

### 3.1 引言

在第1章中已指出,通信过程是有用信号通过通信系统的过程,在这一过程中伴随有噪声的加入。通信系统中遇到的有用信号,通常总带有某种随机性,即它们的某个或几个参数不能预知或不能完全预知,如能预知的话通信就没有必要了。我们把这种具有随机性的信号称为随机信号。通信系统中必然遇到的噪声,例如自然界中的各种电磁波噪声和设备本身产生的热噪声、散粒噪声等会在通信系统的不同位置上与有用信号混合,它们的取值不能预测。这些噪声统称为随机噪声,或简称噪声。另外,通信系统中的传输特性也常存在随机变化。所有这些随机现象都离不开用随机过程理论来作分析。

本章前几节内容在大学低年级课程中已学过,这里只是结合本课程特点作扼要复习。本章介绍随机过程的基本特性、平稳随机过程、各态历经过程、高斯过程、随机过程通过线性系统、窄带随机过程、白噪声、低通白噪声、带通白噪声和正弦波加窄带噪声。

### 3.2 随机过程的基本特性

本节首先用实验方法讨论噪声的随机性,从而引入随机过程的基本定义。然后从随机过程的定义出发,转到讨论它的统计特性,即讨论随机过程的分布函数、概率密度和数字特征。

我们可作如下一个试验。设有  $n$  台性能完全相同的通信机,它们的工作条件也相同。现用  $n$  部记录仪同时记录各台通信机的输出噪声波形。测试结果将会表明,得到的  $n$  张记录图形并不因为有相同的条件而输出相同的波形,如图 3-1 所示。恰恰相反,即使  $n$  足够大,也找不到两个完全相同的波形。这就是说,通信机输出的噪声电压函数在实验前是不可预知的,或者说随机性就体现在通信机输出端出现哪一个波形是不确定的,可见它是一个随机过程。需指出,这里的一次记录的图 3-1 中的一个波形称作一个样本,无数个样本构成的总体是一个样本空间。

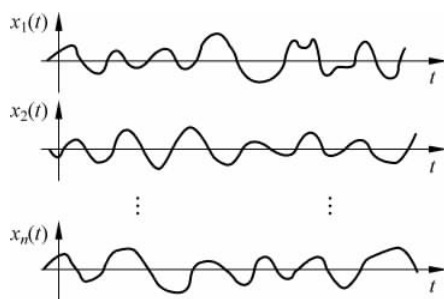


图 3-1  $n$  台通信机的输出记录

在数学上,随机过程的定义如下:设随机试验  $E$  的可能结果为  $\xi(t)$ ,试验的样本空间  $S$  为  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots\}$ ,  $i$  为正整数,  $x_i(t)$  为第  $i$  个样本函数(又称之为第  $i$  个实现),每次试验之后,  $\xi(t)$  取空间  $S$  中的某一样本函数,于是称此  $\xi(t)$  为随机函数。当  $t$  代表时间量时,称此  $\xi(t)$  为随机过程。

人们还常使用下面的描述来定义随机过程:若对于某时刻  $t$  有随机变量  $\xi(t)$ ,随着  $t$  的改变而得到不同的随机变量  $\xi(t)$ ,于是称此  $\xi(t)$  为随机过程。比如,由上例中某一台通信机输出端的记录试验看出,在  $t$  时刻记录值是一随机变量  $\xi(t)$  值,另一时刻的记录值则是另一随机变量  $\xi(t)$  值,于是把随  $t$  而变的  $\xi(t)$  称为随机过程是合适的。既然随机过程任一时刻都是一随机变量,那么就可以用随机变量的分布函数对其统计特性进行描述,具体见下面所述。

### 3.2.1 随机过程的分布函数

设  $\xi(t)$  是一个随机过程,则在任意一个时刻  $t_1$  上  $\xi(t_1)$  是一个随机变量。由概率论知,这个随机变量的统计特性可用分布函数或概率密度去描述,即有

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leq x_1\} \quad (3.2-1)$$

为随机过程  $\xi(t)$  的一维分布函数。如果存在

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1)$$

则称  $f_1(x_1, t_1)$  为  $\xi(t)$  的一维概率密度函数。无疑,在一般情况下用一维分布函数去描述随机过程的完整统计特性是不充分的,通常需要在足够多的时刻上考虑随机过程的多维分布函数。 $\xi(t)$  的  $n$  维分布函数被定义为

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\} \quad (3.2-2)$$

如果存在

$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

则称上式为  $\xi(t)$  的  $n$  维概率密度函数。显然,  $n$  越大,用  $n$  维分布函数或  $n$  维概率密度函数来描述  $\xi(t)$  的统计特性就越充分。

### 3.2.2 随机过程的数字特征

实际中有时需研究随机过程的数字特征。相应于对随机变量数字特征的定义方法,容易得到关于随机过程的数字特征,比如随机过程的均值、方差、自协方差函数和自相关函数。下面逐一讨论。

随机过程  $\xi(t)$  的均值被定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx \quad (3.2-3)$$

式中,  $f_1(x, t)$  是  $\xi(t)$  的一维概率密度;  $x$  是  $\xi(t)$  的可能取值;  $t$  是任一时刻值。该式常记为  $E[\xi(t)]$ ,  $E$  表示对  $\xi(t)$  作集合平均运算。该式的结果记为  $a(t)$ 。可见,随机过程的均值是时间  $t$  的确定性函数。上述均值又常称为过程的数学期望。

随机过程的方差定义为

$$E\{\xi(t) - E[\xi(t)]\}^2 \quad (3.2-4)$$

该式常记为  $D[\xi(t)]$ ,  $D$  表示对  $\xi(t)$  作方差运算。该式的结果记为  $\sigma^2(t)$ 。可见, 随机过程的方差是时间  $t$  的确定性函数。

展开式(3.2-4)可得

$$D[\xi(t)] = E[\xi^2(t)] - [E\xi(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t) dx - a^2(t) \quad (3.2-5)$$

用来描述随机过程任意两个时刻上的随机变量的统计相关特性, 有协方差函数  $B(t_1, t_2)$  和相关函数  $R(t_1, t_2)$ 。协方差函数被定义为

$$\begin{aligned} B(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

式中,  $t_1$  与  $t_2$  是任取的两个时刻;  $a(t_1)$  与  $a(t_2)$  为在  $t_1$  及  $t_2$  时刻的数学期望;  $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  为随机过程  $\xi(t)$  的二维概率密度函数。

相关函数  $R(t_1, t_2)$  被定义为

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

显然, 将式(3.2-6)展开, 并把式(3.2-7)代入该展开式中, 可得  $B(t_1, t_2)$  与  $R(t_1, t_2)$  之间的关系式:

$$B(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - E[\xi(t_1)] \cdot E[\xi(t_2)] \quad (3.2-8)$$

由上式看到, 若  $E[\xi(t_1)]$  或  $E[\xi(t_2)]$  为零, 则  $B(t_1, t_2)$  与  $R(t_1, t_2)$  完全相等。这里的  $B(t_1, t_2)$  及  $R(t_1, t_2)$  描述的是同一随机过程的相关程度, 因此, 它们又常分别称为自协方差函数及自相关函数。

协方差函数和相关函数的概念也可引入两个或更多个随机过程中去, 从而获得互协方差及互相关函数。设  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  分别表示两个随机过程, 则互协方差函数定义为

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a\xi(t_1)][\eta(t_2) - a\eta(t_2)]\} \quad (3.2-9)$$

而互相关函数定义为

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)] \quad (3.2-10)$$

以上自相关函数或互相关函数显然与所选的两个时刻  $t_1$  和  $t_2$  有关。如果  $t_2 > t_1$ , 并令  $t_2 = t_1 + \tau$ , 即  $\tau$  是  $t_2$  与  $t_1$  之间的时间间隔, 则相关函数  $R(t_1, t_2)$  可表示为  $R(t_1, t_1 + \tau)$ , 即

$$R(t_1, t_1 + \tau) = E[\xi(t_1)\xi(t_1 + \tau)]$$

这说明, 相关函数依赖于起始时刻(或时间起点)  $t_1$  及时间间隔  $\tau$ , 即相关函数是所选的起始时刻  $t_1$  和时间间隔  $\tau$  的函数。或者写成

$$R(t, t + \tau) = E[\xi(t)\xi(t + \tau)] \quad (3.2-11)$$

### 3.3 平稳随机过程

#### 3.3.1 狭义平稳随机过程和广义平稳随机过程

通信系统中常见到平稳随机过程, 即其统计特性不随时间而变化的随机过程。平稳

随机过程有狭义平稳(又称严平稳)过程和广义平稳(又称宽平稳)过程。

若对于任意的正整数  $n$  和任意实数  $t_1, t_2, \dots, t_n, \tau$ , 随机过程  $\xi(t)$  的  $n$  维概率密度函数满足

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (3.3-1)$$

则称  $\xi(t)$  是狭义平稳或严平稳过程。由此可见, 它的任何  $n$  维分布函数或概率密度函数与时间起点无关, 或者说该平稳随机过程的概率分布将不随时间的推移而不同。它的一维分布与  $t$  无关, 二维分布只与时间间隔  $\tau$  有关。

若随机过程  $\xi(t)$  的均值  $E[\xi(t)]$  和自相关函数  $R(t_1, t_2)$  满足

$$\begin{cases} E[\xi(t)] = a \\ R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(\tau) \end{cases} \quad (3.3-2)$$

式中,  $a$  为常数,  $\tau = t_2 - t_1$ , 则称  $\xi(t)$  为广义平稳的。上式表明只要随机过程的数学期望与  $t$  无关, 为  $a$ , 它的自相关函数只与时间间隔  $\tau$  有关, 则该随机过程为广义平稳的。

通信系统中遇到的信号或噪声, 大多数可视为平稳过程。本书中以后研究的平稳随机过程若不作特殊申明, 均指的是广义平稳的。

### 3.3.2 平稳过程的自相关函数和功率谱密度

平稳随机过程的自相关函数是特别重要的一个函数。这是因为, 一方面它是平稳随机过程的基本的数字特征; 另一方面, 相关函数还揭示了随机过程的频谱特性。我们先来讨论实平稳随机过程  $\xi(t)$  的相关函数的主要性质及含义。

$$(1) \text{ 有 } R_\xi(0) = E[\xi^2(t)] \quad (3.3-3)$$

上式  $R_\xi(0)$  表示的是随机过程  $\xi(t)$  的总平均功率。

$$(2) \text{ 有 } R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau) \quad (3.3-4)$$

上式表示自相关函数是偶函数。上面两等式可由式(3.2-11)出发得到证明。

$$(3) \text{ 有 } |R_\xi(\tau)| \leq R_\xi(0) \quad (3.3-5)$$

上式表示自相关函数绝对值的上界是  $R_\xi(0)$ 。这可由非负式  $E[\xi(t) \pm \xi(t+\tau)]^2 \geq 0$  推演而得证。

(4) 如果对足够大的  $\tau$  有  $\xi(t)$  和  $\xi(t+\tau)$  是独立的, 且  $\xi(t)$  不含周期分量, 则

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_\xi(\tau) = \{E[\xi(t)]\}^2 \quad (3.3-6)$$

上式表示  $R_\xi(\infty)$  是随机过程  $\xi(t)$  的直流功率, 而  $E[\xi(t)]$  是随机过程  $\xi(t)$  的直流电平。

$$\text{证明: } \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_\xi(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = E[\xi(t)] \cdot E[\xi(t+\tau)] = \{E[\xi(t)]\}^2$$

证毕。

(5) 有

$$R_\xi(0) - R_\xi(\infty) = \sigma^2 \quad (3.3-7)$$

上式方差  $\sigma^2$  表示随机过程  $\xi(t)$  的交流功率; 当直流功率为 0 时  $R_\xi(0) = \sigma^2$ 。

平稳随机过程的频谱特性通常用功率谱密度来描述。下面以两条定理的形式来描述

它的功率谱密度  $P_\xi(\omega)$  与相关函数  $R_\xi(\tau)$  的关系。

**【定理 3-1】** 如果一平稳随机过程  $\xi(t)$  的自相关函数  $R_\xi(\tau)$  满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(\tau)| d\tau < \infty \quad (3.3-8)$$

那么它的傅里叶变换  $P_\xi(\omega)$  为

$$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \quad (3.3-9)$$

并被称为  $\xi(t)$  的功率谱密度或功率密度谱。

**【定理 3-2】** 一平稳随机过程  $\xi(t)$  的功率谱密度  $P_\xi(\omega)$  之傅里叶反变换为  $\xi(t)$  的自相关函数  $R_\xi(\tau)$ , 即

$$R_\xi(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega \quad (3.3-10)$$

以上两个定理的证明利用傅里叶变换理论可完成。这里从略。

对于周期随机功率信号仍可采用式(3.3-9), 这时需利用数学上的  $\delta$  函数。涉及该类信号的重要的傅里叶变换对是

$$A\delta(t-t_0) \Leftrightarrow A \exp(-j\omega t_0) \quad (3.3-11)$$

$$A \exp(-j2\pi f_0 t) \Leftrightarrow A\delta(f-f_0) \quad (3.3-12)$$

式中,  $\Leftrightarrow$  表示为傅里叶变换对;  $t_0$  为某时间常数;  $f_0$  为某频率常数。

总之, 平稳过程的自相关函数  $R_\xi(\tau)$  与其功率谱密度  $P_\xi(\omega)$  呈傅里叶变换对。

此外, 随机过程的功率谱密度还常用截短函数的形式来表示, 导出该表示式的过程如下。由式(2.2-47)得到的是确定性信号的功率谱密度, 对于这里功率型随机过程的每一实现也将是功率信号, 因此每一实现的功率谱密度可用式(2.2-47)来表示, 那么过程的功率谱密度应该是其可能实现的功率谱密度之平均。即设  $\xi(t)$  的功率谱密度为  $P_\xi(\omega)$ ,  $\xi(t)$  的截短函数为

$$\xi_T(t) = \xi(t), \quad -T/2 < t < T/2 \quad (3.3-13)$$

而且有  $\xi_T(t)$  与  $\mathcal{F}_T(\omega)$  呈傅里叶变换对, 于是依据式(2.2-38)和对其作统计平均, 得

$$P_\xi(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E |\mathcal{F}_T(\omega)|^2}{T} \quad (3.3-14)$$

上式就是今后分析中常会遇到的平稳随机过程功率谱密度的截短函数表达式。下面通过两个例子说明相关函数与功率谱密度关系公式和其性质的使用。

**例 3-1** 求随相正弦波  $\xi(t) = \sin(\omega_0 t + \theta)$  的数学期望和自相关函数, 并求其总功率和功率谱密度。式中  $\omega_0$  是常数;  $\theta$  是在区间  $(0, 2\pi)$  上均匀分布的随机变量。

**解:** 先利用式(3.2-3), 得随相正弦波  $\xi(t)$  的数学期望  $a(t)$ :

$$\begin{aligned} a(t) &= E[\sin(\omega_0 t + \theta)] = E[\sin\omega_0 t \cos\theta + \cos\omega_0 t \sin\theta] = E[\sin\omega_0 t \cos\theta] + E[\cos\omega_0 t \sin\theta] \\ &= \sin\omega_0 t \int_0^{2\pi} \cos\theta (1/2\pi) d\theta + \cos\omega_0 t \int_0^{2\pi} \sin\theta (1/2\pi) d\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.3-15)$$

再将随相正弦波  $\xi(t)$  的表示式代入式(3.2-7), 得自相关函数

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = E[\sin(\omega_0 t_1 + \theta)\sin(\omega_0 t_2 + \theta)]$$

令  $t_1 = t, t_2 = t + \tau$ , 则上式的自相关函数变为

$$\begin{aligned}
R(t, t + \tau) &= E[\sin(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta)] \\
&= E\{\sin(\omega_0 t + \theta) [\sin(\omega_0 t + \theta) \cos \omega_0 \tau + \cos(\omega_0 t + \theta) \sin \omega_0 \tau]\} \\
&= \cos \omega_0 \tau E[\sin^2(\omega_0 t + \theta)] + \sin \omega_0 \tau E[\sin(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t + \theta)] \\
&= \cos \omega_0 \tau E\{0.5[1 - \cos 2(\omega_0 t + \theta)]\} + \sin \omega_0 \tau E[0.5 \sin 2(\omega_0 t + \theta)] \\
&= 0.5 \cos \omega_0 \tau - 0.5 \cos \omega_0 \tau \int_0^{2\pi} \cos 2(\omega_0 t + \theta) (1/2\pi) d\theta \\
&\quad + 0.5 \sin \omega_0 \tau \int_0^{2\pi} \sin 2(\omega_0 t + \theta) (1/2\pi) d\theta = 0.5 \cos \omega_0 \tau = R(\tau) \quad (3.3-16)
\end{aligned}$$

将式(3.3-15)、式(3.3-16)与式(3.3-2)对照,显然相一致,所以  $\xi(t)$  是广义平稳的。于是可将式(3.3-16)代入式(3.3-9),并利用积分公式(3.3-12),得随相正弦波  $\xi(t)$  的功率谱密度

$$\begin{aligned}
P_{\xi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0.5 \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} 0.25(e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}) e^{-j\omega \tau} d\tau \\
&= 0.25 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_0) \tau} d\tau + 0.25 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega + \omega_0) \tau} d\tau \\
&= 0.5\pi \delta(\omega - \omega_0) + 0.5\pi \delta(\omega + \omega_0)
\end{aligned}$$

**讨论:** 实验中,当我们接通一高频率稳定度的正弦波产生器时,其输出的信号就属本例所给的随相正弦波信号;在通信系统中也常见到这种信号。

**例 3-2** 例 3-1 的随相正弦信号  $\xi(t)$  的直流功率、交流平均功率和总平均功率  $P_{\text{to}}$  分别为多少?

**解:** 式(3.3-15)为均值,所以得随相信号  $\xi(t)$  的直流功率为 0。

将式(3.3-15)代入式(3.2-5),利用式(3.2-5)和式(3.3-3),得  $\xi(t)$  的所需求的交流平均功率

$$D[\xi(t)] = E[\xi^2(t)] = R(0) = 0.5$$

依据式(3.3-7),并代入以上两项结果,得  $\xi(t)$  的总平均功率

$$P_{\text{to}} = 0 + 0.5 = 0.5$$

### 3.4 各态历经过程

平稳随机过程一般具有一个有趣且非常有用的特性,这个特性称为“各态历经性(又称遍历性)”,即许多平稳随机过程的数字特征,可以由“时间平均”替代“统计平均”来获取的一种特性。下面逐一解释。

随机过程  $X(t)$  的时间平均均值定义为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt = \langle a \rangle \quad (3.4-1)$$

随机过程  $X(t)$  的时间平均自相关函数定义为

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} X(t) X(t + \tau) dt = \langle R_X(\tau) \rangle \quad (3.4-2)$$

式(3.4-1)和式(3.4-2)中的  $T$  是作时间平均的观察时间。

将式(3.4-1)和式(3.4-2)相应对照式(3.2-3)和式(3.2-7)[或式(3.3-2)],显然这里实行的是时间平均,而那里实行的是统计平均。

若广义平稳随机过程  $X(t)$  具有性质: 均值

$$a = \langle a \rangle \quad (3.4-3)$$

和平均自相关函数

$$R_X(\tau) = \langle R_X(\tau) \rangle \quad (3.4-4)$$

式中,“=”是指以概率为1相等,则称随机过程  $X(t)$  是各态历经的;  $a$  和  $R_X(\tau)$  是统计平均量,而  $\langle a \rangle$  和  $\langle R_X(\tau) \rangle$  是时间平均量。

式(3.4-3)和式(3.4-4)意指: 该随机过程  $X(t)$  的任一实现作均值和自相关函数方面的时间平均,可用来替代  $X(t)$  的均值和自相关函数方面的统计平均。或者说,为实验计算统计均值和统计自相关函数时需作大量的样本测量,而在实验计算时间均值和时间自相关函数时只需获得  $X(t)$  的一个实现来作时间平均,即可得到  $X(t)$  的数学期望和统计平均自相关函数。这使实验计算的问题大为简化,给实验研究平稳随机过程的数字特征带来很大的方便。这时得到的随机过程的任一实现好像经历了随机过程的所有可能状态,以至于能用其时间平均来替代过程的统计平均,于是该过程  $X(t)$  被称为各态历经的。

需注意的是,具有各态历经的随机过程一定是平稳的,反之不一定成立; 当  $\tau \rightarrow \infty$  时,如果平稳随机过程的  $\langle a \rangle$  和  $\langle R_X(\tau) \rangle$  的均方差趋于零,则该过程是各态历经的<sup>[15]</sup>。在通信系统中遇到的随机信号或噪声一般能满足各态历经条件。

**例 3-3** 例 3-1 的随相正弦信号  $\xi(t)$  是否是各态历经过程的? 请作证明。

**解:** 由例 3-1,已证明随相正弦信号  $\xi(t)$  是广义平稳过程,而且统计均值  $a=0$ , 统计平均自相关函数

$$R_\xi(\tau) = 0.5 \cos \omega_0 \tau$$

依据式(3.4-1)得

$$\langle a \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t + \theta) dt = 0 \quad (3.4-5)$$

依据式(3.4-2)得

$$\begin{aligned} \langle R_\xi(\tau) \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t + \theta) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \theta) dt \\ &= 0.5 \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\theta)] dt \\ &= 0.5 \cos \omega_0 \tau \end{aligned} \quad (3.4-6)$$

将式(3.4-5)、式(3.4-6)分别与式(3.3-15)、式(3.3-16)作比较得

$$\langle a \rangle = a = 0 \quad \text{和} \quad \langle R_\xi(\tau) \rangle = R_\xi(\tau) = 0.5 \cos \omega_0 \tau$$

即符合前面所述的各态历经过程定义,所以该  $\xi(t)$  是各态历经的。

### 3.5 高斯随机过程

高斯过程又称正态随机过程,它是通信系统中一种普遍存在和重要的随机过程。比如通信信道中的热噪声就是一种高斯过程。

### 3.5.1 高斯过程的概率密度

所谓高斯过程  $\xi(t)$ , 即指它的任意  $n$  维 ( $n=1, 2, \dots$ ) 概率密度函数由下式表示的过程:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n |\mathbf{B}|^{1/2}} \times \exp\left[\frac{-1}{2|\mathbf{B}|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathbf{B}_{jk}| \left(\frac{x_j - a_j}{\sigma_j}\right) \left(\frac{x_k - a_k}{\sigma_k}\right)\right] \quad (3.5-1)$$

式中,  $a_k = E[\xi(t_k)]$ ;  $\sigma_k^2 = E[\xi(t_k) - a_k]^2$ ;  $|\mathbf{B}|$  为归一化协方差矩阵的行列式, 即

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$|\mathbf{B}_{jk}|$  为行列式  $|\mathbf{B}|$  中元素  $b_{jk}$  的代数余因子;  $b_{jk}$  为归一化协方差函数,

$$b_{jk} = \frac{E\{[\xi(t_j) - a_j][\xi(t_k) - a_k]\}}{\sigma_j \sigma_k} \quad (3.5-2)$$

### 3.5.2 高斯过程的重要性质

由式(3.5-1)可以看出, 正态随机过程的  $n$  维分布仅由各随机变量的数学期望、方差和两两之间的归一化协方差函数所决定, 因此分析高斯过程的性质时只需关注高斯过程的这三种数字特征就可以了。高斯过程有以下四项常用的重要性质。

(1) 如果高斯过程是宽平稳的, 则该过程必是严平稳的。

**证明:** 如果过程是宽平稳的, 即其均值与时间无关, 协方差函数只与时间间隔  $\tau$  有关, 而与时间起点无关, 则由式(3.5-1)看到它的  $n$  维分布与时间起点无关, 故它也是严平稳的。证毕。

(2) 如果高斯过程的  $n$  个随机变量是不相关的, 则该  $n$  个随机变量是统计独立的。

**证明:** 如果各随机变量两两之间互不相关, 即在式(3.5-2)中, 对所有  $j \neq k$  有  $b_{jk} = 0$ , 故式(3.5-1)变为

$$\begin{aligned} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{j=1}^n \sigma_j} \exp\left[-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j - a_j)^2}{2\sigma_j^2}\right] \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left[-\frac{(x_j - a_j)^2}{2\sigma_j^2}\right] \\ &= f(x_1, t_1) f(x_2, t_2) \cdots f(x_n, t_n) \end{aligned} \quad (3.5-3)$$

即表示该  $n$  个随机变量是统计独立的。证毕。

(3) 若干个高斯过程的和, 仍是高斯的。

(4) 高斯过程经过线性变换(即经过线性系统)后, 仍是高斯的。

### 3.5.3 高斯平稳过程的一维分布

高斯平稳过程的一维分布有关公式是通信原理中的常用知识,为此作以下介绍。利用式(3.5-1),将  $n=1$  代入该式得一维高斯概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.5-4)$$

式中,  $a$  及  $\sigma$  是两个常量(均值及均方根),  $f(x)$  曲线如图 3-2 所示。

由式(3.5-4)及图 3-2 容易看到  $f(x)$  有如下特性(所有的证明都很容易,在此就不证明了)。

(1)  $f(x)$  对称于  $x=a$  这条直线,即

$$f(a+x) = f(a-x) \quad (3.5-5)$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (3.5-6)$$

或

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx = 1/2 \quad (3.5-7)$$

(3)  $f(x)$  在  $(-\infty, a)$  内单调上升,在  $(a, \infty)$  内单调下降,且在点  $a$  处达到极大值  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 。当  $x \rightarrow -\infty$  或  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ 。

(4) 对不同的  $a$  (固定  $\sigma$ ), 表现为  $f(x)$  的图形左右平移; 对不同的  $\sigma$  (固定  $a$ ),  $f(x)$  的图形将随  $\sigma$  的减小而变高和变窄。

人们称式(3.5-4)中  $a=0$  和  $\sigma=1$  的分布为标准正态分布。由标准正态分布可导出通信系统误码率计算中常见的标准正态分布函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \quad (3.5-8)$$

由此还可导出通信系统误码率计算中常见的另两个函数: 误差函数  $\text{erf}(x)$  和补误差函数  $\text{erfc}(x)$ 。误差函数为

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz \quad (3.5-9)$$

补误差函数为

$$\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz \quad (3.5-10)$$

以上的标准正态分布函数、误差函数和补误差函数在数学计算手册中都可找到相应的函数积分值表,查值都较方便。从表示各种传输系统的误码率来看,用补误差函数表示较为简便。本书的附录 B 给出了补误差函数的数值表。

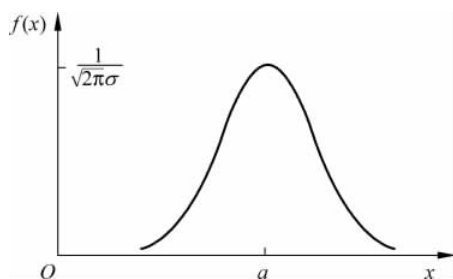


图 3-2 正态分布的概率密度

### 3.6 平稳随机过程通过恒参线性系统

随机信号通过线性系统的分析是建立在确定信号通过线性系统原理的基础之上。确定信号通过线性系统的原理指出,线性系统响应  $y_i(t)$  等于输入信号  $x_i(t)$  与单位冲激响应  $h(t)$  的卷积,即

$$y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

由上式看到,系统输入为  $x_1(t)$  时系统输出为  $y_1(t)$ ,系统输入为  $x_2(t)$  时系统输出为  $y_2(t), \dots$ ,即输入端上有随机过程  $X(t)$  的样本函数集合  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots\}$  和对输出端上有随机过程  $Y(t)$  的样本函数集合  $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_i(t), \dots\}$ ,这表示有

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.6-1)$$

或

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau \quad (3.6-2)$$

设已给定输入随机过程  $X(t)$  的某统计特性量和时不变线性系统参量,并设  $X(t)$  是平稳的,下面分析在此条件下的输出过程  $Y(t)$  的统计特性量。

#### 1. $Y(t)$ 的数学期望

依据数学期望的定义和式(3.6-2),得

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau \quad (3.6-3)$$

再根据  $X(t)$  平稳性的假设,有  $E[X(t-\tau)] = \mu_X$  (常数),于是得

$$E[Y(t)] = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = H(0)\mu_X \quad (3.6-4)$$

式中  $H(0)$  是时不变线性系统的直流增益,是与时间无关的常数。该式表明,输出过程  $Y(t)$  的均值  $E[Y(t)]$  等于  $H(0)$  乘以输入过程的均值  $\mu_X$ ; 输出过程的均值是与时间无关的常数。

#### 2. 输出过程 $Y(t)$ 的自相关函数

依据自相关函数定义和式(3.6-2),得

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)X(t-\alpha)d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta)X(t+\tau-\beta)d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)E[X(t-\alpha)X(t+\tau-\beta)]d\alpha d\beta \end{aligned}$$

因设输入过程是平稳的,所以上式中的  $E[X(t-\alpha)X(t+\tau-\beta)] = R_X(\tau+\alpha-\beta)$ ,得

$$R_Y(t, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_X(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta = R_Y(\tau) \quad (3.6-5)$$

上式表明,输入过程平稳条件下,时不变线性系统的输出相关函数只依赖时间间隔  $\tau$  而与

时间的起点无关。

式(3.6-4)和式(3.6-5)表明,若输入过程是宽平稳的,则时不变线性系统的输出过程是宽平稳的。

### 3. $Y(t)$ 的功率谱密度

根据式(3.3-9)和式(3.6-5)得

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)h(\beta)R_X(\tau+\alpha-\beta) \exp(-j\omega\tau) d\beta \end{aligned}$$

令  $\tau+\alpha-\beta=\tau'$ , 则有

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) \exp(j\omega\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) \exp(-j\omega\beta) d\beta \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau') \exp(-j\omega\tau') d\tau' \\ &= H^*(\omega)H(\omega)P_X(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega) \end{aligned} \quad (3.6-6)$$

上式表明,系统输出功率谱密度  $P_Y(\omega)$  等于系统频率响应函数取模的平方乘以输入功率谱密度。

### 4. 输出过程 $Y(t)$ 的概率分布

在给定输入过程的概率分布的情况下,原理上借助于式(3.6-2)总可以确定输出过程的概率分布。其中特别有用的是输入过程是高斯型的情况。

**【定理 3-3】** 高斯随机过程经线性变换后的输出随机过程仍为高斯的。

该定理在概率论中有严格证明,这里只作简要说明。依据式(3.6-2)可将输出随机过程表示成一个和式的极限:

$$Y(t) = \lim_{\Delta\tau_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} h(\tau_k)X(t-\tau_k)\Delta\tau_k \quad (3.6-7)$$

由于  $X(t)$  已假设是高斯型的,所以任意时刻  $(t-\tau_k)$  上的  $h(\tau_k)X(t-\tau_k)\Delta\tau_k$  仍是高斯随机变量。可见在任一时刻  $t$  上的输出随机变量将是无限多个(独立的或不独立的)正态随机变量之和。由概率论知,这个“和”仍是正态随机变量,即式(3.6-7)的输出过程在任一时刻的随机变量都服从正态分布。概率论还证明,输出过程的  $n$  维联合分布也是正态的,故输出过程则是正态的。需指出的是,此时的输出过程的数字特征已不同于输入正态过程的数字特征。

## 3.7 窄带随机过程

通信系统中,许多实际的信号和噪声都满足“窄带”的假设,即其频谱均被限制在“载波”或某中心频率附近一个窄的频带上。例如,无线广播系统中的中频信号及噪声就是如此。如果这时的信号或噪声是一个随机过程,则称它们为窄带随机过程。为了表述窄带随机过程,让我们来导出窄带信号的一般表示式。

窄带波形的定义可借助于它的频谱图 3-3 来说明。图中,波形的频带为  $\Delta f$ , 中心频

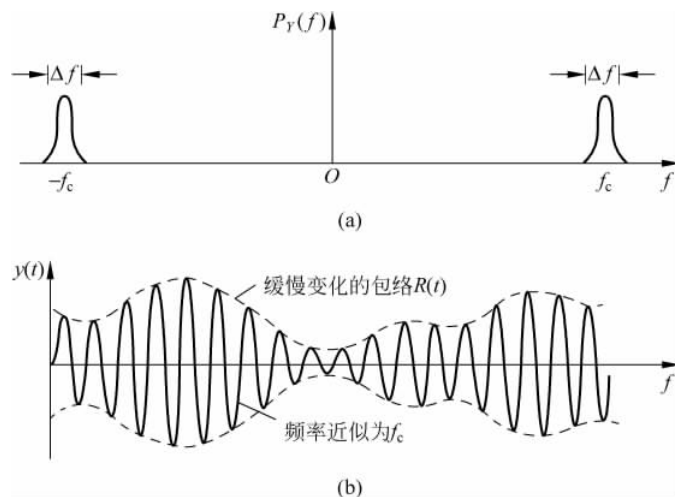


图 3-3 窄带波形的频谱(a)及示意波形(b)

率为  $f_c$ 。若波形满足  $\Delta f \ll f_c$ , 则称该波形为窄带的。

窄带随机过程有两种表示, 一种是包络相位表示式, 另一种是正交表示式。下面对此作解释。

在示波器上观察这个过程的一个实现的波形, 它呈现为一个包络和相位缓慢变化的正弦波。因此, 窄带随机过程可用所谓的包络相位表示如下:

$$Y(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)], \quad R(t) \geq 0 \quad (3.7-1)$$

式中,  $R(t)$  及  $\theta(t)$  是窄带随机过程  $Y(t)$  的包络函数及随机相位函数;  $\omega_c$  是正弦波的中心角频率。显然, 这里的  $R(t)$  及  $\theta(t)$  变化一定比载波  $\cos\omega_c t$  的变化要缓慢得多。

将式(3.7-1)的三角函数展开得

$$Y(t) = R(t)\cos\omega_c t \cos\theta(t) - R(t)\sin\omega_c t \sin\theta(t) \quad (3.7-2)$$

令上式中的

$$R(t)\cos\theta(t) = Y_c(t) \quad (3.7-3)$$

$$R(t)\sin\theta(t) = Y_s(t) \quad (3.7-4)$$

将上面两个式子代入式(3.7-2), 得到窄带过程的正交表示式

$$Y(t) = Y_c(t)\cos\omega_c t - Y_s(t)\sin\omega_c t \quad (3.7-5)$$

这里的  $Y_c(t)$  及  $Y_s(t)$  通常分别称为  $Y(t)$  的同相分量及正交分量。

第一步是先确定  $Y_c(t)$  及  $Y_s(t)$  的统计特性。对式(3.7-5)求数学期望得

$$E[Y(t)] = E[Y_c(t)]\cos\omega_c t - E[Y_s(t)]\sin\omega_c t \quad (3.7-6)$$

因为  $Y(t)$  是平稳的, 且已假设均值为零, 也就是说, 对于任意的时间  $t$ , 有  $E[Y(t)]$  等于零, 故由式(3.7-6)得

$$E[Y_c(t)] = 0 \quad \text{和} \quad E[Y_s(t)] = 0 \quad (3.7-7)$$

再来看  $Y(t)$  的自相关函数。依据自相关函数定义, 代入式(3.7-5), 得其自相关函数

$$R_Y(t, t+\tau) = R_{Y_c}(t, t+\tau)\cos\omega_c t \cos\omega_c(t+\tau) - R_{Y_s}(t, t+\tau)\cos\omega_c t \sin\omega_c(t+\tau)$$

$$-R_{Y_s Y_c}(t, t+\tau)\sin\omega_c t \cos\omega_c(t+\tau) + R_{Y_s}(t, t+\tau)\sin\omega_c t \sin\omega_c(t+\tau) \quad (3.7-8)$$

式中

$$R_{Y_c}(t, t+\tau) = E[Y_c(t)Y_c(t+\tau)], \quad R_{Y_c Y_s}(t, t+\tau) = E[Y_c(t)Y_s(t+\tau)]$$

$$R_{Y_s Y_c}(t, t+\tau) = E[Y_s(t)Y_c(t+\tau)], \quad R_{Y_s}(t, t+\tau) = E[Y_s(t)Y_s(t+\tau)]$$

因为  $Y(t)$  是平稳的, 故有

$$R_Y(t, t+\tau) = R_Y(\tau)$$

这就要求式(3.7-8)的右边与时间  $t$  无关, 而仅与  $\tau$  有关。若令  $t=0$ , 则式(3.7-8)仍应成立, 于是得

$$R_Y(\tau) = R_{Y_c}(t, t+\tau)\cos\omega_c\tau - R_{Y_c Y_s}(t, t+\tau)\sin\omega_c\tau \quad (3.7-9)$$

显然仍需保持右式与  $t$  无关, 即

$$R_{Y_c}(t, t+\tau) = R_{Y_c}(\tau) \quad (3.7-10)$$

和

$$R_{Y_c Y_s}(t, t+\tau) = R_{Y_c Y_s}(\tau)$$

所以式(3.7-9)变为

$$R_Y(\tau) = R_{Y_c}(\tau)\cos\omega_c\tau - R_{Y_c Y_s}(\tau)\sin\omega_c\tau \quad (3.7-11)$$

再令  $t=\pi/(2\omega_c)$ , 则同理可求得

$$R_{Y_s}(t, t+\tau) = R_{Y_s}(\tau) \quad (3.7-12)$$

$$R_Y(\tau) = R_{Y_s}(\tau)\cos\omega_c\tau + R_{Y_s Y_c}(\tau)\sin\omega_c\tau \quad (3.7-13)$$

从式(3.7-11)及式(3.7-13)还看到, 要使这两个式子同时成立, 则应有

$$R_{Y_c}(\tau) = R_{Y_s}(\tau) \quad (3.7-14)$$

$$R_{Y_c Y_s}(\tau) = -R_{Y_s Y_c}(\tau) \quad (3.7-15)$$

可是, 根据互相关函数的性质, 应有

$$R_{Y_c Y_s}(\tau) = R_{Y_s Y_c}(-\tau)$$

将上式代入式(3.7-15), 则得

$$R_{Y_c Y_s}(\tau) = -R_{Y_c Y_s}(-\tau) \quad (3.7-16)$$

上式表明,  $R_{Y_c Y_s}(\tau)$  是  $\tau$  的一个奇函数, 故

$$R_{Y_c Y_s}(0) = 0 \quad (3.7-17)$$

同理可证

$$R_{Y_c Y_s}(0) = 0 \quad (3.7-18)$$

将式(3.7-17)和式(3.7-18)代入式(3.7-11)和式(3.7-13), 得到

$$R_Y(0) = R_{Y_c}(0) = R_{Y_s}(0) \quad (3.7-19)$$

或写成

$$\sigma_Y^2 = \sigma_{Y_c}^2 = \sigma_{Y_s}^2 \quad (3.7-20)$$

由式(3.7-7)、式(3.7-10)、式(3.7-12)和式(3.7-20)看到,  $Y_c(t)$  和  $Y_s(t)$  已满足宽平稳过程的条件, 所以如果  $Y(t)$  是平稳的, 则  $Y_c(t)$  和  $Y_s(t)$  必是宽平稳的。

此外, 由式(3.7-5)可得

$$t_1 = 0 \text{ 时, } Y(t_1) = Y_c(t_1); \quad t_2 = \pi/(2\omega_c) \text{ 时, } Y(t_2) = -Y_s(t_2)$$

因为  $Y(t)$  是高斯的, 由上两式看到  $Y_c(t_1)$  和  $Y_s(t_2)$  必是高斯的。上面已证得  $Y_c(t)$  和  $Y_s(t)$  是平稳的, 其特性与  $t$  无关, 故  $Y_c(t)$  和  $Y_s(t)$  是高斯的。式(3.7-17)已说明  $Y_c(t)$  和  $Y_s(t)$  是不相关的, 加上两个分量是高斯的结论, 依据式(3.5-3), 那么这两个分量则是独立的。

综上所述, 可以得到在以后分析中我们用到的有关窄带过程的一个重要结论如下。

**【结论 3-1】** 若  $Y(t)$  是均值 0、方差  $\sigma_Y^2$  的平稳高斯窄带随机过程, 则它的  $Y_c(t)$  和  $Y_s(t)$  都是均值为 0、方差为  $\sigma_Y^2$  的相互独立的高斯随机变量, 即

$$f_2(y_c, y_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{Y_c^2 + Y_s^2}{2\sigma_Y^2}\right) \quad (3.7-21)$$

且都是宽平稳过程。

下面来分析  $R(t)$ 、 $\theta(t)$  的一维分布函数。设  $R(t)$ 、 $\theta(t)$  的二维分布密度函数为  $f_2(r, \theta)$ , 则根据概率论知识<sup>[7,15]</sup>有

$$f(r, \theta) = J f_2[y_c(r, \theta), y_s(r, \theta)] \quad (3.7-22)$$

利用式(3.7-3)和式(3.7-4), 计算上式中的雅可比行列式

$$J = \left| \frac{\partial(y_c, y_s)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_c}{\partial r} & \frac{\partial y_s}{\partial r} \\ \frac{\partial y_c}{\partial \theta} & \frac{\partial y_s}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

把  $J$  值、式(3.7-3)、式(3.7-4)和式(3.7-21)代入式(3.7-22), 得

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \frac{r}{2\pi\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_Y^2}\right], \quad r \geq 0, \theta \in (0, 2\pi) \end{aligned} \quad (3.7-23)$$

再利用概率论中边际分布知识, 可分别求得  $f_R(r)$  和  $f_\theta(\theta)$ 。即

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_Y^2}\right] d\theta \\ &= \frac{r}{\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_Y^2}\right], \quad r \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7-24)$$

可见,  $R(t)$  服从瑞利分布; 而

$$f_\theta(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{2\pi\sigma_Y^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_Y^2}\right] dr = 1/(2\pi), \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (3.7-25)$$

上式中的积分用到了瑞利分布的积分值为 1 的性质。该式说明  $\theta(t)$  服从均匀分布。

总之, 可得到窄带随机过程常用的第二个结论如下。

**【结论 3-2】** 均值 0、方差  $\sigma_Y^2$  的平稳高斯窄带噪声  $Y(t)$ , 它的包络  $R(t)$  和相位  $\theta(t)$  的一维概率密度函数, 分别服从瑞利分布和均匀分布。就一维分布而言,  $R(t)$  和  $\theta(t)$  是统计独立的。即

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma_Y^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_Y^2}\right), \quad r \geq 0 \quad (3.7-26)$$

$$f_\theta(\theta) = 1/(2\pi), \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad (3.7-27)$$

## 3.8 白噪声、低通白噪声和带通白噪声

既然有窄带过程,则必存在非窄带过程。这里介绍一个理想的宽带过程——白噪声,然后讨论常用的低通白噪声和带通白噪声。

### 3.8.1 白噪声

功率谱密度取值在整个频域内是平坦分布的噪声,被称作白噪声,即一噪声若有功率谱密度

$$P_n(\omega) = n_0/2 \quad -\infty < \omega < \infty \quad (3.8-1)$$

式中, $n_0/2$ 表示某常数,则称该噪声为白噪声。

对此需说明以下几点:①功率谱密度必是非负函数,所以 $n_0/2$ 一定是非负的常数,即其在整个频域内呈平坦分布。其单位取W/Hz。②该噪声称呼的引入是来自光学词汇“白光”,白光的谱很宽,在这里为了表示噪声的谱很宽,于是采用了“白噪声”一词。③若白噪声在时域服从高斯分布,则称为高斯白噪声,在分析通信系统性能时人们常用它作为信道中的噪声模型。

式(3.8-1)中定义域是在所有正负频率,所以该谱是双边功率谱密度;包含在该式中的因子2表示该功率谱密度是双边的。有的教材或习题中给出的是白噪声的单边功率谱表示式,即

$$P_n(\omega) = n_0, \quad 0 < \omega < \infty \quad (3.8-2)$$

在作傅里叶变换计算时,要把上式变回到双边功率谱密度表示后才可进行。

依据式(3.3-10),利用式(2.2-27),对式(3.8-1)作傅里叶反变换得白噪声自相关函数为

$$R_n(\tau) = (n_0/2)\delta(\tau) \quad (3.8-3)$$

显然,白噪声的自相关函数仅在 $\tau=0$ 时不为零;而对于其他任意的 $\tau$ ,它都为零。这说明,白噪声只有在 $\tau=0$ 时才相关,而它在任意两个不同时刻上的随机变量都是不相关的。白噪声的自相关函数及其功率谱密度分别如图3-4(a)和(b)所示。

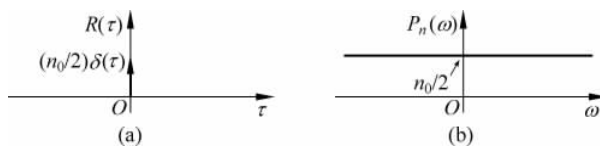


图 3-4 白噪声自相关函数(a)及其功率谱密度(b)

### 3.8.2 低通白噪声

如果功率谱密度为 $n_0/2$ 的白噪声通过截止频率为 $\omega_H$ 的理想LPF(低通滤波器),则称该滤波器的输出噪声为带限白噪声。此时被称为理想LPF的频率响应函数是

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_H \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-4)$$

依据式(3.6-6)得输出噪声功率谱密度

$$P_n(\omega) = |H(\omega)|^2 (n_0/2) = \begin{cases} n_0/2, & \omega \leq \omega_H \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-5)$$

上式(3.8-5)的噪声为带限白噪声,又称为低通白噪声。

根据式(3.3-10)有带限白噪声自相关函数

$$R_n(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\omega_H}^{\omega_H} (n_0/2) \exp(j\omega\tau) d\omega = f_H n_0 \text{Sa}(\omega_H \tau) \quad (3.8-6)$$

式中,  $\omega_H = 2\pi f_H$ 。由上式看到,带限白噪声只有在  $\tau = k/(2f_H)$  上 ( $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ) 时,所得到的随机变量才不相关。它告诉我们,如果对带限白噪声按抽样定理(该定理将在第8章中讲解)抽样的话,则各抽样值是互不相关的随机变量。带限白噪声的自相关函数与功率谱密度如图3-5(a)和(b)所示。

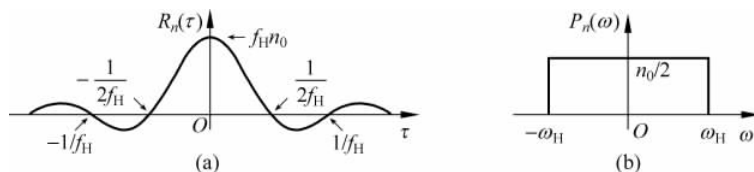


图 3-5 带限白噪声自相关函数(a)及其功率谱密度(b)

**例 3-4** 一随机过程  $\xi(t)$  的功率谱密度如图 3-6 所示。试求其:

- (1) 自相关函数  $R_\xi(\tau)$ ;
- (2) 直流功率;
- (3) 交流功率。

**解:**

- (1) 由图 3-6 所示曲线可写出表示式

$$P_\xi(f) = \delta(f) + \text{rect}(f) \quad (3.8-7)$$

式中

$$\text{rect}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_H \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由式(3.3-12)得傅里叶变换对

$$\delta(f) \Leftrightarrow 1$$

根据式(3.3-10)得

$$R_{re}(\tau) = \int_{-f_H}^{f_H} \exp(j2\pi f\tau) df = 2f_H \text{Sa}(2\pi f_H \tau)$$

利用以上两个结果得所需求的自相关函数

$$R_\xi(\tau) = 1 + 2f_H \text{Sa}(2\pi f_H \tau) \quad (3.8-8)$$

- (2) 依据式(3.3-6),代入上式,得所需求的直流功率

$$R_\xi(\infty) = 1$$

- (3) 依据式(3.3-7),代入式(3.8-8),得所需求的交流功率,即方差

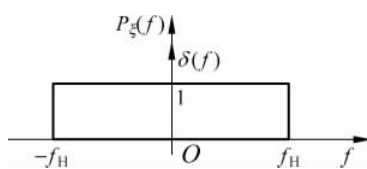


图 3-6  $\xi(t)$  的功率谱密度

$$\sigma^2 = R_{\xi}(0) - R_{\xi}(\infty) = 1 + 2f_H - 1 = 2f_H$$

### 3.8.3 带通白噪声

如果将一个功率谱密度  $n_0/2$  的白噪声加到一个中心角频率为  $\omega_c$ 、带宽为  $B$  (Hz) 的理想 BPF(带通滤波器)上,则称该滤波器的输出噪声为带通白噪声。

依据式(3.6-6),代入理想带通特性和已知输入功率谱密度  $n_0/2$ ,得噪声输出功率谱密度为

$$P_n(\omega) = |H(\omega)|^2 (n_0/2) = \begin{cases} n_0/2, & \omega_c - \pi B \leq |\omega| \leq \omega_c + \pi B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.8-9)$$

上式功率谱密度的曲线如图 3-7(a)所示。

依据式(3.3-10),相关函数与功率谱密度呈傅里叶变换对,得

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c - \pi B}^{-\omega_c + \pi B} (n_0/2) e^{j\omega\tau} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c - \pi B}^{\omega_c + \pi B} (n_0/2) e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{n_0}{4\pi j\tau} (e^{-j\omega_c\tau} j2\sin\pi B\tau + e^{j\omega_c\tau} j2\sin\pi B\tau) = n_0 B \text{Sa}(\pi B\tau) \cos\omega_c\tau \quad (3.8-10) \end{aligned}$$

上式相关函数曲线如图 3-7(b)所示,该曲线假设了  $f_c = 2B$ 。

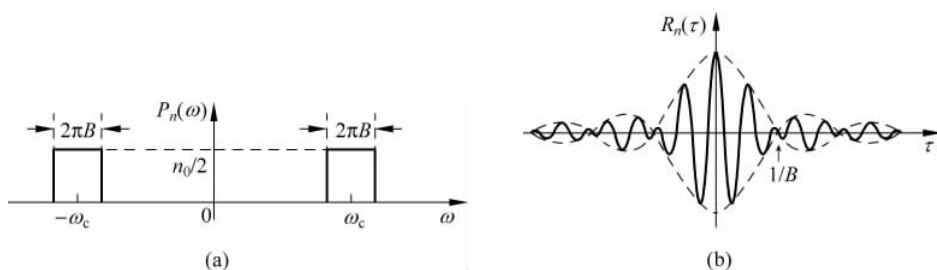


图 3-7 带通白噪声功率谱密度(a)和其相关函数(b)

带通白噪声的平均功率

$$P_n = R_n(0) = n_0 B \quad (3.8-11)$$

以上带通白噪声的有关结论和分析方法在今后带通型传输系统的抗干扰分析中经常会用到。

## 3.9 窄带随机过程加正弦波

在通信系统中经常会遇到的一种情况是平稳窄带高斯噪声加正弦波,即

$$r(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + n(t) \quad (3.9-1)$$

式中,  $A$ 、 $\omega_c$  为常数;  $\theta$  是在  $(0, 2\pi)$  内均匀分布的随机变量;  $n(t)$  为方差等于  $\sigma^2$  的平稳窄带高斯噪声。在通信系统分析中需要寻求  $r(t)$  的包络和相位之概率密度函数,于是作以

下分析。首先,展开和合并上式得

$$r(t) = [A\cos\theta + n_c(t)]\cos\omega_c t - [A\sin\theta + n_s(t)]\sin\omega_c t$$

令

$$\begin{cases} r_c(t) = A\cos\theta + n_c(t) \\ r_s(t) = A\sin\theta + n_s(t) \end{cases} \quad (3.9-2)$$

得  $r(t)$  的正交表示式

$$r(t) = r_c(t)\cos\omega_c t - r_s(t)\sin\omega_c t \quad (3.9-3)$$

令

$$Z(t) = \sqrt{r_c^2(t) + r_s^2(t)}, \quad Z \geq 0 \quad (3.9-4)$$

和

$$\Phi(t) = \arctan[r_s(t)/r_c(t)], \quad \Phi \in (0, 2\pi) \quad (3.9-5)$$

并将式(3.9-4)和式(3.9-5)代入式(3.9-3),得

$$r(t) = Z(t)[\cos\Phi(t)\cos\omega_c t - \sin\Phi(t)\sin\omega_c t] = Z(t)\cos[\omega_c t + \Phi(t)] \quad (3.9-6)$$

上式被称为  $r(t)$  的包络相位表达式。 $Z(t)$  是合成信号  $r(t)$  的包络,  $\Phi(t)$  是该信号的相位。

下一步是求在  $\theta$  出现的条件下  $r_c$  和  $r_s$  的概率密度函数。从式(3.9-2)出发,在  $\theta$  出现的条件下,依据式(3.7-6)作数学期望,得

$$E[r_c(t)] = E[A\cos\theta] + E[n_c(t)] = A\cos\theta$$

$$E[r_s(t)] = E[A\sin\theta] + E[n_s(t)] = A\sin\theta$$

$$D[r_c(t)] = D[r_s(t)] = \sigma^2$$

所以

$$f_2(r_c, r_s/\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\{-[(r_c - A\cos\theta)^2 + (r_s - A\sin\theta)^2]/(2\sigma^2)\} \quad (3.9-7)$$

第三步是求  $Z$  和有关  $\Phi$  的概率密度函数。比较式(3.9-3)和式(3.9-6)得到

$$r_c = Z\cos\Phi \quad \text{和} \quad r_s = Z\sin\Phi \quad (3.9-8)$$

下面用概率论中的雅可比变换法求得雅可比行列式:

$$J = \left| \frac{\partial(r_c, r_s)}{\partial(Z, \Phi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_c}{\partial Z} & \frac{\partial r_s}{\partial Z} \\ \frac{\partial r_c}{\partial \Phi} & \frac{\partial r_s}{\partial \Phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ -Z\sin\Phi & Z\cos\Phi \end{vmatrix} = Z \quad (3.9-9)$$

于是有

$$f(z, \varphi/\theta) = J f_2[r_c(z, \varphi), r_s(z, \varphi)/\theta] \quad (3.9-10)$$

将式(3.9-8)和式(3.9-9)代入上式,得  $\theta$  出现的条件下  $Z$  和  $\Phi$  的概率密度函数

$$f(z, \varphi/\theta) = \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp\{-[z^2 + A^2 - 2Az\cos(\theta - \varphi)]/(2\sigma^2)\} \quad (3.9-11)$$

所以  $\theta$  出现的条件下包络  $z$  的概率密度为

$$\begin{aligned} f(z/\theta) &= \int_0^{2\pi} f(z, \varphi/\theta) d\varphi \\ &= \frac{z}{2\pi\sigma^2} \exp[-(z^2 + A^2)/(2\sigma^2)] \int_0^{2\pi} \exp[Az\cos(\theta - \varphi)/\sigma^2] d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{z}{\sigma^2} \exp[-(z^2 + A^2)/(2\sigma^2)] I_0(Az/\sigma^2) \quad (3.9-12)$$

式中

$$I_0(Az/\sigma^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[Az \cos(\theta - \varphi)/\sigma^2] d\varphi \quad (3.9-13)$$

称为零阶修正贝塞尔函数。由式(3.9-12)看到,该函数与  $\theta$  无关,因此正弦波加窄带高斯过程的包络  $Z$  的概率密度函数为

$$f_1(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp[-(z^2 + A^2)/(2\sigma^2)] I_0(Az/\sigma^2), \quad Z \geq 0 \quad (3.9-14)$$

上式概率密度函数称为广义瑞利分布,也称莱斯(Rice)分布。如果  $A=0$ ,利用零阶修正贝塞尔函数的性质  $I_0(0)=1$ ,则上式变为式(3.7-26)的形式,即变为瑞利分布。从另一角度看,这显然是因为  $A=0$  就是正弦波为 0,这造成所要分析的对象中只剩下窄带噪声,其结果当然同以前分析窄带噪声时的结论一致。

由式(3.9-14)可画出在  $A/\sigma=0, 1, 2, 4$  和 6 时的包络分布  $f(z)$ [即上式中的  $f_1(z)$ ],如图 3-8 所示。显然,该  $A/\sigma$  所对应的信号噪声功率比  $A^2/(2\sigma^2)$  是 0、0.5、2、8 和 18。由此看到,该信噪比为 0 的曲线是瑞利分布;当该信噪比增加时分布曲线右移,即包络均值增加;在大信噪比时,包络在均值附近的分布很类似高斯分布,这不但从该曲线可看出,而且由上式利用  $I_0(x) \approx e^x \sqrt{2\pi x}$  (在  $x$  很大时)作推演后也可得到“类似高斯分布”的结论。

下面转到求  $f(\varphi/\theta)$ 。此时,由式(3.9-11)出发,利用边际积分公式得到

$$\begin{aligned} f(\varphi/\theta) &= \int_0^{\infty} f(z, \varphi/\theta) dz \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2} \sin^2(\theta - \varphi)\right] \int_0^{\infty} z \exp\{-[z - \cos(\theta - \varphi)]^2/(2\sigma^2)\} dz \end{aligned} \quad (3.9-15)$$

由上式出发可以画出正弦波加窄带高斯过程的相位分布  $f(\varphi/\theta)$  如图 3-9 所示。各条曲线旁用箭头标注的是  $A/\sigma$  所对应的数字 1、2、4 和 8。该曲线说明,信噪比大时的相位  $\Phi$  以大的概率靠近信号的相位  $\theta$ ; 信噪比小时的相位  $\Phi$  以大的概率远离信号相位  $\theta$ 。

当信噪比为 0 时,所研究的合成信号只剩下窄带高斯噪声,显然此时的相位  $\Phi$  的分布与式(3.7-27)一样将服从均匀分布。

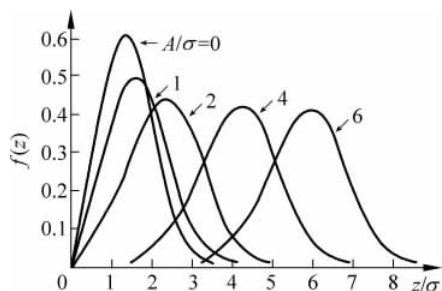


图 3-8 广义瑞利分布

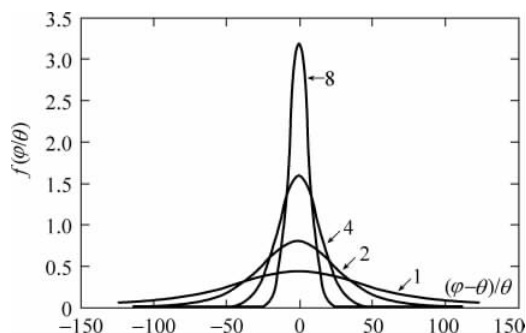


图 3-9 正弦波加窄带噪声时的相位分布

## 思 考 题

- 3-1 何谓随机过程？写出随机过程的  $n$  维概率密度函数的一般表示式。
- 3-2 何谓随机过程的数学期望和方差？它们描述了随机过程的什么性质？
- 3-3 什么是随机过程的协方差函数和自相关函数？它们之间有何关系？它们反映了随机过程的什么性质？
- 3-4 什么是广义平稳随机过程和狭义平稳随机过程？它们之间有何关系？
- 3-5 广义平稳随机过程的自相关函数具有什么特点？
- 3-6 什么是各态历过程？对于各态历的噪声电压，它的数学期望和方差代表什么？它的自相关函数在  $\tau=0$  处的  $R(0)$  又代表什么？
- 3-7 什么是高斯噪声？什么是白噪声？何谓低通白噪声和带通白噪声？
- 3-8 高斯白噪声  $n(t)$  的数学期望和方差皆为 1，试写出它的二维概率密度函数。
- 3-9 什么是误差函数和补误差函数？
- 3-10 什么是窄带高斯噪声？它的波形有何特点？它的包络和相位各服从什么概率分布？
- 3-11 什么是窄带高斯噪声的同相分量和正交分量？它们各具有什么样的统计特性？
- 3-12 正弦波加窄带高斯噪声的合成包络服从什么概率分布？
- 3-13 广义平稳随机过程通过恒参线性系统时，输入随机过程和输出随机过程的数学期望之间有何关系？输入和输出的功率谱密度又有何关系？

## 习 题

- 3-1 设随机过程  $\xi(t)$  可表示成  $\xi(t) = 2\cos(2\pi t + \theta)$ ，式中  $\theta$  是一个离散随机变量，且  $P(\theta=0) = 1/2, P(\theta=\pi/2) = 1/2$ ，试求  $E[\xi(1)]$  及  $R_\xi(0, 1)$ 。
- 3-2 设  $Z(t) = X_1 \cos\omega_0 t - X_2 \sin\omega_0 t$  是一随机过程，若  $X_1$  和  $X_2$  是彼此独立且具有均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的正态随机变量，试求：
- (1)  $E[Z(t)]$ 、 $E[Z^2(t)]$ ；
  - (2)  $Z(t)$  的一维分布密度函数  $f_1(z)$ ；
  - (3)  $B(t_1, t_2)$  与  $R(t_1, t_2)$ 。
- 3-3 求乘积  $Z(t) = X(t)Y(t)$  的自相关函数。已知  $X(t)$  与  $Y(t)$  是统计独立的平稳随机过程，且它们的自相关函数分别为  $R_X(\tau)$ 、 $R_Y(\tau)$ 。
- 3-4 若随机过程  $Z(t) = m(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$ ，其中， $\omega_0$  是某常数， $m(t)$  是宽平稳随机过程，且自相关函数  $R_Z(\tau)$  为

$$R_Z(\tau) = \begin{cases} 1 + \tau, & -1 < \tau < 0 \\ 1 - \tau, & 0 \leq \tau < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\theta$  是服从均匀分布的随机变量,它与  $m(t)$  彼此统计独立。

- (1) 证明  $Z(t)$  是宽平稳的;
- (2) 绘出自相关函数  $R_Z(\tau)$  的波形;
- (3) 求功率谱密度  $P_Z(\omega)$  及功率  $S$ 。

3-5 已知噪声  $n(t)$  的自相关函数  $R_n(\tau) = (a/2)e^{-a|\tau|}$ ,  $a$  为常数。

- (1) 求  $P_n(\omega)$  及  $S$ ;
- (2) 绘出  $R_n(\tau)$  及  $P_n(\omega)$  的图形。

3-6  $\xi(t)$  是一个平稳随机过程,它的自相关函数是周期为  $2s$  的周期函数。在区间  $(-1, 1)(s)$  上,该自相关函数  $R(\tau) = 1 - |\tau|$ 。

试求  $\xi(t)$  的功率谱密度  $P_\xi(\omega)$ ,并用图形表示。

3-7 将一个均值为零、功率谱密度为  $n_0/2$  的高斯白噪声加到一个中心角频率为  $\omega_c$ 、带宽为  $B(Hz)$  的理想 BPF 上,如图 P3-1 所示。

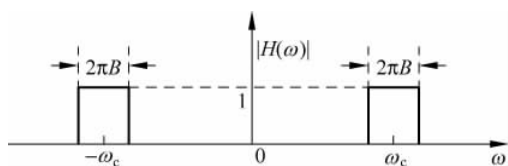


图 P3-1 理想 BPF

- (1) 求滤波器输出噪声的自相关函数;
- (2) 写出输出噪声的一维概率密度函数。

3-8 设 RC 型 LPF 如图 P3-2 所示,求当输入均值为零、功率谱密度为  $n_0/2$  的白噪声时,输出过程的功率谱密度和自相关函数。

3-9 将均值为零、功率谱密度为  $n_0/2$  的高斯白噪声加到图 P3-3 所示的 LR 型 LPF 的输入端。

- (1) 求输出噪声  $n_0(t)$  的自相关函数;
- (2) 求输出噪声  $n_0(t)$  的方差。

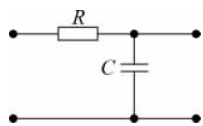


图 P3-2 RC 型 LPF

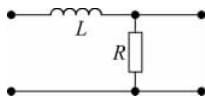


图 P3-3 LR 型 LPF

3-10 设有一个随机二进制矩形脉冲波形,它的每个脉冲的持续时间为  $T_b$ ,脉冲幅度取  $\pm 1$  的概率相等。现假设任一间隔  $T_b$  内波形取值与任何别的间隔内取值统计无关,且过程具有宽平稳性,试证:

- (1) 自相关函数

$$R_\xi(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| / T_b, & |\tau| \leq T_b \\ 0, & |\tau| > T_b \end{cases}$$

- (2) 功率谱密度  $P_\xi(\omega) = T_b [\text{Sa}(\pi f T_b)]^2$ 。

3-11 已知图 P3-4 为单个输入、两个输出的线性过滤器,单位冲击响应分别为  $h_1(t)$

和  $h_2(t)$ 。若输入过程  $\eta(t)$  是平稳的, 求  $\xi_1(t)$  与  $\xi_2(t)$  的互功率谱密度的表示式。(提示: 互功率谱密度与互相关函数为傅里叶变换对。)

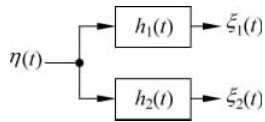


图 P3-4 双路线性过滤器

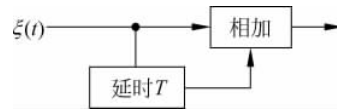


图 P3-5 延时相加器

3-12 若  $\xi(t)$  是平稳随机过程, 自相关函数为  $R_\xi(\tau)$ 。试求它通过如图 P3-5 所示的系统后的自相关函数及功率谱密度。

3-13 若通过图 P3-2 的随机过程是均值为零、功率谱密度为  $n_0/2$  的高斯白噪声, 试求输出过程的一维概率密度函数。

3-14 一噪声的功率谱密度如图 P3-6 所示, 试证明其自相关函数为

$$K \text{Sa}(\Omega\tau/2) \cdot \cos\omega_0\tau$$

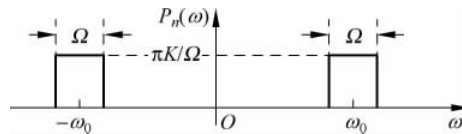


图 P3-6 一带通型功率谱密度