第 3 章

正弦稳态电路分析

交流电是指大小和方向随时间变化的电压和电流，正弦交流电路是指含有正弦电源(激励)而且电路各部分所产生的电压和电流(响应)均按正弦规律变化的电路。在实际生产和生活中，正弦交流电路具有广泛的应用，许多电工设备和仪器中的电路都是在正弦交流状态下进行的。例如，电力设备的设计和性能大多是根据正弦稳态电路的特点来考虑的；产生交流电的交流发电机和拖动生产机械的交流电动机与相应的直流电动机相比，具有构造简单、价格低廉的优点；调频载波信号都是高频正弦波；后面介绍的放大电路放大的信号大多是以正弦交流电为激励信号等。后文如未说明，交流电均指正弦交流电。

本章主要讲述正弦交流电的基本概念、正弦量的相量表示法；电阻、电感和电容元件的相量模型；三种单一参数电路及其串联、并联电路参数分析。本章所讨论的一些基本概念、基本理论和基本分析方法，是以后学习模拟电子技术的重要基础。

3.1 正弦交流电的基本概念

正弦波形是最常用的波形之一，周期性变化的波形常常可以分解为许多正弦波形的叠加，从而使正弦波形成为电力和电子工程中传递能量或信息的主要形式。

电路中按正弦规律变化的电流、电压统称为正弦量。正弦量的波形如图 3.1 所示。

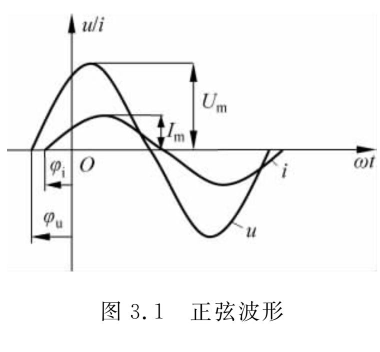

图 3.1 正弦波形

正弦电压或电流可以用时间 t 的三角函数式来描述：

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

式中，$u(t)$、$i(t)$表示正弦交流电在某一时刻 t 的电压、电流值，称为瞬时值。当 $\sin(\omega t+\varphi)=1$ 时，正弦量达到最大值，U_m、I_m 表示正弦交流电在变化过程中出现的最大值，又称为幅值。当 $\sin(\omega t+\varphi)=-1$ 时，正弦量达到最小值，最大值与最小值之差称为峰—峰值($2U_m$、$2I_m$)。ω 为正弦交流电的角频率，反映正弦交流电变化的快慢。φ_u、φ_i 为正弦交流电压和电流的初相位。幅值、角频率、初相位是描述正弦函数的三个特征量，称为正弦交流电的三要素，这三个量确定后，正弦量的表达式及波形也就确定了。

3.1.1 周期与频率

正弦量的一个变化循环称为一个周波。变化一个周波所需的时间称为周期,用符号 T 表示,周期 T 的单位是秒(s)。

正弦量每秒钟变化的周波数称为频率,用 f 表示,它的单位是赫兹(Hz)。显然,频率是周期的倒数,即

$$f = \frac{1}{T} \tag{3-1}$$

较高的频率用千赫(kHz)和兆赫(MHz)表示:

$$1\text{kHz} = 10^3\,\text{Hz}, \quad 1\text{MHz} = 10^6\,\text{Hz}$$

我国和世界上大多数国家都采用 50Hz 作为电力系统的标准频率,采用这种频率的交流电,常称为工频电源。工频电源为大多数交流电动机及照明用电所采用。

正弦交流电变化一个周期,相当于正弦函数变化 2π 弧度,每秒钟变化的弧度数称为角频率,用 ω 表示。它与周期、频率的关系为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{3-2}$$

角频率的单位是弧度/秒(rad/s)。ω、f、T 都是表征正弦量变化速度的,频率 f 越高,则变化越快。

3.1.2 幅值与有效值

正弦交流电量的大小可由瞬时值、幅值、有效值来表示。正弦量在某一时刻的值称为瞬时值,本书中规定一律用小写字母表示,如电势 e、电压 u、电流 i 等。显然,瞬时值是随时间变化的,是时间的函数。正弦量变化过程中达到的最大值称为幅值,用下标为 m 的大写字母来表示,如电动热 E_{m}、电压 U_{m}、电流 I_{m} 等。

用瞬时值或幅值来表示正弦量在测量和使用上并不方便,在工程中常将周期电流或电压在一个周期内产生的平均效应换算为等效的直流量,以衡量和比较周期电流或电压的效应,这一等效的直流量称为周期量的有效值,用相应的大写字母表示。正弦量的值常用有效值来表示,如日常生活用电为交流 220V,指的就是正弦交流电压的有效值。

定义有效值的标准是能量,是通过电流的热效应来规定的。若在电阻 R 上通过任何一个周期性变化的电流 i 时,在一个周期 T 内产生的热量与某个直流电流 I 通过同一电阻 R 在时间 T 内产生的热量相等,那么这个等效的直流电流 I 就定义为交流电流 i 的有效值,据此有

$$\int_0^T i^2 R\,\mathrm{d}t = I^2 RT$$

有效值

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}$$

对于正弦电流 $i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})$,有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_{\mathrm{i}})\,\mathrm{d}t} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \tag{3-3a}$$

同理，正弦电压的有效值为

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \tag{3-3b}$$

正弦电势的有效值为

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \tag{3-3c}$$

式(3-3)表明，正弦交流电的有效值为其幅值的$\frac{1}{\sqrt{2}}$，如 220V 的照明用电，其幅值则为 311V。因此，正弦量的三角函数式也可表示为

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e) = \sqrt{2} E \sin(\omega t + \varphi_e)$$

上式中的有效值(U、I、E)、ω、φ 也可以用来表示正弦交流电的三要素。工程中使用的交流电气设备铭牌上标出的额定电压、额定电流数值、由交流电压表、电流表测量出来的电压、电流值均指有效值。

3.1.3　初相

正弦交流电在不同时刻得到的瞬时值是不同的。对于正弦量 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$，其中 $\omega t + \varphi_i$ 称为正弦量的相位，它是随时间变化的电角度，也叫作相位角，单位是弧度(rad)。$t=0$ 时的相位 φ_i 称为初相位，简称初相。工程上习惯用度作单位，而且 $|\varphi_i| \leqslant 180°$。正弦量的初相不同，其初始值也不同，得到的正弦波形也不一样，图 3.2 表示了不同初相下所对应的正弦电流 $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ 的波形。

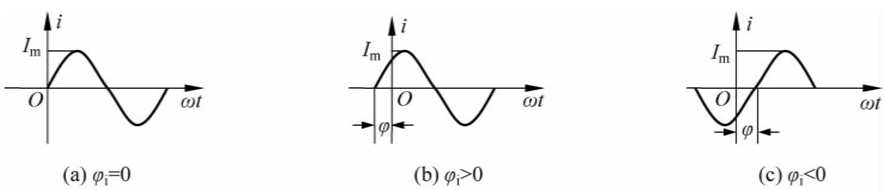

图 3.2　不同初相时的正弦电流波形

对于两个同频率的正弦量，如

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

其初相位分别为 φ_u、φ_i，它们的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i) = \varphi_u - \varphi_i$$

可见两个同频正弦量的相位差取决于两个正弦量的初相位。不同时刻电压、电流的相位不同，但它们的相位差不变。当 $\varphi > 0$(即 $\varphi_u > \varphi_i$)时，电压 u 比电流 i 先到达正幅值，称电压 u 在相位上比电流 i 超前 φ 角，或称电流 i 在相位上比电压 u 滞后(落后)φ 角，如图 3.3(a)所示；反之，当 $\varphi < 0$(即 $\varphi_u < \varphi_i$)时，电流 i 比电压 u 先到达正幅值，在相位上电流 i 比电压 u 超前 φ 角，如图 3.3(b)所示。

也有特例：当相位差 $\varphi = 0$(即 $\varphi_u = \varphi_i$)时，称电压 u 与电流 i 为同相，如图 3.3(c)所

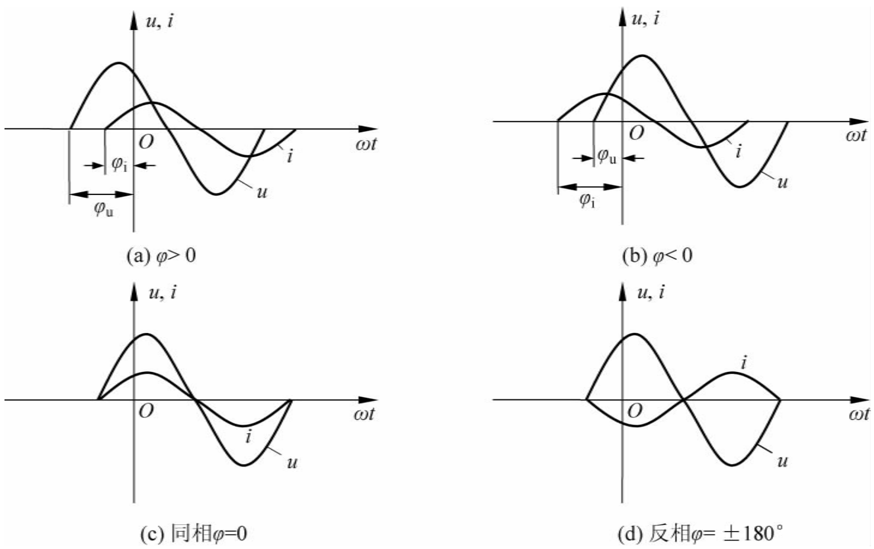

图 3.3 同频率两个正弦量的相位差

示。当相位差 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i=\pm180°$时,电压 u 与电流 i 为反相,如图 3.3(d)所示。

注意:相位差是基于两个正弦量同频的基础上。

【例 3-1】 已知 $i=10\sin(314t+150°)$ A,$u=50\sin(314t-60°)$ V,求这两个正弦量的相位差。

解 按照相位差定义可得

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i=-60°-150°=-210°$$

从结果来看,电压滞后电流 210°,但是也可以说下一个电压周期超前电流 150°,如图 3.4 所示。那么究竟是电压超前电流还是电压滞后电流呢?我们规定,相位差不能超过±180°。所以本例是电压超前电流 150°。从图 3.4 也可以看到,u 比 i 先到达正幅值,为超前。

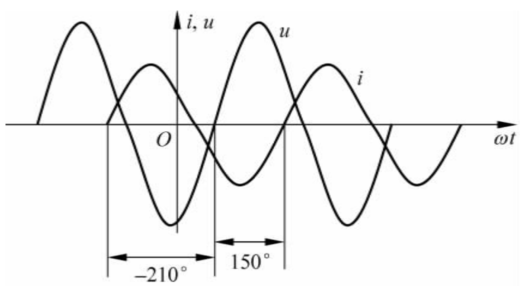

图 3.4 例 3-1 电压、电流波形图

【例 3-2】 已知 $u=12\cos(314t-120°)$ V,$i=-2\sin(314t+60°)$ A,求:

(1) 角频率 ω、频率 f、周期 T、最大值 U_m、I_m 及初相位 φ_u 和 φ_i;

(2) u 和 i 的相位差;

(3) 用交流电压表和交流电流表测量电压及电流时,两个表的读数。

解 (1) 分析正弦量时,首先应该将正弦量的表示式写成标准形式,本书所有正弦量

的数学描述均以 sin 函数表示，因此有

$$u=12\cos(314t-120^\circ)\mathrm{V}=12\sin(314t-120^\circ+90^\circ)\mathrm{V}=12\sin(314t-30^\circ)\mathrm{V}$$

$$i=-2\sin(314t+60^\circ)\mathrm{A}=2\sin(314t+60^\circ-180^\circ)\mathrm{A}=2\sin(314t-120^\circ)\mathrm{A}$$

根据上两式可得

$$\omega=314\mathrm{rad/s},\quad f=\frac{\omega}{2\pi}=50\mathrm{Hz},\quad T=\frac{1}{f}=0.02\mathrm{s}$$

$$U_\mathrm{m}=12\mathrm{V},\quad I_\mathrm{m}=2\mathrm{A},\quad \varphi_\mathrm{u}=-30^\circ,\quad \varphi_\mathrm{i}=-120^\circ$$

(2) 相位差为 $\varphi=\varphi_\mathrm{u}-\varphi_\mathrm{i}=-30^\circ-(-120^\circ)=90^\circ$，说明电压超前电流 90°。

(3) 用交流电压表和交流电流表测量电压、电流时，交流表的读数均为有效值，即

$$U=\frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}\mathrm{V},\quad I=\frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\mathrm{A}$$

3.2　正弦交流电的表示法

在正弦稳态电路的分析中，经常要进行大量的同频率正弦量相加减的计算，直接采用正弦量的瞬态表达式进行运算时，三角函数的计算是很烦琐的。由于正弦稳态响应与激励都是同频率正弦量，可以应用数学上的变换思想，利用正弦量与复数可以互换的特点，将正弦量用复数表示，由复数计算代替正弦量计算，大大降低了计算的复杂度，最终可以将复数形式的计算结果反变换成正弦量。这种变换方法称为相量法，表示正弦量的复数称为相量。

3.2.1　复数

相量法是建立在复数运算的基础上，因此本小节将对复数及其运算进行简要的介绍。

1. 复数的表示形式

复数一般有代数式、三角函数式、指数式和极坐标式四种表示形式。

假设 A 是复平面上的一个点，可以采用原点指向 A 点的向量来表示其复数形式，如图 3.5 所示。复数 A 的代数式为

$$A=a+\mathrm{j}b$$

式中，$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为虚单位；a 是复数 A 的实部，记为 $a=\mathrm{Re}[A]$；b 为复数 A 的虚部，记为 $b=\mathrm{Im}[A]$。

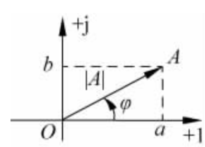

图 3.5　复数的向量表示

根据图 3.5，还可以采用三角函数式表示复数 A：

$$A=|A|(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)$$

式中，$|A|$ 为向量的长度，称为复数 A 的模；φ 是向量与正实轴的夹角，称为复数 A 的辐角。

由图 3.5 可知：

$$a=|A|\cos\varphi$$

$$b=|A|\sin\varphi$$

$$|A|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{b}{a}$$

根据欧拉公式 $e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi$，复数还可以表示为指数形式：

$$A=|A|(\cos\varphi+j\sin\varphi)=|A|e^{j\varphi}$$

为了方便书写，复数的指数形式还可以用极坐标形式表示为

$$A=|A|e^{j\varphi}=|A|\angle\varphi$$

这四种形式可以互相转换，通常复数的加减运算会采用代数式；复数的乘除运算会采用指数形式或极坐标形式。

复数 $e^{j\varphi}=1\angle\varphi$ 是模等于1而辐角为 φ 的复数；复数 $A=|A|e^{j\varphi}$，乘以 $e^{j\varphi}$ 等于把长度为 $|A|$ 的向量逆时针方向旋转一个角度 φ，而 A 的模 $|A|$ 不变，因此 $e^{j\varphi}$ 称为旋转因子。

由欧拉公式不难看出：

$$e^{j90^\circ}=\cos90^\circ+j\sin90^\circ=j$$

$$e^{-j90^\circ}=\cos(-90^\circ)+j\sin(-90^\circ)=-j$$

因此 j 和 $-$j 均为旋转因子，分别称为 90° 旋转因子和 -90° 旋转因子。例如，一个复数乘以 j，等于把该复数在复平面上逆时针旋转 90°；一个复数乘以 $-$j（相当于除以 j），等于把该复数在复平面上顺时针旋转 90°。

2. 复数的运算

1）复数的加减运算

一般情况下，采用复数的代数式进行复数的加减运算。

设有复数 $F_1=a_1+jb_1$，$F_2=a_2+jb_2$，那么有

$$F_1\pm F_2=(a_1+jb_1)\pm(a_2+jb_2)=(a_1\pm a_2)+j(b_1\pm b_2)$$

即实现复数相加（减）的原则是复数的实部与实部相加（减），虚部与虚部相加（减）。

复数的加减运算也可以采用复平面上平行四边形制图法进行，如图3.6所示。

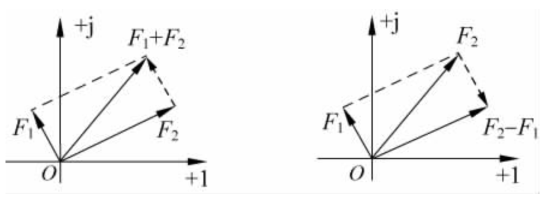

图3.6 复数加减运算图解法

2）复数的乘除运算

复数的乘除运算通常采用复数的指数形式或极坐标形式比较方便。

对两个复数 $F_1=a_1+jb_1$，$F_2=a_2+jb_2$，首先需要将其转换为指数形式或极坐标形式。例如：

$$F_1=|F_1|e^{j\varphi_1}$$

式中，$|F_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$，$\varphi_1=\arctan\dfrac{b_1}{a_1}$。

$$F_2=|F_2|e^{j\varphi_2}$$

式中，$|F_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2}$，$\varphi_2=\arctan\dfrac{b_2}{a_2}$。

这两个复数的乘除结果为

$$F_1F_2 = |F_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}|F_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = |F_1||F_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} = |F_1||F_2|\underline{/\varphi_1+\varphi_2}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{|F_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{|F_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \frac{|F_1|}{|F_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{|F_1|}{|F_2|}\underline{/\varphi_1-\varphi_2}$$

即实现复数相乘(除)的原则是模与模相乘(除),辐角与辐角相加(减)。

在某些数据比较特殊的复数运算中,采用代数式进行复数乘除运算也可以很简便地得到结果,这里不再赘述。

3.2.2 旋转矢量法

正弦交流电有几种不同的表示形式,如前面述及的三角函数表示法和波形图表示法。前者能方便地求得任意时刻的瞬时值,后者形象直观。但两者共同的不足是两个正弦量加减运算时,运算比较复杂。而相量表示法能解决上述的不足,为此,先讨论旋转矢量表示法。

设有一个正弦电流 $i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$,如图 3.7 所示,左边为一以角速度 ω 作逆时针旋转的矢量 A,它的长度代表正弦量的幅值 I_m,初始位置($t=0$)与横坐标的夹角反映了正弦量的初相 φ,这个旋转矢量相关参数正是正弦量的三要素,因此可用来表示正弦量。旋转矢量在旋转过程中,每一瞬时在纵轴上的投影反映了该时刻正弦量的瞬时值。如在 $t=0$ 时,$i_0=I_m\sin\varphi$; 在 $t=t_1$ 时,$i_1=I_m\sin(\omega t_1+\varphi)$。

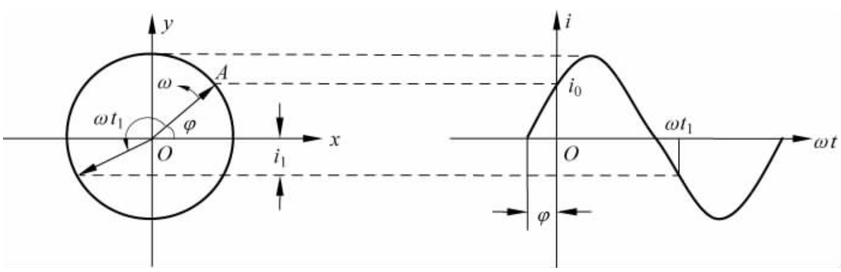

图 3.7　用旋转矢量表示的正弦量

在线性非时变正弦稳态电路中,只要电源(激励)是正弦量,所有的电压、电流都是同一频率的正弦量。本书将在此基础上将频率考虑为固定常量,因此,只要确定了一个旋转矢量的幅值和初相,就可以写出它所表示的正弦交流电的瞬时表达式。反之,给定一个正弦量的瞬时表达式,也可确定对应的旋转矢量。

3.2.3 相量表示法

正弦量可以用一个旋转的有向线段(矢量)来表示,而有向线段可以用复数来表示,复数的模表示正弦量的大小(幅值),复数的辐角表示正弦量的初相位。把表示正弦量的复数称为相量,用相量表示的正弦量称为正弦量的相量表示法。为了区别相量与复数,将相量符号用大写字母上面加一点来表示,如电压相量 $\dot{U}_m$、电流相量 $\dot{I}_m$ 等。一个正弦量 $i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$ 的相量表示法为:$\dot{I}_m=I_m\underline{/\varphi}=I_m(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)$。

相量有幅值相量和有效值相量,有效值相量与幅值相量的关系为$\dot{U}=\dfrac{\dot{U}_m}{\sqrt{2}}$,$\dot{I}=\dfrac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}}$。因

此一个正弦量 $i=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$ 的有效值相量表示法为：$\dot{I}=I\angle\varphi=I(\cos\varphi+\mathrm{j}\sin\varphi)$，由于正弦交流电常以有效值形式表示，后续不特殊说明的都采用有效值相量。

正弦量可以采用相量表示法来描述，那么正弦量相加的结果是否也可以采用相量相加的结果来描述呢？下面论证同频复数加法与正弦量加法之间的关系。

如前所述，一个正弦量 $i=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$ 的幅值相量表示法为 $\dot{I}_{\mathrm{m}}=I_{\mathrm{m}}\angle\varphi=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$。由数学公式可知，对于一个复数

$$I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=\dot{I}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

根据欧拉公式有

$$I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{j}I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi) \tag{3-4}$$

说明正弦电流量 i 为式(3-4)复数的虚部，即

$$i=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)=\mathrm{Im}[I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}]=\mathrm{Im}[\dot{I}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

现有两个同频正弦电流分别为

$$i_1=I_{1\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_1)=\mathrm{Im}[\dot{I}_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$i_2=I_{2\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_2)=\mathrm{Im}[\dot{I}_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

则

$$i=i_1+i_2=\mathrm{Im}[\dot{I}_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]+\mathrm{Im}[\dot{I}_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[(\dot{I}_{1\mathrm{m}}+\dot{I}_{2\mathrm{m}})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\dot{I}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

式中：

$$\dot{I}_{\mathrm{m}}=\dot{I}_{1\mathrm{m}}+\dot{I}_{2\mathrm{m}}=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

从而有

$$i=\mathrm{Im}[I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}]=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$$

由此推导可知，两个正弦量的加法可以通过相应的两个相量表示式的复数加法运算 $\dot{I}_{\mathrm{m}}=\dot{I}_{1\mathrm{m}}+\dot{I}_{2\mathrm{m}}=I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ 来获得所需要的幅值和初相位。

正弦稳态电路中的电流是与激励同频率的正弦函数，由基尔霍夫电流定律可知：

$$\begin{aligned}\sum i(t)&=\sum I_{k\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_{\mathrm{k}})\\&=\sum\mathrm{Im}[I_{k\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{k}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}\sum[I_{k\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{k}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\\&=\mathrm{Im}\sum[\sqrt{2}\,\dot{I}_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\sum\dot{I}_k]=0\end{aligned} \tag{3-5}$$

因此有

$$\sum\dot{I}_k=0$$

或

$$\sum\dot{I}=0$$

这是基尔霍夫电流定律的相量形式。当电路中的正弦电流用相量表示时，可以根据此式列出各节点的电流相量方程，式(3-5)中 Im 是取虚部的符号。

同理，基尔霍夫电压定律 $\sum u(t)=0$ 在正弦电路中的相量形式为

$$\sum \dot{U}=0$$

当电路中的正弦电压用相量表示时，可根据基尔霍夫电压定律的相量形式写出各回路的电压相量方程，最后将求解出来的相量反变换成正弦量。

【例 3-3】 已知 $i_1=12\sin(314t-45°)\,\text{A}$，$i_2=-2\sin(314t+45°)\,\text{A}$，计算这两个电流之和 i。

解 首先写出这两个电流的相量表示式，要注意写相量表示式时必须先将正弦量写成标准形式，因此有

$$i_2=-2\sin(314t+45°)=2\sin(314t+45°-180°)=2\sin(314t-135°)\,\text{A}$$

相量表示式为

$$\dot{I}_1=\frac{12}{\sqrt{2}}\underline{/-45°}=\frac{12}{\sqrt{2}}[\cos(-45°)+\text{j}\sin(-45°)]=6-\text{j}6(\text{A})$$

$$\dot{I}_2=\frac{2}{\sqrt{2}}\underline{/-135°}=\frac{2}{\sqrt{2}}[\cos(-135°)+\text{j}\sin(-135°)]=-1-\text{j}(\text{A})$$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=(6-\text{j}6)+(-1-\text{j})=5-\text{j}7=\sqrt{5^2+7^2}\underline{/\arctan\left(-\frac{7}{5}\right)}=8.6\underline{/-54.5°}$$

最后，将相量和的结果反变换为正弦电流表达式：

$$i=8.6\sqrt{2}\sin(314t-54.5°)\,\text{A}=11.6\sin(314t-54.5°)\,\text{A}$$

由此例可以看到，相量运算的实质就是复数运算，通过复数形式不但可以用来描述正弦量，还可以非常便捷地实现正弦量的加减运算。

注意： 相量表示式只是正弦量的描述形式，不等同于正弦量，其表示式不包含频率成分，因此要正确描述正弦量时，必须单独写出瞬时表达式，不能在相量表达式后面直接用等号，即

$$\dot{I}=8.6\underline{/-54.5°}\neq 11.6\sin(314t-54.5°)(\text{A})$$

3.3　单一元件的交流电路

在 3.2 节的理论叙述中，已经得到一个重要结论，即在线性非时变正弦稳态电路中，所有的电压、电流都是在同一频率的正弦量。本节将在此基础上直接用相量通过复数形式的电路方程来描述单一元件交流电路中的电流电压伏安特性（也称元件约束关系 VCR，Voltage Current Relation）及其功率分析。

3.3.1　纯电阻电路

1. 元件约束关系

电路如图 3.8(a)所示，设电阻 R 两端电压为 u_R，流过电流为 i_R，参考方向如图 3.8(a)所示。

首先设流过电阻的电流 i_R 为

$$i_R = I_{Rm}\sin(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2}I_R\sin(\omega t + \varphi_i)$$

根据欧姆定律

$$u_R = Ri_R = RI_{Rm}\sin(\omega t + \varphi_i) = U_{Rm}\sin(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2}U_R\sin(\omega t + \varphi_u)$$

从电阻上流过的电流 i_R 与其端电压 u_R 的表达式不难看出,电阻上的电压、电流不但为同频率的正弦量,而且在相位上具有同相位的关系(相位差为零),图 3.8(b)所示为电压和电流的正弦波形。

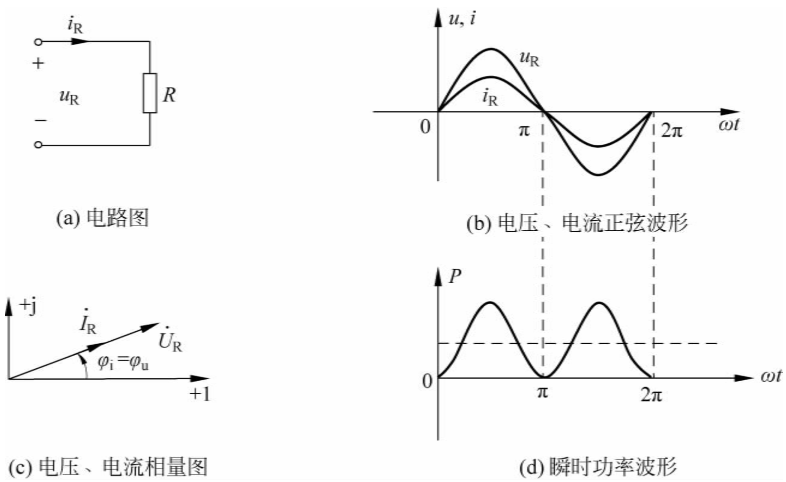

图 3.8 电阻元件交流电路电压、电流功率波形图及相量图

由电压、电流瞬时值表达式还可以得到

$$U_{Rm} = RI_{Rm} \quad 或 \quad U_R = RI_R \tag{3-6}$$

即在电阻元件电路中,电压的幅值(或有效值)与电流的幅值(或有效值)之比即为电阻 R。

用相量表示法表示电阻上的电压、电流:

$$\dot{U}_R = U_R\underline{/\varphi_u}, \quad \dot{I}_R = I_R\underline{/\varphi_i} \tag{3-7}$$

因为

$$\frac{\dot{U}_R}{\dot{I}_R} = \frac{U_R\underline{/\varphi_u}}{I_R\underline{/\varphi_i}} = R$$

因此有

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \tag{3-8}$$

由式(3-8)可以看到,电阻上的电流、电压相量表示形式同样满足欧姆定律,根据相量关系可画出电压和电流的相量图,如图 3.8(c)所示。

2. 功率计算

在任一瞬间,某个元件上电压瞬时值 u 与电流瞬时值 i 的乘积,称为瞬时功率,用小写字母 p 表示,电阻 R 上的瞬时功率为