336    3.9231
       4.5000    4.9039    5.0813    4.9888    4.5962    3.8890    2.8701    1.5607
       0.0000   -1.3656   -2.4874   -3.3334   -3.8891   -4.1573   -4.1575   -3.9231
       -3.5000   -2.9424   -2.3097   -1.6629   -1.0607   -0.5556   -0.1913]
```

圆周卷积子函数

```
function y = circonvt(x1,x2,N)
% 在 x1 和 x2 之间的 N 点圆周卷积
% -----
% [y] = circonvt(x1,x2,N)
% y = 圆周卷积输出序列
% x1 = 长度 N1 ≤ N 的输入序列
% x2 = 长度 N2 ≤ N 的输入序列
% 方法 y(n) = sum(x1(m) * x2((n-m)mod N))

if length(x1) > N
    error('N 必须 ≥ x1 的长度') % 判断 x1 的长度在 N 之内
end
if length(x2) > N
    error('N 必须 ≥ x2 的长度') % 判断 x2 的长度在 N 之内
end
x1 = [x1 zeros(1,N-length(x1))];
x2 = [x2 zeros(1,N-length(x2))]; % 将序列补零到长度为 N

m = [0:1:N-1];
x2 = x2(mod(-m,N)+1); % 对 x2 进行圆周翻褶
H = zeros(N,N);
for n = 1:1:N
    H(n,:) = cirshift(x2,n-1,N); % 构造圆周卷积矩阵
end
y = x1 * H'; % 对位相乘并求和实现圆周卷积
```

圆周移位子函数

```
function y = cirshift(x,m,N)
% 长度为 N 的 x 序列作 m 点圆周移位
% -----
% [y] = cirshift(x,m,N)
% y = 圆周移位输出序列
% x = 长度 N ≤ N 的输入序列
% m = 移位点数
% 方法 y(n) = x((n-m)mod N)

if length(x) > N
    error('N 必须 ≥ x 的长度') % 判断 x 的长度在 N 之内
```

```

end
x = [x zeros(1, N - length(x))];      % 将序列补零到长度为 N
n = [0:1:N-1];
n = mod(n - m, N);                    % 进行圆周移位
y = x(n+1);

```

③ 由①、②的结果可知 $y(n)$ 长度 $N=32$, $y_l(n)$ 长度为 $M=N_1+N_2-1=31$, 满足 $N \geq M$, 因此可以用 $y(n)$ 来表示 $y_l(n)$, 即

$$y_l(n) = y(n), \quad 0 \leq n \leq 30$$

(3) ①、②参考(2)的求解过程, 可将 MATLAB 主函数修改如下:

主函数

```

clc; clear all
% 对两个输入序列 x1, x2 求解 N 点圆周卷积以及线性卷积
N = 15
for n = 1:1:10
x1(n) = 0.8.^(n-1);                % 序列 x1
end
for n = 1:1:10
x2(n) = (-0.8).^(n-1);            % 序列 x2
end
y = circonvt(x1, x2, N)             % 圆周卷积输出序列
y1 = conv(x1, x2);                 % 线性卷积输出序列

```

程序运行结果为

```

y = [1.0000   -0.0281   0.6400   -0.0180   0.4096   0   0.2621   0
      0.1678   0   -0.1074   0   -0.0687   0   -0.0440]
y1 = [1.0000   0   0.6400   0   0.4096   0   0.2621   0   0.1678   0
      -0.1074   0   -0.0687   0   -0.0440   0   -0.0281   0   -0.0180]

```

③ 由求解结果可知 $y(n)$ 长度为 $N=15$, $y_l(n)$ 长度为 $M=N_1+N_2-1=19$ 。只有在 $M-N \leq n \leq N-1$, 即 $4 \leq n \leq 14$ 的范围内有 $y(n) = y_l(n)$ 。

(4) ①、②同上, MATLAB 主函数如下:

```

clc; clear all
% 对两个输入序列 x1, x2 求解 N 点圆周卷积以及线性卷积
N = 10
x1 = [0:1:9];                      % 序列 x1
x2 = [10:-1:1];                    % 序列 x2
y = circonvt(x1, x2, N)             % 圆周卷积输出序列
y1 = conv(x1, x2)                   % 线性卷积输出序列

```

程序运行结果为

```

y = [285   250   225   210   205   210   225   250   285   330]
y1 = [0   10   29   56   90   130   175   224   276   330   285   240   196   154   115   80   50   26   9]

```

③ 由于 $y(n)$ 长度 $N=10$, $y_l(n)$ 长度 $M=N_1+N_2-1=19$ 。所以相同的数据为 $19-10=9 \leq n \leq 9=10-1$, 即只在 $n=9$ 处有 $y(n) = y_l(n)$ 。

(3.35) 见 3.43

3.36(3.36) 模拟信号 $x_a(t) = 2\sin(4\pi t) + 5\cos(8\pi t)$ 进行抽样, 抽样点为 $t=nT$, $T=$

$0.01, n=0, 1, \dots, N-1$ 得到 N 点序列 $x(n)$, 用 $x(n)$ 的 N 点 DFT 来对 $x_a(t)$ 幅度谱作估计。

(1) 从以下 N 值中, 选择一个能提供最精确的 $x_a(t)$ 的幅度谱的 N 值 ($N=40, N=50, N=60$), 并要求画出幅度谱 $|X(k)|$ 及相位谱 $\arg[X(k)]$ 。

(2) 从以下 N 值中, 选择一个能提供使 $x_a(t)$ 的幅度谱泄漏量最小的 N 值 ($N=90, N=95, N=99$), 画出幅度谱 $|X(k)|$ 及相位谱 $\arg[X(k)]$ 。

分析

对于周期信号, 必须使抽样后仍为周期序列, 且数据长度必须等于周期序列周期的整数倍, 并且不能补零, 才能避免产生频谱泄漏, 获得最精确的幅度谱。

为了使 $x_a(t)$ 幅度谱泄漏量减小, 在不改变抽样频率的条件下, 必须增加数据的有效长度, 也就是增加 N 值, N 越大, 频谱泄漏越小。

解

$x_a(t)$ 中第二项余弦信号频率为第一项正弦信号频率的两倍, 故第一项信号的周期为第二项信号周期的两倍。所以 $x_a(t)$ 的信号周期为 $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5\text{s}$

抽样间隔为

$$T = 0.01\text{s}$$

则有

$$x(n) = x_a(nT) = 2\sin(0.04\pi n) + 5\cos(0.08\pi n)$$

这里 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{0.04\pi} = 50$, 故序列为周期序列, 周期为 $N=50$ 。

(1) 为使获得的 $x_a(t)$ 幅度谱最精确, 应使抽样点数为周期的整倍数, 因此取 $N=50$ 。相应的 MATLAB 程序如下:

```
clear all;clc
N = 50; % 抽样点数
n = [0:1:N-1];
k = [0:1:N-1];
xn = 2 * sin(0.04 * pi * n) + 5 * cos(0.08 * pi * n); % 抽样后序列
WN = exp(-j * 2 * pi / N); % Wn 因子
nk = n' * k; % 产生一个含 nk 值的 N 乘 N 维矩阵
WNNk = WN.^nk; % DFT 矩阵
Xk = xn * WNNk; % DFT 系数的行向量
magX = abs(Xk); % 求幅度谱
angX = angle(Xk) % 求相位谱
subplot(1,2,1); % 画幅度谱
stem(k,magX,'. ');grid
xlabel('k');title('幅度谱曲线');ylabel('|X(k)|')
subplot(1,2,2); % 画相位谱
stem(k,angX,'. ');grid
xlabel('k');title('相位谱曲线');ylabel('弧度')
```

程序运行结果见图 P3.36(a)。

从图中可以看出, $k=1$, 即 $f_1 = f_s/N = 2\text{Hz}$ 和 $k=2$, 即 $f_2 = 2f_s/N = 4\text{Hz}$ 处有两个大的峰值, 分别对应原信号中 $\sin(4\pi t)$ 和 $\cos(8\pi t)$ 分量。

因为抽样点数为周期数, 因此没有产生频谱泄漏。

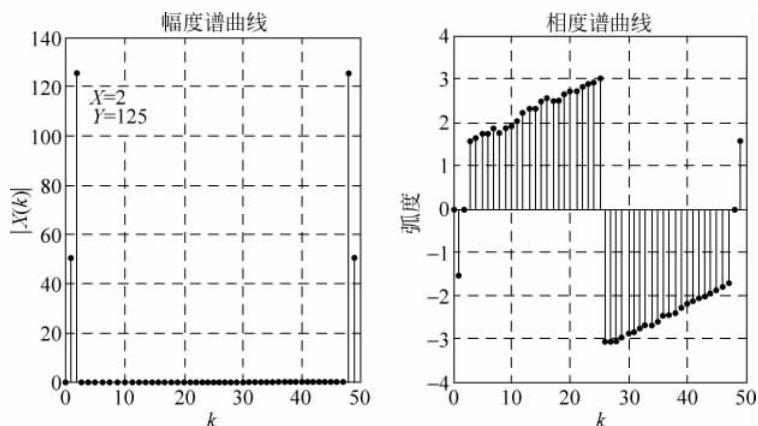


图 P3.36(a)

(2) 因为题目要求抽样频率不变,因此必须增大抽样点数 N ,即增加数据长度才能提高频率分辨率,减少谱泄漏,应取 $N=99$ 。

MATLAB 程序与(1)相同,只是将 N 改为 99。

程序运行结果如图 P3.36(b)所示。

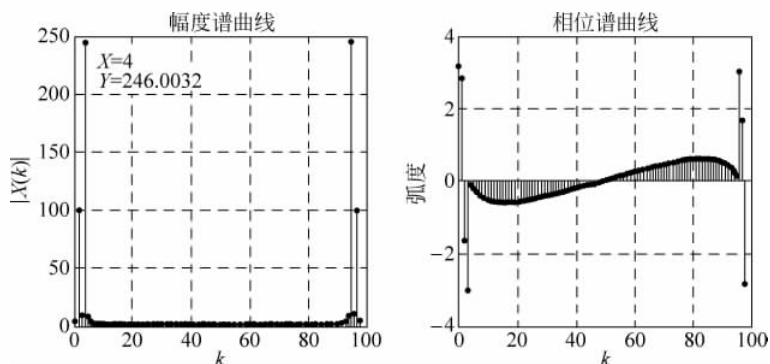


图 P3.36(b)

从图中可以看出, $k=2$ 处,即 $f_2=2f_s/N=2.02\text{Hz}$ 处有一较大峰值,对应原信号中 $\sin(4\pi t)$ 分量。 $k=4$,即 $f_4=4f_s/N=4.04\text{Hz}$ 处有一很大峰值,对应原信号中 $\cos(8\pi t)$ 分量。

由此可知,当 $N=99$ 时,虽然 N 并不是序列周期的整数倍,但由于 N 足够大,因此非常接近真实值,频谱泄漏很小。

3.37(3.37) 设 $x(n)=\cos(\omega_1 n)+\cos(\omega_2 n)$, 抽样频率为 $f_s=8\text{kHz}$, $f_1=1.42\text{kHz}$, $f_{21}=1.5\text{kHz}$, $f_{22}=2.0\text{kHz}$ 。每次都把 f_1 与 f_{21} 两个频率的信号作为一组 $x(n)$,把 f_1 与 f_{22} 两个频率的信号作为另一组 $x(n)$ 来研究,在以下三种情况下,用 MATLAB 中的程序求出这两组信号的 DFT,画出其幅度谱,并对其进行讨论。

(1) 计算两组信号的 64 点 DFT;

(2) 将每组信号都取为 64 点抽样值,在其尾部都补 64 个零值点,并作 128 点 DFT;

(3) 将每组信号都取为 128 点抽样值,并作 128 点 DFT。并问以上三种情况下,频率分辨率及计算的频率间隔是多少? 分别加以讨论。

分析

本题考查频率分辨率。由公式 $F_0 = f_s/N$ 可知,当抽样率不变时,频率分辨率与抽样值点数有关,抽样值点数越大,对应的数据长度越长,频率分辨率越高。用时域序列补零值点的办法增加数据点不能提高频率分辨率,因为补零不能增加信号的有效长度。

解

由题目条件可知,两组 $x(n)$ 的表达式分别为

$$x_1(n) = \cos(2\pi n f_1 / f_s) + \cos(2\pi n f_{21} / f_s) = \cos(0.355\pi n) + \cos(0.375\pi n)$$

$$x_2(n) = \cos(2\pi n f_1 / f_s) + \cos(2\pi n f_{22} / f_s) = \cos(0.355\pi n) + \cos(0.5\pi n)$$

频率分辨率是指长度为 N 的信号序列所对应的连续谱 $X(e^{j\omega})$ 中能分辨的两个频率分量峰值的最小频率间隔 F_0 ,其计算公式为 $F_0 = f_s/N$, F_0 越小,则频率分辨率越高。

(1) 取 64 点抽样点时,频率分辨率和计算的频率间隔为

$$F_0 = f_s/N = 8000/64 = 125\text{Hz}$$

由于 $x_1(n)$ 中两个频率分量间隔为

$$\Delta f_1 = f_{21} - f_1 = 1500 - 1420 = 80\text{Hz}$$

小于频率分辨率 125Hz,此时作 64 点的 DTFT(频谱)不能将 $x_1(n)$ 中两个频率分量区分出来。表现在频谱图中为两个频率分量合在一起无法区分,见图 P3.37(a)(1)的左图。

而 $x_2(n)$ 中两个频率分量间隔为

$$\Delta f_2 = f_{22} - f_1 = 2000 - 1420 = 580\text{Hz}$$

大于频率分辨率 125Hz,因此在 DTFT(频谱)中两个频率分量可区分开来,见图 P3.37(a)(1)的右图。

对于 64 点 DFT,图 P3.37(b)(1)中各频率分量所处的位置(k 值)分别为

$$f_1/F_0 = 1420/125 = 11.36, \text{此值处于 } k=11 \text{ 与 } k=12 \text{ 之间};$$

$k=11$ 对应的频率为 $f_{k11} = 11 \times 125 = 1375\text{Hz}$; $k=12$ 对应的频率为 $f_{k12} = 12 \times 125 = 1500\text{Hz}$

$$f_{21}/F_0 = 1500/125 = 12, \text{此值处于 } k=12 \text{ 处}$$

$$f_{22}/F_0 = 2000/125 = 16, \text{此值处于 } k=16 \text{ 处}$$

(2) 由题目条件可知,此时数据点数仍为 $N=64$ 点,总数据点数 $N_1=128$,则频率分辨率为

$$F_1 = f_s/N = 8000/64 = 125\text{Hz}$$

但相应的计算的频率间隔为

$$\Delta f_1 = f_s/N_1 = 8000/128 = 62.5\text{Hz}$$

因而图 P3.37(b)(2)中各频率所处的位置(k 值)分别为

$$f_1/\Delta f_1 = 1420/62.5 = 22.72, \text{此值处于 } k=22 \text{ 与 } k=23 \text{ 之间,更靠近 } 23$$

$$k=22 \text{ 对应的频率为 } f_{k22} = 22 \times 62.5 = 1375\text{Hz}; f_{k23} = 23 \times 62.5 = 1437.5\text{Hz}$$

$$f_{21}/\Delta f_1 = 1500/62.5 = 24, \text{此值处于 } k=24 \text{ 处}$$

$$f_{22}/\Delta f_1 = 2000/62.5 = 32, \text{此值处于 } k=32 \text{ 处}$$

(3) 由题目条件可知,此时数据抽样值点数 $N=128$,则频率分辨率和计算的频率间

隔为

$$F_2 = f_s/N = 8000/128 = 62.5\text{Hz}$$

因而图 P3.37(b)(3)中各频率所处的位置(k 值)分别为

$$f_1/F_2 = 1420/62.5 = 22.72, \text{此值处于 } k=22 \text{ 与 } k=23 \text{ 之间,也更靠近 } 23$$

$$f_{21}/F_2 = 1500/62.5 = 24, \text{此值处于 } k=24 \text{ 处}$$

$$f_{22}/F_2 = 2000/62.5 = 32, \text{此值处于 } k=32 \text{ 处}$$

将各种情况下 $x(n)$ 的连续谱和 DFT 离散谱用 MATLAB 画图如图 P3.37(a) 和图 P3.37(b) 所示。两图中的第一行两个子图是 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的连续谱图和离散谱图。 $x_1(n)$ 有频率分量为 1.42kHz 和 1.5kHz, $x_2(n)$ 有频率分量为 1.42kHz 和 2.0kHz。

图 P3.37(a)(1) 和图 P3.37(b)(1) 中分别是抽样点为 64 点时的连续谱和 64 点 DFT 幅度谱。此时频率分辨率为 125Hz, 因此 $x_1(n)$ 中两个频率的峰值叠加在一起, 无法准确分辨; 在 64 点 DFT 幅度谱中表现为 $x_1(n)$ 中两个频率分量 f_1 和 f_{21} 在 $k=11$ 与 $k=12$ 之间有重叠, 无法正确区分。

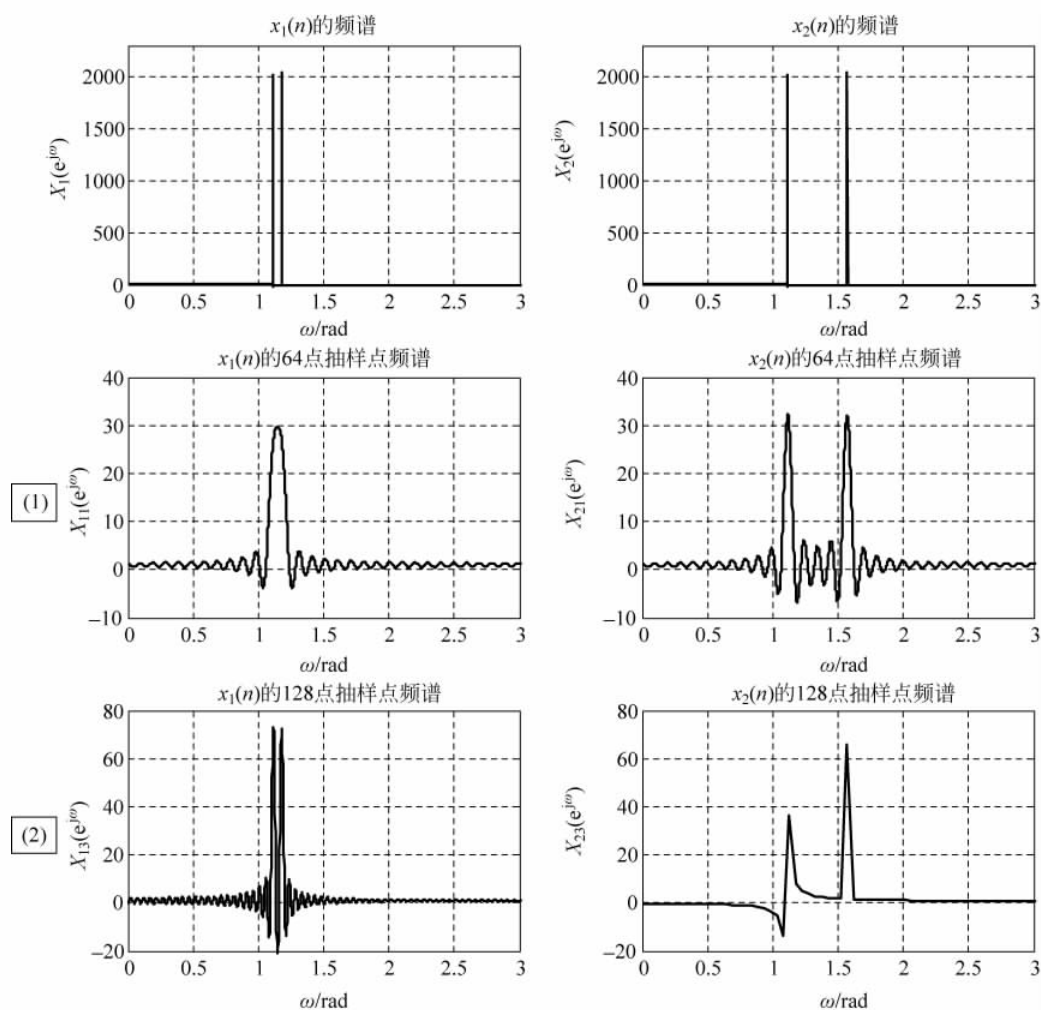


图 P3.37(a) $x(n)$ 的连续频谱图

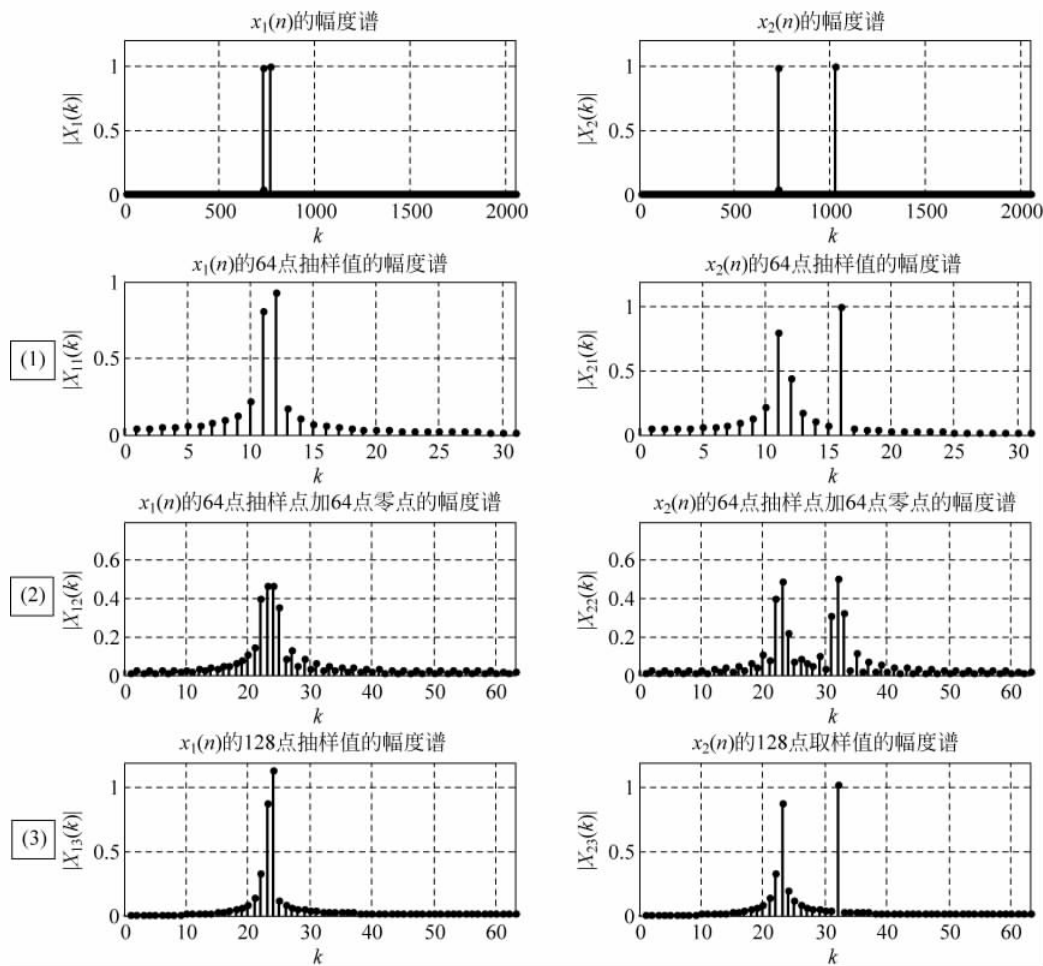
图 P3.37(b) $x(n)$ 的离散频谱图

图 P3.37(b)(2)对应的是 64 点抽样值加 64 点零点的 128 点 DFT 幅度谱。此时分辨率仍为 125Hz,对 $x_1(n)$,其频谱与 64 点抽样点频谱相同。在离散谱中依然不能正确区分两个频率分量。由此可知,在数据抽样点数不变的情况下,增加零值点不能提高频谱分辨率,只能提高计算的频率间隔。

图 P3.37(a)(2)和图 P3.37(b)(3)对应的是 128 点抽样点的连续谱和 128 点 DFT 幅度谱。此时的频率分辨率为 62.5Hz,对 $x_1(n)$,两个频率分量 f_1 和 f_{21} 在连续谱中出现两个频率分量峰值,能够区分,在 128 点 DFT 幅度谱中对应于 $k=22$ 、 $k=23$ 与 $k=24$ 处,没有重叠;对 $x_2(n)$,两个频率分量更没有重叠。由此可见当数据抽样点数 $N=128$ 时,频率分辨率 $F_2=62.5\text{Hz}$ 能满足将 $x_1(n)$ 中两个频率分量 $f_1=1.42\text{kHz}$ 和 $f_{21}=1.5\text{kHz}$ 区分出来。

用 MATLAB 编写程序如下:

```
clc; clear all;
fs = 8000; f1 = 1420; f21 = 1500; f22 = 2000; % 抽样频率和各频率分量
w1 = 2 * pi * f1/fs; w21 = 2 * pi * f21/fs; w22 = 2 * pi * f22/fs; % 各频率分量对应的数字频率
N = 4096; N1 = 64; N2 = 128; % DFT 点数
```

```

n = [0:1:N-1]; n1 = [0:1:N1-1]; n2 = [0:1:N2-1];
k = floor(-(N-1)/2:(N-1)/2); k1 = floor(-(N1-1)/2:(N1-1)/2); k2 = floor(-(N2-1)/2:
(N2-1)/2);
xn1 = cos(w1 * n) + cos(w21 * n); % 第一组信号抽样序列
xn2 = cos(w1 * n) + cos(w22 * n); % 第二组信号抽样序列
xn11 = xn1(1:N1); xn21 = xn2(1:N1); % 取两组序列的 64 个抽样点
xn12 = [xn1(1:N1), zeros(1, N1)]; xn22 = [xn2(1:N1), zeros(1, N1)]; % 取两组序列的 64 个抽样点并加 64 个零点
% 取两组序列的 128 个抽样点
xn13 = xn1(1:N2); xn23 = xn2(1:N2); % 取两组序列的 128 个抽样点
Xk1 = fftshift(fft(xn1)); Xk2 = fftshift(fft(xn2)); % 计算两组序列的频谱
X11 = fftshift(fft(xn11, N)); X21 = fftshift(fft(xn21, N)); % 计算两组序列的 64 点抽样点的频谱
% X12 = fftshift(fft(xn12, N)); X22 = fftshift(fft(xn22, N)); % 计算两组序列的 64 点抽样点加 64 点零点的频谱
X13 = fftshift(fft(xn13, N)); X23 = fftshift(fft(xn23, N)); % 计算两组序列的 128 点抽样点的频谱
Xk11 = fftshift(fft(xn11)); Xk21 = fftshift(fft(xn21)); % 计算两组序列的 64 点 DFT
Xk12 = fftshift(fft(xn12)); Xk22 = fftshift(fft(xn22)); % 计算两组序列的 64 点抽样点加 64 点零点的 128 点 DFT
Xk13 = fftshift(fft(xn13)); Xk23 = fftshift(fft(xn23)); % 计算两组序列的 128 点 DFT
magXk1 = abs(Xk1); magXk2 = abs(Xk2); % 计算幅度谱
magXk11 = abs(Xk11); magXk21 = abs(Xk21);
magXk12 = abs(Xk12); magXk22 = abs(Xk22);
magXk13 = abs(Xk13); magXk23 = abs(Xk23);
figure(1) % 作连续频谱图
subplot(321) % 作 x1(n) 频谱图
plot(k * 2 * pi / N, real(Xk1), 'linewidth', 2); grid
xlabel('\omega(rad)'); title('x1(n) 的频谱'); ylabel('X1(e^{j\omega})'); axis([0, 3.0, 0, 2300]);
subplot(322) % 作 x2(n) 频谱图
plot(k * 2 * pi / N, real(Xk2), 'linewidth', 2); grid
xlabel('\omega(rad)'); title('x2(n) 的频谱'); ylabel('X2(e^{j\omega})'); axis([0, 3.0, 0, 2300]);
subplot(323) % 作 x1(n) 的 64 点抽样点频谱图
plot(k * 2 * pi / N, real(X11), 'linewidth', 2); grid
xlabel('\omega(rad)'); title('x1(n) 的 64 点抽样点频谱'); ylabel('X11(e^{j\omega})'); axis([0, 3.0, -10, 40]);
subplot(324) % 作 x2(n) 的 64 点抽样点频谱图
plot(k * 2 * pi / N, real(X21), 'linewidth', 2); grid
xlabel('\omega(rad)'); title('x2(n) 的 64 点抽样点频谱'); ylabel('X21(e^{j\omega})'); axis([0, 3.0, -10, 40]);
subplot(325) % 作 x1(n) 的 128 点抽样点频谱图
plot(k * 2 * pi / N, real(X13), 'linewidth', 2); grid
xlabel('\omega(rad)'); title('x1(n) 的 128 点抽样点频谱'); ylabel('X13(e^{j\omega})'); axis([0, 3.0, -20, 80]);
subplot(326) % 作 x2(n) 的 128 点抽样点频谱图
plot(k * 2 * pi / N, real(X23), 'linewidth', 2); grid
xlabel('\omega(rad)'); title('x2(n) 的 128 点抽样点频谱'); ylabel('X23(e^{j\omega})'); axis([0, 3.0, -20, 80]);
figure(2) % 作 DFT 离散谱图
subplot(421) % 作 x1(n) 离散谱图
stem(k, magXk1 * 2 / N, 'b', 'linewidth', 2); grid
xlabel('k'); title('x1(n) 的幅度谱'); ylabel('|X1(k)|'); axis([0, 2047, 0, 1.2]);
subplot(422) % 作 x2(n) 离散谱图
stem(k, magXk2 * 2 / N, 'b', 'linewidth', 2); grid
xlabel('k'); title('x2(n) 的幅度谱'); ylabel('|X2(k)|'); axis([0, 2047, 0, 1.2]);
subplot(423) % 作 64 点频谱图
stem(k1, magXk11 * 2 / N1, 'b', 'linewidth', 2); grid

```

```

xlabel('k');title('x1(n)的 64 点抽样值的幅度谱');ylabel('|X11(k)|');axis([0,31,0,1]);
subplot(424)
stem(k1,magXk21*2/N1,'.','linewidth',2);grid
xlabel('k');title('x2(n)的 64 点抽样值的幅度谱');ylabel('|X21(k)|');axis([0,31,0,1.2]);
subplot(425) % 作 64 点抽样点加 64 点零点的 128 点频谱图
stem(k2,magXk12*2/N2,'.','linewidth',2);grid
xlabel('k');title('x1(n)的 64 点抽样点加 64 点零点的幅度谱');ylabel('|X12(k)|');axis([0,63,0,0.8]);
subplot(426)
stem(k2,magXk22*2/N2,'.','linewidth',2);grid
xlabel('k');title('x2(n)的 64 点抽样点加 64 点零点的 12 点 DFT');ylabel('|X22(k)|');axis([0,63,0,0.8]);
subplot(427) % 作 128 点频谱图
stem(k2,magXk13*2/N2,'.','linewidth',2);grid
xlabel('k');title('x1(n)的 128 点抽样值的幅度谱');ylabel('|X13(k)|');axis([0,63,0,1.2]);
subplot(428)
stem(k2,magXk23*2/N2,'.','linewidth',2);grid
xlabel('k');title('x2(n)的 128 点取样值的幅度谱');ylabel('|X23(k)|');axis([0,63,0,1.2]);

```

3.38(3.38) 设 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)$, $h(n)=2\delta(n)-\delta(n-1)+\delta(n-2)$ 。试利用矩阵法求 $y_l(n)=x(n)*h(n)$, $y(n)=x(n)\textcircled{4}h(n)$, 并讨论如何直接由线性卷积 $y_l(n)$ 求得圆周卷积 $y(n)$ 。如果利用圆周卷积来求线性卷积又应该如何求解?

分析

请按教程(1.1.23)式、(3.4.48)式、(3.4.56)式及(3.4.58)式的方法进行计算及讨论。

解

按线性卷积定义, 由于 $x(n)$ 长度为 $N_1=4$, $h(n)$ 长度为 $N_2=3$, 故 $y_l(n)$ 长度为 $N=N_1+N_2-1=6$ 。

$$\begin{aligned}
 y_l(n) &= [x(0), x(1), x(2), x(3)] \cdot \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & h(4) & h(5) \\ 0 & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & h(4) \\ 0 & 0 & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \\ 0 & 0 & 0 & h(0) & h(1) & h(2) \end{bmatrix} \\
 &= [1, 0, 2, 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [2, -1, 5, 4, -1, 3]
 \end{aligned}$$

故

$$y_l(n) = \{2, -1, 5, 4, -1, 3\}$$

按圆周卷积定义。由于必须两序列长度相等, 皆为 $L=4$, 故有(按教程(3.4.48)式)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & x(L-2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & x(L-1) \\ x(3) & x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

将线性卷积和 $y_l(n)$ 以 L 点 (L 为圆周卷积和的长度) 为周期的周期延拓序列混叠相加后的主值序列, 即为此两序列 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的 L 点 (此例 $L=4$) 圆周卷积和序列。更简单的办法是将 $y_l(n)$ 的前 L 位之后加以截断, 将截断后的 $N-L$ 位移到与 $y_l(n)$ 的最前部 $N-L$ 位对齐后, 对位相加 (不进位), 其相加结果得到的序列即为两个序列的 L 点圆周卷积结果, 此例 $N-L=2$, 故有 $y(0)=y_l(0)+y_l(4)=1, y(1)=y_l(1)+y_l(5)=2, y(2)=y_l(2)=5, y(3)=y_l(3)=4$, 即 $y(n)=\{1, 2, 5, 4\}$ 。

若需用圆周卷积结果导出线性卷积结果, 则必须使圆周卷积的长度 L 大于或等于线性卷积和的长度 $L \geq N=N_1+N_2-1$ 。即其前 N 点有 $y_l(n)=y(n)$, 也就是两个参与圆周卷积的序列都要补上零值点, 使其长度 $L \geq N$ 。

3.39(3.39) 已知一个模拟信号为

$$x(t) = \sin(180\pi t) + 1.3\sin(260\pi t) + 1.6\sin(640\pi t)$$

用 $f_s=600\text{Hz}$ 对 $x(t)$ 抽样, 取其长度为 $N=64$ 点, 得到序列为 $x(n)$ 。

(1) 作 $x(n)$ 的 64 点 DFT, 并画出频谱幅度 $|X(k)|, k=0, 1, \dots, 63$ (采用 MATLAB 方法)。

(2) 讨论 $|X(k)|$ 中与 $x(t)$ 有关的各个频谱值, 并说明这些值代表的意义。

分析

注意 $f_i > f_s/2 = 300\text{Hz}$ 时有频谱的混叠失真, 这时在 $k=32(f_s/2=300\text{Hz})$ 附近处的频谱不是原信号频谱。

解

(1) MATLAB 程序如下:

```
clc; clear all;
f1 = 90; f2 = 130; f3 = 320; fs = 600; % 各频率分量及抽样频率
N = 64;
n = [0:1:N-1];
k = [0:1:N-1];
xn = sin(2 * pi * n * f1/fs) + 1.3 * sin(2 * pi * n * f2/fs) + 1.6 * sin(2 * pi * n * f3/fs); % 抽样后序列
WN = exp(-j * 2 * pi/N);
nk = n * k; WNNk = WN.^nk;
Xk = abs(xn * WNNk);
stem(k, Xk, 'l', 'linewidth', 2); grid % 作频谱幅度谱
xlabel('k'); title('x(n)的幅度谱'); ylabel('|X(k)|'); axis([0, 63, 0, 50]);
```

频谱幅度 $|X(k)|$ 的图形见图 P3.39。

(2) $f_1 = \omega_1/2\pi = 180\pi/2\pi = 90\text{Hz}$

$$f_2 = \omega_2/2\pi = 260\pi/2\pi = 130\text{Hz}$$

$$f_3 = \omega_3/2\pi = 640\pi/2\pi = 320\text{Hz}$$

则计算的频率间距为 $\Delta f = f_s/N = 600/64 = 75/8$

因而有各频率所处的位置 (k 值) 为

$f_1/\Delta f = 90 \times 8/75 = 9.6$, 此值 (90Hz) 处于 $k=9$ 与 $k=10$ 之间, 更靠近 $k=10$ 。

$f_2/\Delta f = 130 \times 8/75 = 13.86$, 此值 (130Hz) 处于 $k=13$ 与 $k=14$ 之间, 更靠近 $k=14$ 。

$f_3/\Delta f = 320 \times 8/75 = 34.13$, 此值(320Hz)处于 $k=34$ 与 $k=35$ 之间, 由于这个 $k > \frac{N}{2}$, 故是混叠失真信号。

由于 $x(n)$ 是实序列, 则 $|X(k)|$ 是偶对称的, 对称中心为 $k=N/2=32$ 。因而频率为 f_3 的正弦信号会产生混叠失真, $k=34.13$ 是一个混叠失真信号, 从频谱角度看, 在 $k=32$ 的两边还应有折叠频率产生, 即

f_1 在 $k=64-9=55$ 与 $k=64-10=54$ 之间
 f_2 在 $k=64-13=51$ 与 $k=64-14=50$ 之间
 f_3 在 $k=64-34=30$ 与 $k=64-35=29$ 之间

这是折叠频率分量
这是混叠失真信号

也有频谱分量。

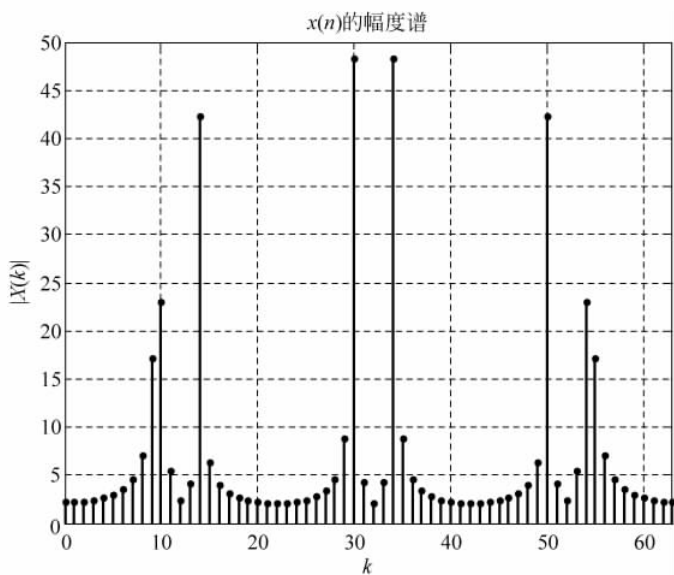


图 P3.39

3.40(3.40) 设 $x(n) = \cos(5\pi n/8)$, 抽样频率为 $f_s = 10\text{kHz}$, 且有 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, N 点。将 $x(n)$ 的数字频率用 ω_0 表示, 其模拟频率用 f_0 表示, 先求出 f_0, ω_0 。

(1) 当要求 $|X(k)|$ 的峰值所对应的 f_k 相对于 f_0 的误差不大于 12Hz 时, 问所需 N 的最小值是多少? 要求 N 为 2 的幂。

(2) 当 N 等于(1)中所确定的值时, 求 $|X(k)|$ 的峰值处的 k 值。

分析

计算的频率间距为 f_s/N 。

解

$$x(n) = \cos(2\pi n f_0 / f_s) = \cos(5\pi n / 8), \quad f_0 / f_s = 5/16$$

于是

$$f_0 = 5f_s/16 = 312.5\text{Hz}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 / f_s = 5\pi/8$$

(1) 此问的要求即为 $|f_k - f_0| \leq 12\text{Hz}$, 也就是要求计算的频率间距 $f_s/N \leq 12$, 即 $N \geq f_s/12 = 10000/12 = 833.3$, 取 $N = 1024$ 。

(2) 频域抽样点为 $2\pi k/N$, 故

$$\frac{2\pi(k-1)}{N} < \frac{5\pi}{8} < \frac{2\pi(k+1)}{N}$$

即有

$$\frac{(k-1)\pi}{512} < \frac{5\pi}{8} < \frac{\pi(k+1)}{512}, \quad k-1 < 320 < k+1$$

因此 $|X(k)|$ 的峰值处 $k = 320$ 。

3.41(3.29) 计算以下序列的 N 点 DFT, 在 $0 \leq n \leq N-1$ 内, 序列为

(1) $x(n) = 1$

(2) $x(n) = \delta(n)$

(3) $x(n) = e^{j\omega_0 n} R_N(n)$

(4) $x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn} R_N(n), \quad 0 < m < N$

(5) $x(n) = \cos(\omega_0 n) \cdot R_N(n)$

(6) $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \cdot R_N(n), \quad 0 < m < N$

(7) $x(n) = R_m(n), \quad 0 < m < N$

分析

直接用 IDFT 定义求解。

解

$$(1) X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^k} = N\delta(k) = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$(2) X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = 1, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$(3) X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)n} = \frac{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)}} = \frac{e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N} - 1}{e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)} - 1}$$

$$= \frac{e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2} \left(e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2} - e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2} \right)}{e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2} \left(e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2} - e^{-j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2} \right)}$$

$$= e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin[(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N/2]}{\sin[(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)/2]}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$(4) X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}mn} W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)n} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}}$$

$$= N\delta(k-m) = \begin{cases} N, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad 0 < m < N/2$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0 n) \cdot W_N^{nk} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)}} + \frac{1 - e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)N}}{1 - e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{j(\omega_0 - \frac{2\pi}{N}k)}} + \frac{1 - e^{-j\omega_0 N}}{1 - e^{-j(\omega_0 + \frac{2\pi}{N}k)}} \right], \quad 0 \leq k \leq N-1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) W_N^{nk} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\frac{2\pi}{N}mn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+m)n} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-m)N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-m)}} + \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+m)N}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+m)}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[e^{-j\frac{N-1}{N}(k-m)\pi} \frac{e^{j\pi(k-m)} - e^{-j\pi(k-m)}}{e^{j\pi(k-m)} - e^{-j\pi(k-m)}} + e^{-j\frac{N-1}{N}(k+m)\pi} \frac{e^{j\pi(k+m)} - e^{-j\pi(k+m)}}{e^{j\pi(k+m)} - e^{-j\pi(k+m)}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[e^{-j\frac{N-1}{N}(k-m)\pi} \frac{\sin[(k-m)\pi]}{\sin[(k-m)\pi/N]} + e^{-j\frac{N-1}{N}(k+m)\pi} \frac{\sin[(k+m)\pi]}{\sin[(k+m)\pi/N]} \right] \\
 &= \frac{N}{2} \delta(k-m) + \frac{N}{2} \delta(k-N+m) \\
 &= \begin{cases} \frac{N}{2}, & k=m, k=N-m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases} \quad 0 \leq k \leq N-1, 0 < m < N/2
 \end{aligned}$$

[注]当(4)、(6)两题的序列代表模拟信号的抽样时,则应有 $0 < m < \frac{N}{2}$, 这样,可保证信号的频率小于抽样频率之半($f_s/2$)。由于 $\omega = \frac{\Omega}{f_s} = \frac{2\pi}{N}m$, 即 $\frac{f}{f_s} = \frac{m}{N}$, 按抽样定理($f_s > 2f_h$)必须有 $m < N/2$ 。

$$\begin{aligned}
 (7) \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} R_m(n) W_N^{nk} = \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{nk} = \frac{1 - W_N^{km}}{1 - W_N^k} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}km}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \\
 &= \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}km} (e^{j\frac{\pi}{N}km} - e^{-j\frac{\pi}{N}km})}{e^{-j\frac{\pi}{N}k} (e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k})} = e^{-j\frac{\pi}{N}k(m-1)} \frac{\sin(\pi km/N)}{\sin(\pi k/N)}, \quad k=0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

(3.41) 见 3.44

3.42(3.27) 已知 $X(k)$ 如下, 求 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)]$, N 点。

$$X(k) = \begin{cases} -jNe^{j0/2}, & k = m \\ jNe^{-j0/2}, & k = N - m \\ 0, & \text{其他 } k \end{cases} \quad 0 < m < N/2$$

分析

直接用 IDFT 定义求解。

解

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \left[-j \frac{N}{2} e^{j\theta} W_N^{-nm} + j \frac{N}{2} e^{-j\theta} W_N^{-n(N-m)} \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N}mn + \theta)} - e^{-j(\frac{2\pi}{N}mn + \theta)} \right] \\
 &= \sin\left(\frac{2\pi}{N}mn + \theta\right), \quad 0 \leq n \leq N-1
 \end{aligned}$$

3.43(3.35) 设 $x(n)$ 为有限长序列, $0 \leq n \leq N-1$, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$, 若

$$\begin{aligned}
 y(n) &= x((n))_{rN} R_{rN}(n), \quad r \text{ 为正整数} \\
 Y(k) &= \text{DFT}[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1
 \end{aligned}$$

求用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 。

分析

$x(n)$ 长度 N 点, $y(n)$ 长度 rN 点, 求 $y(n)$ 的 DFT 时, 可将 $y(n)$ 解为 r 段长首尾相接的 N 点序列 $x(n)$ 之和, 求此每段 DFT 之和即为 $Y(k)$ 。注意 $Y(k)$ 中变量 k 必须为整数。

解

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n) W_{rN}^{kn} = \sum_{n=0}^{rN-1} x((n))_N e^{-j\frac{2\pi}{rN}nk}$$

$$\text{令 } n = m + lN, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad l = 0, 1, \dots, r-1$$

即将 rN 点序列 $y(n)$ 分段成 r 个首尾相连的 N 点序列之和, 则有

$$\begin{aligned}
 Y(k) &= \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{N-1} x((m + lN))_N e^{-j\frac{2\pi}{rN}(m + lN)k} = \sum_{l=0}^{r-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right] e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} \\
 &= X\left(\frac{k}{r}\right) \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}lk}
 \end{aligned}$$

由于

$$\sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\frac{2\pi}{r}lk} = \begin{cases} r, & k/r = \text{整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因而

$$Y(k) = \begin{cases} rX(k/r), & k/r = \text{整数} \\ 0, & \text{其他 } k/r \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

3.44(3.41) 设有限长 N 点序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], \quad N \text{ 点}$$

若

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & N \leq n \leq rN-1 \end{cases}$$

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)], \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

求用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 。

分析

用 DFT 定义即可求解,但用 $X(k)$ 表示 $Y(k)$ 时,求变量 k 必须为整数。要讨论求出的 $(X|\frac{k}{r})$ 中 $k/r \neq$ 整数的情况。

解

$$\textcircled{1} Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n)W_{Nr}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn/r} \\ = X(k/r), \quad k/r = \text{整数}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

② 当 $k/r \neq$ 整数时有

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n)W_{Nr}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_{rN}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k')W_N^{-k'n} \right] \cdot W_{rN}^{nk} \\ = \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k') \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(\frac{k}{r}-k')n} = \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} X(k') \frac{1 - W_N^{(\frac{k}{r}-k')N}}{1 - W_N^{(\frac{k}{r}-k')}} \\ = \frac{1}{N} \sum_{k'=0}^{N-1} e^{j[\arg(X(k')) - \pi(\frac{N-1}{N})(\frac{k}{r}-k')]} | X(k') | \frac{\sin[\pi(k/r - k')]}{\sin[\pi(\frac{k}{r} - k')/N]}, \\ k/r \neq \text{整数}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

所以在 $Y(k)$ 的一个周期内, $Y(k)$ 的抽样点数是 $X(k)$ 的 r 倍 ($Y(k)$ 的周期为 Nr)。相当于在 $X(k)$ 的每两个值之间插入了 $r-1$ 个其他的数值,如上面 $k/r \neq$ 整数时 $Y(k)$ 的表示式;当 k 为 r 的整数倍时, $Y(k)$ 与 $X(k/r)$ 相等,如上面的 $k/r =$ 整数时 $Y(k)$ 的表示式。

3.45 有限长序列 $x(n)$ 的 DFT, 就相当于 $x(n)$ 的 z 变换在单位圆上的等间隔角的抽样。例如, 8 点序列的 8 点离散傅里叶变换就相当于 $X(z)$ 在单位圆的 8 个等间隔点上的抽样, 其 z 平面的抽样点如图 P3.45(a) 所示。如果我们在 $|z| = 1/2$ 的圆上 (如图 P3.45(b) 所示) 另一种 8 个等间隔点上, 对 $X(z)$ 抽样, 即

$$X(z) \big|_{z=0.5e^{j[2\pi k/8+\pi/8]}}$$

试指出其等效的 $x_1(n)$ 的表达式, 使得 $x_1(n)$ 的 DFT 相当于上述的 $|z| = 1/2$ 的圆上对 $X(z)$ 的抽样。

分析

只须将以上在 $|z| = \frac{1}{2}$ 的圆上的抽样公式转换成在 $|z| = 1$ 的单位圆上的插样公式, 即可求得 $x_1(n)$ 。

解

8 点序列 $x(n)$ 的 z 变换及 DFT 为 (如图 P3.45(a) 所示抽样点)

$$X(z) = \sum_{n=0}^7 x(n)z^{-n} \\ X(k) = X(z) \big|_{z=e^{j2\pi k/8}} = \sum_{n=0}^7 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}$$

在图 P3.45(b) 表示的 $|z| = \frac{1}{2}$ 的圆上的 8 个抽样点对 $X(z)$ 抽样, 则有

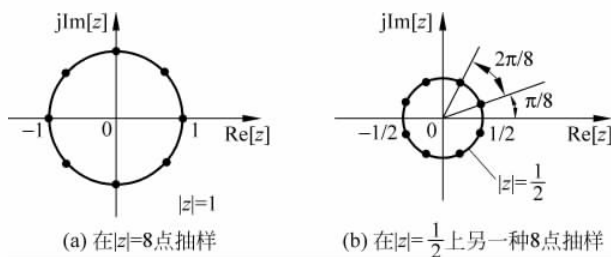


图 P3.45

$$\begin{aligned}
 X(z) \Big|_{z=0.5e^{j[2\pi k/8+\pi/8]}} &= \sum_{n=0}^7 x(n) [0.5e^{j[2\pi k/8+\pi/8]}]^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^7 [x(n)2^n e^{-jn\pi/8}] e^{-j\frac{2\pi}{8}nk} = \sum_{n=0}^7 x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}nk}
 \end{aligned}$$

由此看出,当 $x_1(n) = x(n)2^n e^{-jn\pi/8}$ 时,其 DFT 相当于图 P3.45(b)所示的 $|z|=1/2$ 的 $X(z)$ 的 8 点抽样,即

$$\text{DFT}[x_1(n)] = \sum_{n=0}^7 x_1(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = X_1(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{8}k}} = \sum_{n=0}^7 x_1(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{8}k}}$$

3.46 把教程 M 版例 3.8 反过来求解,已知 $X(k)$ 是 $2N$ 点实序列 $x(n)$ 的 $2N$ 点 DFT, 试用一个 N 点 IDFT 来求 $2N$ 点的实序列 $x(n)$ 。

分析

要利用例 3.8 结果求解,请仔细研究例 3.8 后再作此题。

解

与例 3.8 同样思路,若将 $x(n)$ ($2N$ 点) 分成 $x_1(n)$ (n 为偶数) 及 $x_2(n)$ (n 为奇数), 则可以得到 $X(k)$ ($2N$ 点) 与 $X_1(k)$ (N 点) $X_2(k)$ (N 点) 的关系, 即

$$\left. \begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(k+N) &= X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{aligned} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

可将此式改写为

$$X_1(k) = \frac{1}{2} [X(k) + X(k+N)]$$

$$X_2(k) = \frac{1}{2} [X(k) - X(k+N)] W_{2N}^{-k}$$

其中

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)], N \text{ 点}$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)], N \text{ 点}$$

因而整个求解过程如下:

首先,用上面式子,由给出的 $2N$ 点 $X(k)$ 求 N 点的 $X_1(k)$ 及 $X_2(k)$ 。

其次,构成一个新序列 $Y(k)$ (N 点)

$$Y(k) = X_1(k) + jX_2(k) = Y_{ep}(k) + Y_{op}(k)$$

第三,求 $Y(k)$ 的 N 点 IDFT, 得到 $y(n)$ (N 点)

$$\begin{aligned} y(n) &= \text{IDFT}[Y(k)] = \text{IDFT}[X_1(k)] + \text{IDFT}[\text{j}X_2(k)] \\ &= \text{IDFT}[Y_{ep}(k)] + \text{IDFT}[Y_{op}(k)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

按例 3.8 知 $X_1(k) = Y_{ep}(k)$, $\text{j}X_2(k) = Y_{op}(k)$

而由 DFT 的共轭对称性可知

$$\text{IDFT}[Y_{ep}(k)] = \text{Re}[y(n)] = \text{IDFT}[X_1(k)] = x_1(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\frac{1}{\text{j}} \text{IDFT}[Y_{op}(k)] = \text{Im}[y(n)] = \text{IDFT}[X_2(k)] = x_2(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

最后,有

$$x(n) = \begin{cases} x_1\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ 偶数} \\ x_2\left(\frac{n-1}{2}\right), & n \text{ 奇数} \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1$$