测量误差与测量不确定度评定

3.1 常用计量术语

常用计量术语主要是为了便于下文的叙述而简要列出的。引用了我国JJF 1001—2011通用计量术语及定义技术规范部分内容,它是依据国际标准ISO、IEC GUIDE 99:2007修订后的版本。该规范中所用的概率与统计术语基本采用国际标准ISO 3534-1:2006的术语和定义。

1. 量(quantity)

现象、物体或物质的特性,其大小可用一个数和一个参照对象表示。量,可指一般的概念的量,如长度、能量、温度、电阻、电荷等;也可以指特定的量,如某人的身高和体重等。参考对象可以是一个测量单位、测量程序、标准物质或其组合。

量从概念上一般可分为物理量、化学量、生物量,或分为基本量和导出量。

2. 被测量(measurand)

被测量是指拟测量的量,它可以是待测量的量,也可以是已测量的量。

3. 影响量(influence quantity)

影响量是指在直接测量中不影响实际被测的量,但会影响示值与测量结果之间关系。例如,用安培计直接测量交流电流恒定幅度时的频率,测量某杆长度时测微计的温度(不包括杆本身的温度,因为杆的温度可以进入被测量的定义中)等。

4. 量值(quantity value)

量值全称量的值(value of a quantity),简称值(value),指用数和参照对象一起表示的量的大小。例如,给定杆的长度为5.34m或534cm,给定物体的质量为0.152kg或152g等。

5. 量的真值(true quantity value, true value of quantity)

量的真值简称真值(true value),是指与量的定义一致的量值。在描述关于测量的“误

差方法”中，认为真值是唯一的，实际上是不可知的，而只能随着科技的发展，认识的提高去逐渐接近它。在“不确定度方法”中认为，由于定义本身细节不完善，不存在单一真值，只存在与定义一致的一组真值，然而，从原理上和实际上，这一组值是不可知的。近年来，鉴于量的真值是一个理想的概念，已不再使用它，而代之以“量的值”或“被测量的值”。

6. 约定量值(conventional quantity value)

约定量值又称量的约定值(conventional value of a quantity)，简称约定值(conventional value)，是指对于给定目的，由协议赋予某量的量值。例如，标准自由落体加速度 g_n=9.806 65m·s^{-2}，给定质量标准的约定量值 m=100.003 47g。

一般来说，约定真值与真值的差值可以忽略不计，故而在实际应用中，约定真值可以代替真值。

7. 实际值(actual value)

实际值是指满足规定精确度的用来代替真值的量值。实际值可理解为由实验获得的，在一定程度上接近真值的量值。在计量检定中，通常将上级计量标准所复现的量值称为下级计量器具的实际值。

8. 测量结果(measurement result, result of measurement)

测量结果是指与其他有用的相关信息一起赋予被测量的一组量值，即由测量得到的被测量的量值及其不确定度，还应包括测量条件、主要影响量的值及范围的说明。

9. 测量重复性(measurement repeatability)

测量重复性简称重复性(repeatability)，是指在一组重复性测量条件下的测量精密度。它一般可用结果之间的差值(离散)来定量表示。

10. 重复性测量条件(measurement repeatability condition of measurement)

重复性测量条件是指相同测量程序、相同操作者、相同测量系统和相同操作条件和相同地点，并在短时间内对同一或相类似被测对象重复测量的一组测量条件。

11. 复现性测量条件(measurement reproducibility condition of measurement)

复现性测量条件是指不同地点、不同操作者或不同测量系统(可包括不同的测量程序)，对同一或相类似被测对象重复测量的一组测量条件。上述条件中，可以是某项不同，某些项不同，也可以是所有项都不同。

12. 测量复现性(measurement reproducibility)

测量复现性简称复现性(reproducibility)，是指在复现性测量条件下的测量精密度。它一般可用结果之间的差值(离散)来定量表示。

13. 测得的量值(measured quantity value)

测得的量值又称量的测得值(measured value of a quantity)，简称测得值(measured value)，代表测量结果的量值。它可能是从计量器具直接得出的量值，也可能是通过必要的换算、查表等所得出的值。

14. 测量准确度(measurement accuracy, accuracy of measurement)

测量准确度简称准确度(accuracy)，是指被测量的测得值与其真值间的一致程度。它是精密度和正确度的综合反映。

15. 测量正确度(measurement trueness, trueness of measurement)

测量正确度简称正确度(trueness),是指无穷多次重复测量所得量值的平均值与一个参考量值间的一致程度。它反映的是测量结果的系统误差的大小。

16. 测量精密度(measurement precision)

测量精密度简称精密度(precision),是指在规定条件下对同一或类似被测对象重复测量所得示值或测得值间的一致程度。其中规定条件可以是重复性测量条件、复现性测量条件。它反映的是测量结果的随机误差的大小。

至于通常所说的测量精度或计量器具的精度等,一般指的是准确度,而并非精密度。也就是说,精度是精确度(准确度)习惯上的简称。本书中所用的精确度(准确度),是精密度和正确度的综合概念。

如图 3-1 所示,设圆心"○"为真值,黑点为测量结果。则图 3-1(a)正确度较高,精密度较差;图 3-1(b)精密度较高,正确度较差;图 3-1(c)精密度和正确度都较高,即精确度(准确度)较高。

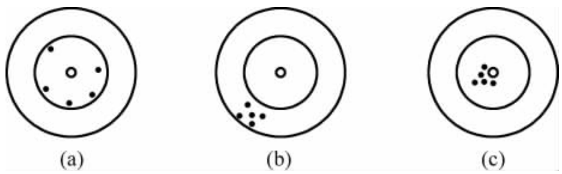

图 3-1 精密度、正确度、准确度示意图

3.2 测量误差

人们对自然现象的研究,不仅要进行定性的观察,还必须通过各种测量进行定量描述。由于被测量的数值形式常常不能以有限位的数来表示,而且人们认识能力的不足和科学水平的限制,实验中测得的值和它的真值并不一致,这种矛盾在数值上的表现即为误差。随着科学水平的提高和人们的经验、技巧和专门知识的丰富,误差可以控制得越来越小,但不能使误差为零,误差始终存在于一切科学实验的过程中。

由于误差歪曲了事物的客观形象,而它们又必然存在,所以,我们就必须分析各类误差产生的原因及其性质,从而制定控制误差的有效措施,正确处理数据,以求得正确的结果。

研究实验误差,不仅使我们能正确鉴定实验结果,还能指导我们正确地组织实验。例如,合理地设计仪器、选用仪器及选定测量方法,使我们能以最经济的方式获得最好的效果。

3.2.1 误差的定义

误差表示测得值与被测量真值的差值。其中测得值指测量值、标示值、标称值、近似值等给出的非真值。真值是指在某一时刻、某一位置或某一状态某量的客观值或实标值。

严格地讲,被测量的真值永远是未知的,而只能随着科技的发展、测试方法和手段的改进以及人们认识的加深,使测得值越来越接近真值。因此,通常所说的真值,实际上是相对真

值。国际计量大会所规定的计量单位值，称为计量学中的约定相对真值，或简称约定真值。

真值的分类见表 3-1。

表 3-1　真值的分类

类型	举　　例
理论真值	平面三角形三个内角和为 180°；同一量自身之差为零，自身之比为 1
计量学约定真值	米：在 1/299 792 458s 的时间内光在真空中行进的路程长度。 秒：1 秒是铯-133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的 9 192 631 770 个周期的持续时间。 安培：一恒定电流，如果处在真空中相距 1 米的两根无限长而圆截面可忽略的平行直导线，所载电流各保持 1 安培，则这两导线间每单位长度的作用力为 2×10^{-7} 牛顿·米。 开尔文：水的三相点热力学温度的 1/273.16
标准器相对真值	高一级标准器的误差与低一级标准器或普通仪器的误差相比为 1/5（或者 1/3～1/10）时，则可以认为前者是后者的相对真值

对于多次重复测量，有时亦可视测得值的平均值为相对真值。

误差的定义有多种形式，主要有以下几种。

1. 绝对误差

绝对误差 Δx 是测得值 x 与其真值 x_0 之差，即

$$\Delta x = x - x_0 \tag{3-1}$$

它反映测得值离真值的大小。

2. 相对误差

相对误差 δx 是测得值 x 的绝对误差与其真值 x_0 之比，即

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0}\times 100\% = \frac{x - x_0}{x_0}\times 100\% \tag{3-2}$$

一般用百分数表示。

例如，用一频率计测量准确值为 100kHz 的频率源，测得值为 101kHz，测量误差为 1kHz，又用波长表测量一准确值为 1MHz 的标准频率源，测得值为 1.001MHz，其误差也为 1kHz。上面两个测量，从误差的绝对量来说是一样的，但它们是在不同频率点上进行测量的，它们的准确度是不同的。为描述测量的准确度而引入相对误差的概念。

3. 引用误差

引用误差系计量器具的绝对误差与其特定值之比，即

$$\delta x_{\text{lim}} = \frac{\Delta x}{x_{\text{lim}}} \tag{3-3}$$

特定值通常是计量器具的量程或标称范围的上限。引用误差也是相对误差，一般用于连续刻度的多挡仪表，特别是电气仪表。

在测量中经常使用电气仪表，电气仪表的准确度分为 0.1，0.2，0.5，1.0，1.5，2.5 和5.0 七级，若仪表为 S 级，X_S表示为满刻度值，则用该仪表测量时绝对误差为

$$\text{绝对误差} \leqslant X_S \times S\%$$

$$\text{相对误差为} \leqslant \frac{X_S}{X} \times S\%$$

故当测量值 X 越接近于 X_S时，其测量准确度越高，相对误差越小。这就是人们利用这类仪表时，尽可能在仪表满刻度 2/3 以上量程内测量的原因。所以测量的准确度不仅取决于仪表的准确度，还取决于量程的选择。

例如，用一块 0.5 级、量程为 0～300V 的电压表和一块 1.0 级量程为 0～100V 的电压表测量一接近 100V 的电压，问哪块表测量较为准确？

因为

$$r_{0.5}=\frac{X_S}{X}\times S\%=\frac{300}{100}\times 0.5\%=1.5\%$$

$$r_{1.0}=\frac{X_S}{X}\times S\%=\frac{100}{100}\times 1.0\%=1.0\%$$

可见，量程选择恰当，用 1.0 级电压表进行测量也会得到比用 0.5 级电压表更为准确的结果。

4. 分贝误差

分贝误差 ΔD 实际上是相对误差的另一种表现形式，即

$$\Delta D=20\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\approx 8.69\,\frac{\Delta x}{x} \tag{3-4a}$$

上述分贝误差是对电压而言，若对功率 P，则有

$$\Delta D=10\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \tag{3-4b}$$

3.2.2 误差的来源

1. 装置误差

计量器具本身的结构、工艺、调整以及磨损、老化或故障等引起的误差称为装置误差。

(1) 标准器误差：标准器是提供标准量的器具，如标准电池、标准电阻、标准钟、砝码等，它们本身体现的量都有误差。

(2) 仪表误差：如电表、天平、游标等本身的误差。

(3) 附件误差：进行测量时所使用的辅助附件，如供电电源、连接导线等所引起的误差。

2. 方法误差

测量方法（或理论）不十分完备，特别是忽略和简化等引起的误差称为方法误差。

(1) 经验公式、函数类型选择的近似性及公式中各系数确定的近似值所引起的误差。

(2) 在推导测量结果表达式中没有得到反映，而在测量过程中实际起作用的一些因素，如漏电、热电势、引线电阻等引起的误差。

(3) 由于知识不足或研究不充分引起的误差。

3. 环境误差

由于各种环境因素（如温度、湿度、气压、振动、照明、电磁场等）与要求的标准状态不完全一致，及其在空间上的梯度和随时间的变化，致使测量装置和被测量本身的变化所引起的

误差，称为环境误差。

4. 人员误差

测量者生理上的最小分辨力、感官的生理变化、反应速度和固有习惯所引起的误差，称为人员误差。

3.2.3 误差的分类

根据误差的性质，测量误差可分为三类：系统误差、随机误差和粗大误差。

1. 系统误差

定义：在同一条件下多次测量同一量时，误差的绝对值和符号保持恒定或在条件改变时，按某一确定规律变化的误差。系统误差决定测量结果的“正确性”。

实验条件一经确定，系统误差就获得一个客观上的恒定值。多次测量的平均值也不能削弱它的影响，改变实验条件或改变测量方法可以发现系统误差，可以通过修正予以消除。

系统误差的特征是它确定的规律性，这种规律性可表现为定值，如未经零点校准的仪器造成的误差；也可表现为累加，如用受热膨胀的钢尺测量长度，其示值小于真实长度，并随待测长度成正比增加；也可表现为周期性规律，如测角仪圆形刻度盘中心与仪器转动中心不重合造成的偏心差。系统误差的规律性在于测量条件一经确定，误差也随之确定。因此，原则上讲这类误差能够针对产生的原因进行消减或修正。对于操作者来说，系统误差的规律和其产生原因可能知道，也可能不知道，因此又可将其分为可定系统误差和未定系统误差。对于可定系统误差，可以找出修正值对测量结果加以修正；而对于未定系统误差一般难以作出修正，只能对它作出估计。

系统误差的消除：根据前述产生误差的原因，不难得出下列一些消除系统误差的基本方法。

(1) 测量前设法消除可能消除的误差源。

(2) 测量过程中采用适当的实验方法，如替代法、补偿法、对称法(见表3-2)等将系统误差消除。

(3) 通过适当的附加手段对测量结果引入可能的修正量。例如，用高一级标准仪器进行校正，作出修正表格、公式和曲线等；采取理论分析法对实验结果进行修正，例如，单摆测量重力加速度，当超出近似范围时，带来的系统误差的修正等。

(4) 通过若干人的重复测量来消除人员误差。

表3-2　减小和消除系统误差方法一栏表

名　称	实施方法	举　　例
替代法	用于被测对象处于相同条件下的已知量来替代被测量，即先将被测量接入测试回路，使系统处于某个工作状态，然后以已知量替代之，并使系统的工作状态保持不变	利用电桥测量电阻、电感和电容等
补偿法	通过两次不同的测量，使测得值的误差具有相反的符号，然后取平均值	用正反向二次测量消除热电转换器的直流正反向差

续表

名　称	实 施 方 法	举　　例
对称法	当被测量为某量(如时间)的线性函数时，在相等的时间间隔依次进行数次测量(至少 3 次)，则其中任何一对对称观测值的累积误差的平均值皆等于两次观测的间隔中点相对应的累积误差，利用这一对称性便可将线性累积系统误差消除	利用对称法来消除由于电池组的电压下降而在直流电位差计中引起的累积系统误差。事实表明，在一定的时间内，电池组的电压下降所产生的误差是与时间成正比的线性系统误差
半周期偶数次观测法	每半个周期测量一次，测量偶数次求平均值，可消除周期性系统误差的影响	仪表指针回转中心与圆形刻度盘中心不重合等引起的周期性系统误差

【例 3-1】 如图 3-2 所示，测量螺纹的螺距时，由于存在调整误差，仪器的测量轴线和螺纹轴线不重合，互相之间有偏斜，从而引起螺距测量中的定值误差 δt。为此，在螺纹的两边各测量一次，分别得到螺距的测得值 $t_{左}$ 和 $t_{右}$，则有

$$\begin{cases} t_{左} = t - \delta t \\ t_{右} = t + \delta t \end{cases}$$

其中，t 是螺纹的正确螺距，取两个测得值的平均作为测量结果，可消除螺纹轴线倾斜所引入的系统误差。

【例 3-2】 用天平测质量，先将未知质量 x 与媒介质质量 P 平衡，若天平的两臂长有误差，设长度分别为 l_1 与 l_2，如图 3-3 所示，则有

$$x = \frac{l_2}{l_1}P$$

但由于不能准确知道两臂长 l_1 与 l_2 的实际值，若取 $x=P$，将带来固定不变的系统误差。因此移去被测量 x，用已知质量为 Q 的标准砝码代替。若该砝码可使天平重新平衡，则有 $x=Q$。

若该砝码不能使天平重新平衡，读出差值 ΔQ，则有

$$Q + \Delta Q = \frac{l_2}{l_1}P$$

即
$$x = Q + \Delta Q$$

这样就可消除由于天平两臂不等而带来的系统误差。

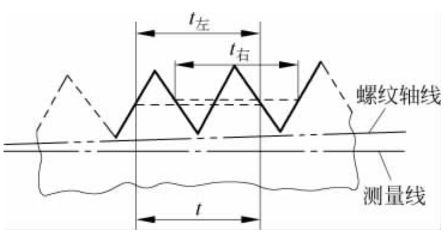

图 3-2　螺纹螺距的测量

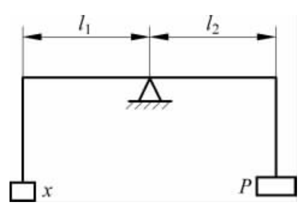

图 3-3　天平测量

【例 3-3】 如在等臂天平上称量重物，如图 3-4 所示，其中 P 和 P' 为两个砝码，x 为待测重物。当天平达到平衡时，应有 $x=P$。但必须是两臂长度相等条件下才成立。一般情况下由于 $l_1 \neq l_2$ 就会引入系统误差。此时应有

$$x=\frac{l_2}{l_1}P$$

为了消除由于 $l_1 \neq l_2$ 所引入的系统误差，可以把 P 和 x 互相交换位置。如果有系统误差，则天平就不再平衡。需调整砝码，直到砝码质量为 P' 时，天平再次达到平衡，显然此时有

$$P'=\frac{l_2}{l_1}x$$

由上式得

$$x=\sqrt{PP'}\approx\frac{P+P'}{2}$$

这样得到的测量结果中就不再包含系统误差。

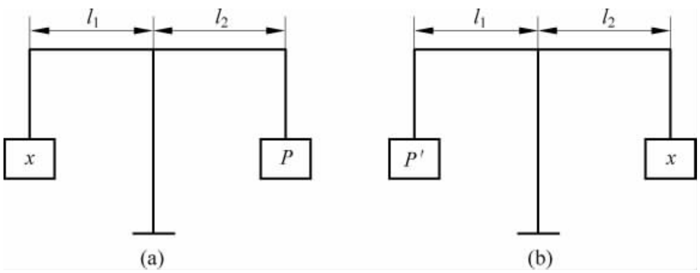

图 3-4　交换法在天平测量中的应用

需要指出，在具体测量中，往往很难将系统误差完全消除。因此，应力求比较准确地给出残余系统误差的范围，即未消除的系统误差限。

2. 随机误差

1）随机误差的定义

定义：在同一条件下多次测量同一量时，误差的绝对值和符号随机变化。它的特点是随机性，没有一定规律，时大时小，时正时负，不能确定。

随机误差来源于测量方面的多种原因，如实验条件和环境的微小的无规则变化、仪器的精密程度，以及观测者的心理状态、视觉器官的分辨本领和手的灵活程度，当然不排除在观测时产生的其他偶然因素。随机误差遵从一定的统计规律，可用统计的方法处理。

由于随机误差具有偶然的性质，不能预先知道，因而也就无法从测量过程中予以修正或把它加以消除。但是随机误差在多次重复测量中服从统计规律，在一定条件下，可以用增加测量次数的方法加以控制，从而减小它对测量结果的影响。

在一定条件下对某一物理量进行测量，每次出现什么观测值是一个随机事件。若各随机事件可分别用一个数值表示，则这个数值可看作随机事件的函数，称为随机变量。随机变量的取值就是各个观测值。随机变量分为连续型和离散型。如测量人体身高、物体长度属于连续型随机变量；而打靶时的命中数、两个骰子的点数和属于离散型随机变量。由于物理实验的观测量是随机变量，所以对测量数据的分析处理，必须应用建立在概率论和数理统计基础上的误差理论，从概率和统计的意义上来理解随机误差。下面简要地给出常见的相关概念和定义，其他内容可详见概率论和数理统计相关书籍。

2）相关的概念与定义

（1）总体、样本和统计量

总体亦称母体，是数理统计中的一个基本概念。通常，将全体测量或讨论的对象所组成的集合称为总体（或母体），将其中的对象称为个体或单元。

从总体中按一定的方式取出一部分个体所组成的集合称为样本，将样本中含有的个体数量称为样本容量或样本大小，获取样本的过程称为抽样。

对样本进行必要的加工处理和计算所得的结果称为统计量。例如，样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的均值 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 是统计量，样本方差 $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ 也是统计量。

（2）物理量测量中常见的统计分布

实验中只能进行有限次观测，不可能对随机变量的全部取值进行研究，但必须了解各种可能取值的概率，即随机变量的概率分布。其中包括离散型和连续型随机变量的分布形式。

① 二项式分布（离散型随机变量）。

设随机事件 A 发生的概率为 p，不发生的概率为 $1-p$，则在 n 次独立试验中 A 发生 k 次的概率为

$$p(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n \tag{3-5}$$

式中，系数 $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ 为在 n 次试验中事件 A 发生是 k 次而 $n-k$ 次不发生的组合数。

$p(k)$ 的表达式恰好是二项式展开式中的一般项，所以将这个分布称为二项式分布，也称为成功次数的概率分布。通常表示为 $B(n,p)$，其中 n 和 p 称为分布参数。若离散型随机变量 A 服从二项式分布，则可表示成 $A \sim B(n,p)$，n 为有限值。一个随机变量的概率函数或概率密度函数式中的参数（称为分布参数）是表征该统计分布的特征量。

② 泊松分布（离散型随机变量）。

泊松分布是离散型随机变量的一种重要分布，适合于描述试验结果 K 是没有自然上限的非负整数（即 0，1，2，…）的情形。可以证明二项式分布的极限情况是泊松分布，其分布函数为

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{3-6}$$

式中，$e = 2.718$，为自然对数的底；$\lambda > 0$，为常数，称为泊松分布参数。

泊松分布通常表示为 $P(\lambda)$，若离散型随机变量 A 服从泊松分布，则可表示成 $A \sim P(\lambda)$。在单位时间内放射源中原子核衰变的数目、单位体积内粉尘的数目等均服从泊松分布。

③ 均匀分布（连续型随机变量）。

定义：设连续型随机变量 X 在有限区间内取值，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他 } x \text{ 值} \end{cases} \tag{3-7}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记作 $X \sim R(a,b)$，如图 3-5 所示。

均匀分布的分布函数为

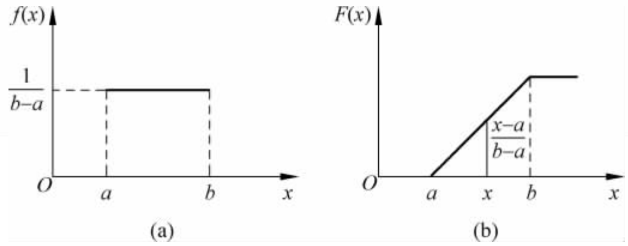

图 3-5　均匀分布概率分布图

(a) 概率密度函数；(b) 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{x-b}, & a<x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}\tag{3-8}$$

数据处理中的数值修约误差、刻度仪表读数的读数误差、数字仪表的量化误差等都可看作服从均匀分布的随机变量，其他分布如三角分布、指数分布、反正弦分布等可参阅相关文献。

④ 正态分布(连续型随机变量)。

正态分布也称为高斯分布，是连续型随机变量的最常见、最重要的一种分布，在概率论和数理统计中占有非常重要的地位，其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\tag{3-9}$$

式中，μ 和 σ 为正态分布的分布参数。μ 对应于正态概率密度函数曲线峰值的横坐标，也是该曲线的对称轴 $x=\mu$ 通过之处，而且是随机变量 X 的数学期望值，若不存在系统误差，μ 也就是待测量的真值。σ 是该曲线拐点处的横坐标与期待值之差的绝对值，称为正态分布的标准差，$\sigma(x)=\sigma$。

正态分布通常表示为 $N(\mu,\sigma^2)$。连续型随机变量 X 服从正态分布，可表示为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

若令 $x-\mu=\delta$，即测量误差或残差，则式(3-9)变为

$$f(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\tag{3-10}$$

若令 $z=\dfrac{\delta}{\sigma}$，则式(3-10)变为

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\tag{3-11}$$

该式就是标准化的正态概率密度函数，相应的分布称为标准正态分布 $N(0,1)$。

由于 $f(x)$ 满足归一化条件，因而 σ 值小的曲线高而窄、散布小，σ 值大的则低而宽、散布大，它们各自对应着精密度高低不同的实验，如图 3-6 所示。

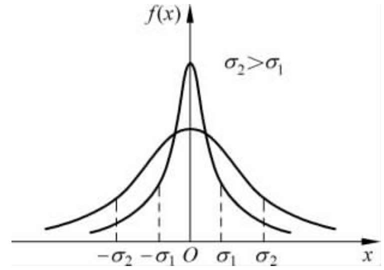

图 3-6　正态概率密度函数图

许多其他分布在极限条件下都趋近于正态分布，例如泊松分布当其随机变量的期待值 λ 足够大时便趋近于正态分布，$\lambda\geqslant 10$ 的泊松分布已经很接近正态分布了