

基于极点配置与状态估计的数字控制器设计

教学目标

基于状态空间的数字控制器设计,就是在已知对象特性的前提下,依据系统动态或稳态性能指标的要求来设计数字控制器。基于状态空间的数字控制器的设计方法主要是通过对闭环系统极点进行配置来实现数字控制器的设计。如果系统中有部分状态变量是难以直接测量的,这就需要通过状态观测器来重构系统状态,也就是建立状态变量的算法模型来实现对状态变量的估计,以便实现状态反馈和极点配置。将观测器与控制率结合起来就是系统控制的调节器。通过对本章内容的学习,希望读者能够:

- 了解系统状态空间表达的基本方法;
- 了解离散时间系统状态空间方程求解的基本方法;
- 了解单输入-单输出离散时间系统状态空间表达与脉冲传递函数的关系;
- 掌握离散时间状态空间系统能控性与能观性判断的基本方法;
- 掌握离散时间状态空间系统极点配置的基本方法;
- 掌握设计全阶状态观测器与降阶状态观测器的基本方法;
- 掌握调节器设计的基本方法;
- 了解带参考输入的离散时间系统状态空间系统的基本结构。

5.1 离散时间系统的状态空间分析

状态空间方法是建立在由 n 个一阶微分方程或差分方程描述的系统的基础之上的。这些方程可组合成一个一阶向量-矩阵的微分方程或差分方程。采用向量-矩阵形式描述系统对象可大大简化系统的数学表达式。另外,状态空间方法可以使工程技术人员在设计时考虑初始条件,这也是经典方法所不具有的特点。

5.1.1 离散时间系统的状态空间表达

状态空间方法是用于描述对象的另外一种方法,如图 3-32 和图 5-1 所示。但是现实中固有的离散系统是非常少的。因此,离散时间系统状态空间表达主要是由连续时间系统状态空间表达转换而来的,这就是连续时间系统状态空间方程的离散化,或者说是建立连续时间状态空间系统的离散模型。这种离散化的方法已在 3.4.2 节中予以介绍,也即式(3-59)~式(3-61)。

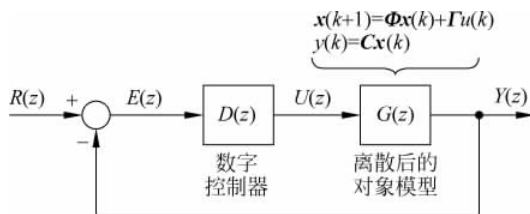


图 5-1 离散时间系统的状态空间表达图

另外,建立离散时间系统状态空间方程也和建立连续时间系统状态空间方程一样,可以通过对描述对象系统的差分方程设置状态变量得到。与连续系统一样,这样建立的状态方程可分为能控标准型、能观标准型、对角线型和约旦标准型。不论用哪种方法建立的离散时间系统状态方程,它们都有式(3-59)的通用表达,即

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (5-1)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \quad (5-2)$$

式中,对于系统矩阵 Φ 和输入矩阵 Γ 的计算是由式(3-60)和式(3-61)给出的。

5.1.2 离散时间状态空间系统的求解

离散时间系统状态空间方程的求解可用递推方法,也可用 z 变换方法。

1. 递推方法

递推方法就是对式(5-1)状态方程直接求解,即

$$\mathbf{x}(1) = \Phi \mathbf{x}(0) + \Gamma u(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \Phi \mathbf{x}(1) + \Gamma u(1) = \Phi^2 \mathbf{x}(0) + \Phi \Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = \Phi \mathbf{x}(2) + \Gamma u(2) = \Phi^3 \mathbf{x}(0) + \Phi^2 \Gamma u(0) + \Phi \Gamma u(1) + \Gamma u(2)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^k \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5-3)$$

对式(5-2)输出方程的求解为

$$y(k) = \mathbf{C} \Phi^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) \quad (5-4)$$

2. z 变换方法

z 变换方法就是对式(5-1)做 z 变换,即

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \Phi \mathbf{X}(z) + \Gamma U(z)$$

于是

$$(z\mathbf{I} - \Phi) \mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \Gamma U(z)$$

整理后有

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} z\mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Gamma U(z)$$

对上式做 z 反变换有

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} z] \mathbf{x}(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Gamma U(z)] \quad (5-5)$$

比较式(5-5)和式(5-3),可得

$$\Phi^k = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} z] \quad (5-6)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \Gamma U(z)] \quad (5-7)$$

其中, $k=1,2,3,\dots$ 。

通常定义 $\Phi(k) = \Phi^k$ 为状态方程的转移矩阵。

【例 5-1】 求下列离散时间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k)$$

的状态转移矩阵。其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

当输入为 $u(k)=1$ 时,求状态 $x(k)$ 和输出 $y(k)$, $k=0,1,2,3,\dots$ 。假设初始条件为

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解 如果求状态 $\mathbf{x}(k)$ 和输出 $y(k)$ 的非闭合形式的解,可用递推方法

$$\mathbf{x}(1) = \Phi \mathbf{x}(0) + \mathbf{F} u(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = \mathbf{C} \mathbf{x}(1) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{x}(2) = \Phi^2 \mathbf{x}(0) + \Phi \mathbf{F} u(0) + \mathbf{F} u(1) = \dots$$

$\vdots$

如果求状态 $\mathbf{x}(k)$ 和输出 $y(k)$ 的闭合形式的解,则需用 z 变换方法来求状态转移矩阵。不论用哪种方法来求解离散状态空间系统,手工计算都是很困难的,一般需借助于 MATLAB 来进行这些计算。

5.1.3 脉冲传递函数矩阵

单输入-单输出离散时间系统可以通过脉冲传递函数建模。把脉冲传递函数的概念扩展到多输入-多输出离散时间系统就产生了脉冲传递函数矩阵。脉冲传递函数矩阵也揭示了状态空间方程与脉冲传递函数之间的关系。

对式(5-1)做 z 变换有

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \Phi \mathbf{X}(z) + \mathbf{F} U(z)$$

需要指出的是,脉冲传递函数的定义要求满足初始状态为零的条件,所以这里假设 $\mathbf{x}(0)=0$ 。于是

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mathbf{F} U(z)$$

以及

$$Y(z) = \mathbf{C} [(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mathbf{F}] U(z) = \mathbf{G}(z) U(z)$$

式中

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mathbf{F} \quad (5-8)$$

式中, $\mathbf{G}(z)$ 就是脉冲传递函数矩阵。 $(z\mathbf{I} - \Phi)$ 的逆矩阵可以写成

$$(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{I} - \Phi)}{|z\mathbf{I} - \Phi|}$$

则脉冲传递函数矩阵也可以写成

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(z\mathbf{I} - \Phi) \mathbf{F}}{|z\mathbf{I} - \Phi|}$$

这里, $|z\mathbf{I} - \Phi| = 0$ 的点就是 $\mathbf{G}(z)$ 的极点,也是该离散时间系统的特征方程

$$|z\mathbf{I} - \Phi| = 0 \quad (5-9)$$

【例 5-2】有连续时间系统如下。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+a}$$

- 求: (1) 该系统的连续时间状态空间表达;
 (2) 该系统状态空间表达的离散模型;
 (3) 脉冲传递函数矩阵。

解

- (1) 对象的传递函数可直接转换为下面的状态空间表达。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + u \\ y &= x\end{aligned}$$

- (2) 由式(3-60)和式(3-61)有

$$\begin{aligned}\Phi &= e^{AT} = e^{-aT} \\ \Gamma &= \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \int_0^T e^{-a\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-aT}}{a}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}x(k+1) &= e^{-aT}x(k) + \frac{1 - e^{-aT}}{a}u(k) \\ y(k) &= x(k)\end{aligned}$$

- (3) 由式(5-8)有

$$G(z) = [(zI - \Phi)^{-1} \Gamma] = (z - e^{-aT})^{-1} \frac{1 - e^{-aT}}{a} = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{a(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

当然,这个结果与直接对系统 $G(s)$ 求取离散模型

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{1}{s(s+a)}\right] = \frac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{a(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

是一致的。

5.1.4 离散时间状态空间系统的稳定性

对离散时间状态空间系统的稳定性判断有两种方法,即李雅普诺夫第一方法和李雅普诺夫第二方法。李雅普诺夫第一方法又称为间接判断法,其基本思路是通过系统状态方程的解来判别系统的稳定性;或者说判断式(5-9)的特征值是否全部位于单位圆内。对于单输入-单输出离散时间状态方程,也可按式(5-8)转换成传递函数,再按 4.2 节中介绍的方法进行判断,这些方法包括舒尔-科恩稳定性检验法、朱利稳定性检验法和双线性变换加劳斯判据的稳定性检验法。李雅普诺夫第二方法又称为直接判断法,其基本思路是借助于一个李雅普诺夫函数来直接对系统平衡状态的稳定性做出判断。离散时间系统的李雅普诺夫稳定性判断方法与连续时间系统的李雅普诺夫稳定性判断方法非常相似,这里不予介绍,读者有兴趣可参阅相关书籍。

5.2 极点配置

极点配置就是通过状态变量的反馈使闭环系统的全部极点配置到希望的位置。然而,进行极点配置时,有两个非常重要的基本概念:一个是并非所有系统都能对其全部极点进行配置,这就是系统的能控性问题;另一个是有些实际系统可能无法测到所有需要实现状态反馈的状态变量,这时需要采用观测器来进行状态估计,但也不是所有系统都具有可观测

性的,这就是系统的能观性问题。

5.2.1 能控性

能控性是指对于式(5-1)和式(5-2)所描述的系统,如果能够找到一个控制序列 $\{u(k)\}$,使其在有限个采样周期内,系统 Φ 和 Γ 能从任意初始状态转移到任意希望的状态,则称该系统状态完全能控。换句话说,就是控制作用能否对系统的所有状态产生影响或是实现控制。系统状态的转移过程可通过采用递推方法对式(5-1)状态方程直接求解,即式(5-3),将式(5-3)重新表达如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \Phi^n \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{n-1} \Phi^{n-j-1} \Gamma u(j) \\ &= \Phi^n \mathbf{x}(0) + [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \cdots \quad \Phi^{n-1}\Gamma] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \\ &= \Phi^n \mathbf{x}(0) + W_c U \end{aligned} \quad (5-10)$$

式中, $W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \cdots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$, $U = [u^T(n-1) \quad \cdots \quad u^T(0)]^T$ 。

由式(5-10)可知,当且仅当矩阵 W_c 的秩为 n 时(或者说 W_c 满秩),系统 Φ 和 Γ 完全能控。

如果 $\Phi^n \mathbf{x}(0) + W_c U = 0$,称系统 Φ 和 Γ 能控。

如果 $\Phi^n \mathbf{x}(0) + W_c U = \mathbf{x}(n)$,则称系统 Φ 和 Γ 能达。

【例 5-3】 判断下列系统是否能控。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解

$$\begin{aligned} W_c &= [\Gamma \quad \Phi\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 \\ -0.8 & 0.64 \end{bmatrix} \\ \det W_c &= \det \begin{bmatrix} 1 & 10.8 \\ -0.8 & 0.64 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

可见, W_c 为奇异矩阵,所以系统不能控。

【例 5-4】 判断下列系统是否能控。

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

解

$$\begin{aligned} W_c &= [\Gamma \quad \Phi\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \det W_c &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

可见, W_c 为奇异矩阵,所以系统不能控。

z 平面内系统状态完全能控的条件也可以通过脉冲传递函数来表述。系统状态完全能

控的充要条件是脉冲传递函数中没有零极点对消发生。如果出现对消,那么系统在对消模式下不可控。

5.2.2 能观性

能观性是指对于式(5-1)和式(5-2)所描述的系统,如果从任意采样时刻开始,在有限个采样周期内,对系统的输出进行观测得到: $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$, 通过这些信息能够唯一地确定或者说识别出系统的初始状态,则称该系统为完全能观。

如果假设 $u(k)=0$, 由式(5-2)有

$$\begin{cases} y(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \\ y(1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\Phi\mathbf{x}(0) \\ y(2) = \mathbf{C}\mathbf{x}(2) = \mathbf{C}\Phi\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\Phi^2\mathbf{x}(0) \\ \vdots \\ y(n) = \mathbf{C}\Phi^{n-1}\mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_o\mathbf{x}(0) \end{cases} \quad (5-11)$$

式中

$$\mathbf{W}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

从式(5-12)可知,当且仅当矩阵 $\mathbf{W}_o$ 的秩为 n 时(或者说 $\mathbf{W}_o$ 满秩),系统完全能观。

【例 5-5】 判断下列系统是否能观。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_o &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} \\ \det \mathbf{W}_o &= \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} = -0.632 \neq 0 \end{aligned}$$

可见, $\mathbf{W}_o$ 为非奇异矩阵,所以系统能观。

【例 5-6】 判断下列系统是否能观。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ y(k) &= [1 \quad -0.5] \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

解

$$\mathbf{W}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ (1 \quad -0.5) \begin{pmatrix} 1.1 & -0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\det W_o = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0.6 & -0.3 \end{bmatrix} = 0$$

可见, W_o 为奇异矩阵, 所以系统不能观。

z 平面内系统状态完全能观的条件也可以通过脉冲传递函数来表述。系统状态完全能观的充要条件是脉冲传递函数中没有零极点对消发生。如果出现对消, 就无法在输出中观测到对消掉的状态。

5.2.3 采样周期与能控性和能观性

将连续时间状态空间系统采样得到的离散时间状态空间系统, 其系统矩阵和输入矩阵的计算均与采样周期有关。如果连续时间状态空间系统是能控的或能观的, 但采样得到的离散时间状态空间系统, 在有些采样点上可能不具备能控性或能观性。

【例 5-7】 判断下列系统经离散化后是否能控与能观。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解

$$W_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det W_c = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

可见, W_c 为非奇异矩阵, 所以系统能控。

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det W_o = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

可见, W_o 为非奇异矩阵, 所以系统能观。

将连续时间状态空间系统按照式(3-60)和式(3-61), 并用拉普拉斯变换的方法来建立系统离散模型。

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 1} & \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{-1}{s^2 + 1} & \frac{s}{s^2 + 1} \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 1} & \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{-1}{s^2 + 1} & \frac{s}{s^2 + 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix}$$

因此,系统的离散模型为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_c &= [\Gamma \quad \Phi \Gamma] = \begin{bmatrix} 1 - \cos T & \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{pmatrix} \\ \sin T & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \cos T & \cos T + 1 - 2\cos^2 T \\ \sin T & -\sin T + 2\cos T \sin T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det W_c = \det \begin{bmatrix} 1 - \cos T & \cos T + 1 - 2\cos^2 T \\ \sin T & -\sin T + 2\cos T \sin T \end{bmatrix} = -\sin T(1 - \cos T)$$

可见,当 $T=n\pi(n=1,2,3,\dots)$ 时,系统不具有能控性。

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos T & -\sin T \end{bmatrix}$$

$$\det W_o = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos T & -\sin T \end{bmatrix} = -\sin T$$

同样,当 $T=n\pi(n=1,2,3,\dots)$ 时,系统不具有能观性。

5.2.4 离散时间状态空间系统的极点配置

离散状态空间系统与连续状态空间系统一样,可以通过状态反馈来实现系统极点的配置。这个概念可以通过图 5-2 来加以说明。在开环状态空间系统中,将状态变量引出构成闭环系统,通过对状态反馈矩阵的选择,可以将闭环系统的极点配置在所希望的位置上。系统通过状态反馈能够实现任意配置极点的必要充分条件是系统具有能控性。

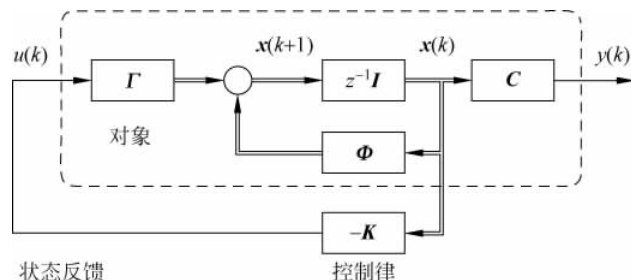


图 5-2 带状态反馈的闭环系统图

需要说明的是,这里介绍的只是单输入-单输出系统,并且是零输入情况下的系统。为了将这种系统与反馈系统进行比较,将图 5-2 所示的系统重新表达为图 5-3 所示的结构。

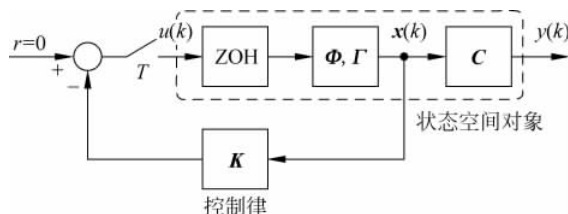


图 5-3 带状态反馈的闭环控制系统图

对式(5-1)和式(5-2)描述的状态空间系统,引入状态反馈

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -[k_1 k_2 \cdots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5-13)$$

式中, $\mathbf{K}$ 为状态反馈矩阵。

由式(5-1)、式(5-2)和式(5-13)有

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) - \Gamma\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = [\Phi - \Gamma\mathbf{K}]\mathbf{x}(k) \quad (5-14)$$

对式(5-14)做 z 变换,并整理有

$$[z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}]\mathbf{x}(z) = 0 \quad (5-15)$$

其中,

$$|z\mathbf{I} - \Phi + \Gamma\mathbf{K}| = 0 \quad (5-16)$$

为闭环系统的特征方程。只要选取矩阵 $\mathbf{K}$,就可使系统的特征值为希望极点,这就是极点配置。

与连续状态空间系统一样,离散状态空间系统的极点配置方法包括系数匹配法、转移矩阵法、艾克曼(Ackermann)公式法、MATLAB 直接计算法等。

这里仅以系数匹配法的应用为例,对极点配置的原理进行说明。不论哪种极点配置方法,首先都必须将系统设计指标转换为极点位置的表达 $z_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$,即

$$\alpha(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n) = 0 \quad (5-17)$$

系数匹配法就是将多项式形式的式(5-17)与式(5-16)特征方程的各项 z 次幂系数进行比较,以求取矩阵 $\mathbf{K}$ 。

【例 5-8】 对于例 4-2 的机器臂系统,即 $G(s) = 1/[s(s+1)]$,按照指标 $\zeta=0.5$ 和 $\omega_n=1$,取 $T=1\text{s}$,用状态反馈方法来设计闭环调节系统。

解 首先将指标转换为极点位置的表达,由 $\zeta=0.5$ 和 $\omega_n=1$ 有 $s = -0.5 \pm j0.87$,则

$$z = e^{(-0.5 \pm j0.87)T} = e^{-0.5T} e^{\pm j0.87T} = 0.607 e^{\pm j0.87\text{rad}} = 0.607 e^{\pm j49.9^\circ}$$

即

$$(z - 0.607 e^{j49.9^\circ})(z - 0.607 e^{-j49.9^\circ}) = z^2 - 0.786z + 0.368 = 0 \quad (5-18)$$

这样,希望极点的位置如图 5-4 所示。

例 4-2 的机器臂系统的传递函数表达为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

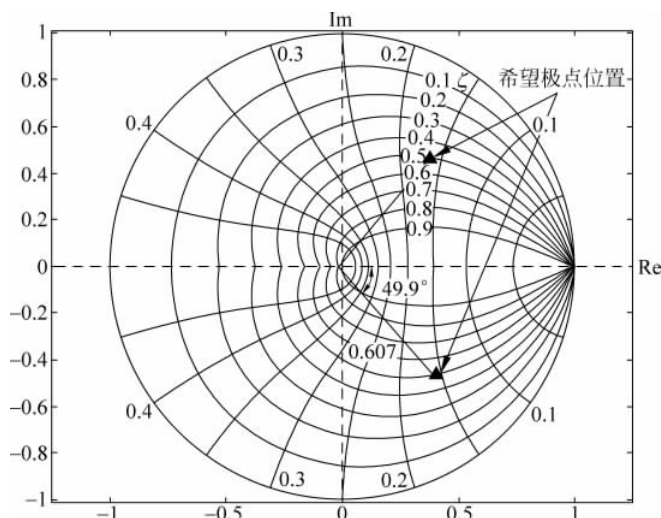


图 5-4 例 5-8 希望极点位置图

其状态空间表达为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

用拉普拉斯变换的方法来建立连续时间状态空间系统的离散模型。

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} \mathbf{B} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 1 - e^{-\tau} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-\tau} \\ 1 - e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix}$$

因此,系统的离散模型为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

设状态反馈为

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -k_1x_1(k) - k_2x_2(k)$$

代入式(5-16),可得系统特征方程

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F}\mathbf{K}| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z + (-e^{-T})k_1 - e^{-T} & (1 - e^{-T})k_2 \\ (T - 1 + e^{-T})k_1 - (1 - e^{-T}) & z + (T - 1 + e^{-T})k_2 - 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= z^2 + [(1 - e^{-T})k_1 + (T - 1 + e^{-T})k_2 - (1 + e^{-T})]z - \\ &\quad (1 - e^{-T})k_1 + (1 - e^{-T} - Te^{-T})k_2 + e^{-T} = 0 \end{aligned}$$

这里 $T=1\text{s}$, 因此

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F}\mathbf{K}| &= z^2 + [(1 - e^{-1})k_1 + (1 - 1 + e^{-1})k_2 - (1 + e^{-1})]z - \\ &\quad (1 - e^{-1})k_1 + (1 - e^{-1} - 1e^{-1})k_2 + e^{-1} \\ &= z^2 + [(1 - 0.368)k_1 + (0.368)k_2 - (1 + 0.368)]z - \\ &\quad (1 - 0.368)k_1 + (1 - 2 \times 0.368)k_2 + 0.368 \\ &= z^2 + (0.632k_1 + 0.368k_2 - 1.368)z - 0.632k_1 + 0.264k_2 + 0.368 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5-19)$$

比较式(5-18)与式(5-19)同次幂的系数有

$$0.632k_1 + 0.368k_2 - 1.368 = -0.786$$

$$-0.632k_1 + 0.264k_2 + 0.368 = 0.368$$

解其可得

$$k_1 = 0.385, \quad k_2 = 0.921$$

当初始条件 $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$ 和 $r=0$ 时, 机器臂系统的状态与控制输出仿真曲线如图 5-5 所示。

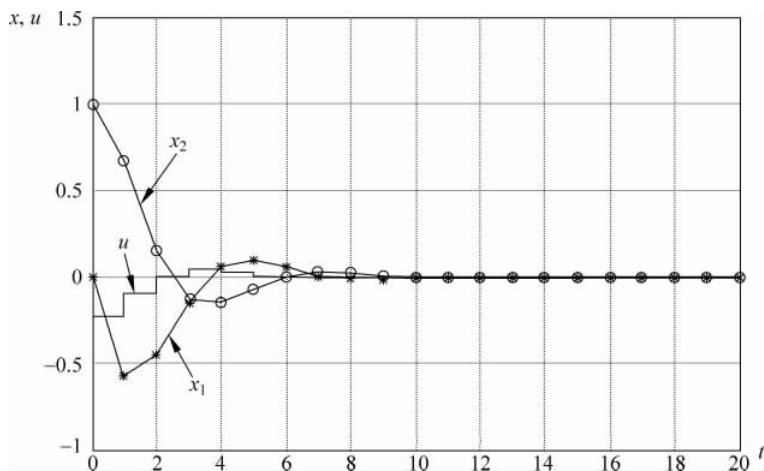


图 5-5 机器臂系统的状态与控制输出仿真曲线

该闭环控制系统的硬件实现可用图 5-6 所示的配置方案。图 5-6(a)中,对输出变量 $y(t)$,也即 $x_2(t)$ 的检测采用位置传感器,而对状态变量 $x_1(t)$ 的检测则需采用速度传感器。图 5-6(a)中假设了位置传感器与速度传感器的增益为 1。而在实际应用中,这些传感器的增益都不会是 1。假如位置传感器的增益为 H_p ,速度传感器的增益为 H_v ,这时状态反馈应配置为

$$H_p k_{1a} = 0.385, \quad H_v k_{2a} = 0.921$$

则该闭环控制系统的硬件配置如图 5-6(b)所示。

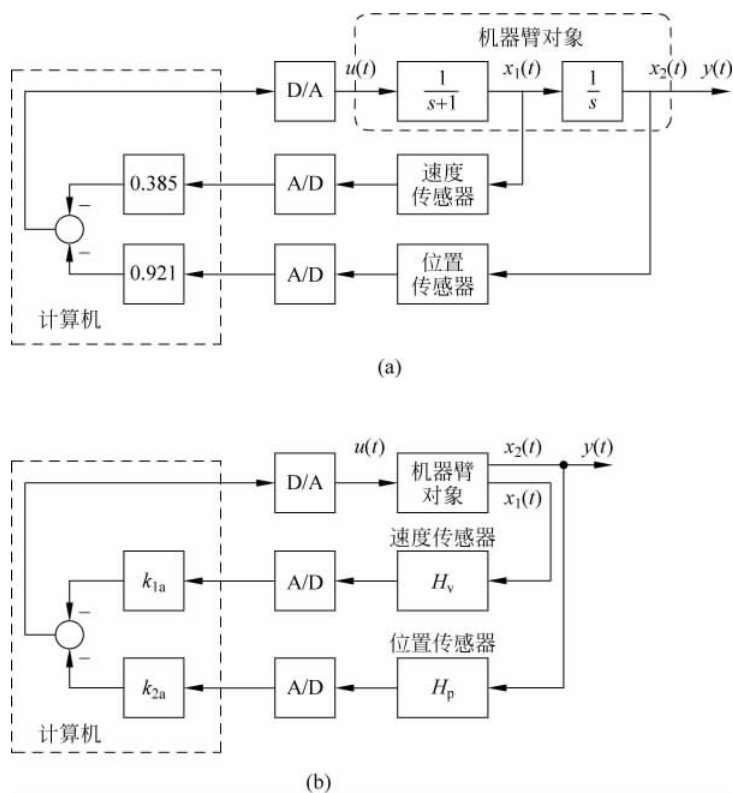


图 5-6 例 5-8 闭环控制系统硬件配置图

5.3 状态观测器设计

在 5.2 节中,介绍了系统可通过完全状态反馈来实现极点的任意配置,这是建立在所有状态变量均能直接测量的前提之下的。在实际系统中,往往有部分状态变量是难以直接测量的,这就需要通过状态观测器(Observer)来重构状态,也就是建立状态变量的算法模型来实现对状态变量的估计,以便实现状态反馈。如果被控对象的离散状态空间表达由式(5-1)和式(5-2)给出,则模型重构的状态空间表达式为

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi \hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) \quad (5-20)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (5-21)$$

式中, $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 与 $\hat{\mathbf{y}}(k)$ 为被估计的状态变量和输出变量。因此,状态观测器也称为状态估计器(Estimator)。

状态观测器根据其配置结构分为开环状态观测器和闭环状态观测器。根据其估计的时刻分为预估状态观测器和现时状态观测器。根据估计对象的阶数分为全阶状态观测器和降阶状态观测器。

5.3.1 全阶观测器

由式(5-20)和式(5-21)可知,状态观测器与被控对象使用了同样的输入,状态观测器与被控对象的关系可由图 5-7 来表达。观测器是对整个对象进行估计,所以为全阶状态观测器。观测器的输出与对象的输出是并行的,这种配置的观测器也称为开环状态观测器。

由式(5-20)和式(5-21)表达的状态观测器与式(5-1)和式(5-2)表达的被控对象,只有在相同的初始条件和参数条件下,观测器的状态才能与对象的状态相等。只要初始条件或参数条件有差异,观测器的状态与对象的状态就会存在偏差,状态的偏差最终反映在对象输出与观测器输出之间存在偏差。为了消除这种偏差,实际应用中通常将输出反馈到观测器的状态,从而形成闭环状态观测器,如图 5-8 所示。

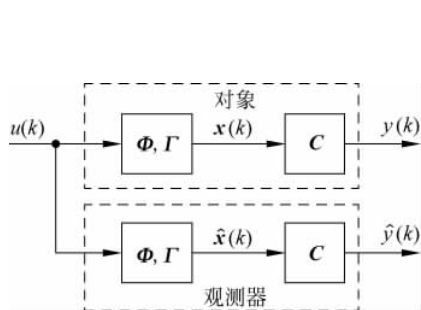


图 5-7 开环观测器系统图

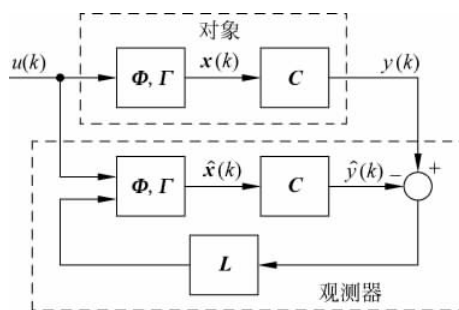


图 5-8 闭环观测器系统图

对于闭环状态观测器,观测器的动态方程为

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi \hat{\mathbf{x}}(k) + \Gamma u(k) + L[y(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (5-22)$$

在式(5-22)中,只要使 $y(k) - \hat{y}(k)$ 尽快趋于零,就可使误差 $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ 最终趋于零。通常称式(5-22)表达的观测器为预报观测器,这是因为估计 $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ 要比测量 $y(k)$ 提前一个周期。换句话说,就是观测器的状态 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 是在对 $y(k-1)$ 及以往所有输出向量和 $u(k-1)$ 及以往所有控制向量进行测量后得到的。假设对象的状态与观测器的状态之间的误差为 $\tilde{\mathbf{x}}$,即

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (5-23)$$

于是

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \Phi \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (5-24)$$

由式(5-1)、式(5-22)、式(5-23)和式(5-24)有

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = [\Phi - LC] \tilde{\mathbf{x}}(k) \quad (5-25)$$

式(5-25)说明只要合理地选择反馈向量 L ,总可以使误差收敛到零。对式(5-25)做 z 变换并进一步整理有

$$[zI - \Phi + LC] \tilde{\mathbf{x}}(z) = 0 \quad (5-26)$$

而

$$|zI - \Phi + LC| = 0 \quad (5-27)$$

为观测器的特征方程。由式(5-26)和式(5-27)可知,对象与观测器状态之间的误差取决于 Φ 、 C 和 L 。在对象特性确定的情况下,设计观测器就是选择向量 L ,使特征方程式(5-27)的特征值,也即观测器的极点位于 z 平面上相应的位置,使对象与观测器状态之间的误差收敛于零。

可以采取类似于设计控制率的方法来选择 L 。如果给定观测器在 z 平面上根的位置,则 L 可以唯一地确定。所选取的观测器特征方程的特征希望值,即观测器在 z 平面上根的位置,应使得状态观测器的响应速度比闭环系统的响应速度快 2~6 倍。

另一种不同的构造状态观测器的方法是使用 $y(k)$ 来估计 $\hat{x}(k)$ 。这可以通过将观测过程分成两步来实现。第一步,先求取 $z(k+1)$,它是在 $\hat{x}(k)$ 和 $u(k)$ 的基础上对 $x(k+1)$ 的逼近;第二步,用 $y(k+1)$ 来修正 $z(k+1)$,修正后的 $z(k+1)$ 作为 $x(k+1)$ 。基于这种方法设计的观测器称为现时观测器。对于现时观测器可以通过如图 5-9 所示的框图来理解其原理。图 5-9(a)为预报观测器,其修正向量反馈到 $(k+1)$ 步的状态上。而图 5-9(b)为现时观测器,其修正向量反馈到 k 步的状态上,并且引入了另外一个变量 z 。从图 5-9 可以看出,其现时观测器方程为

$$\hat{x}(k) = z(k) + L[y(k) - Cz(k)]$$

将上式移至 $(k+1)$ 步有

$$\hat{x}(k+1) = z(k+1) + L[y(k+1) - Cz(k+1)] \quad (5-28)$$

另外

$$z(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) \quad (5-29)$$

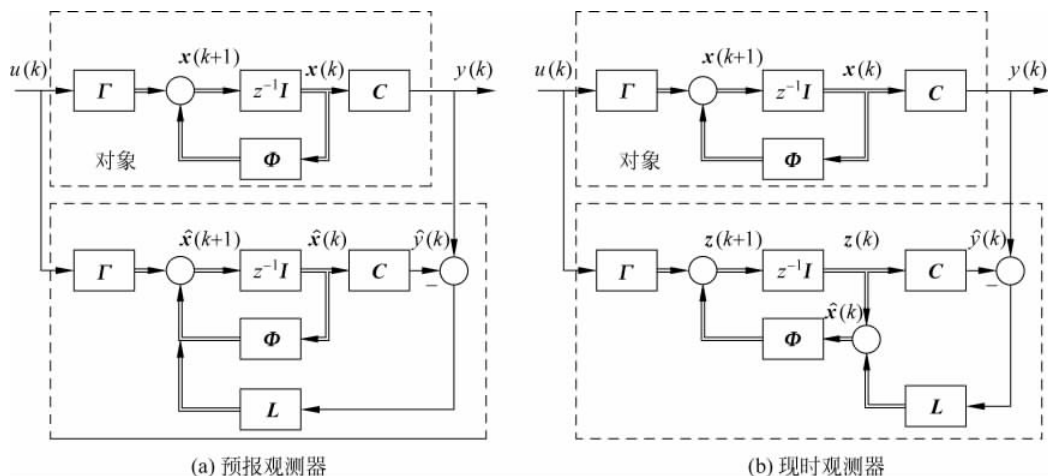


图 5-9 观测器原理图

与式(5-23)和式(5-24)一样先求取其误差。

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}(k+1) \\ &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) - \{z(k+1) + L[y(k+1) - Cz(k+1)]\} \\ &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) - \{\Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L[Cx(k+1) - C(\Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k))]\} \\ &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) - \{\Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L[C(\Phi x(k) + \Gamma u(k)) - C(\Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k))] \} \\
& = (\Phi - LC\Phi)[x(k) - \hat{x}(k)] \\
& = (\Phi - LC\Phi)\tilde{x}(k)
\end{aligned}$$

将上式与式(5-26)一样处理,可得

$$[zI - \Phi + LC\Phi]\tilde{x}(z) = 0 \quad (5-30)$$

同样

$$|zI - \Phi + LC\Phi| = 0 \quad (5-31)$$

为现时观测器的特征方程。由式(5-30)和式(5-31)可知,对象与观测器状态之间的误差取决于 Φ 、 C 和 L 。在对象特性确定的情况下,设计观测器就是选择向量 L ,使特征方程式(5-31)的特征值,也即现时观测器的极点位于 z 平面上相应的位置,使对象与现时观测器状态之间的误差收敛于零。

【例 5-9】 对于例 5-8 的机器臂系统,设计预报观测器和现时观测器。这里同样取采样周期 $T=1\text{s}$ 。

解 在例 5-8 中,由设计指标有 $r=0.606$ 。这里取状态观测器的响应速度比闭环系统的响应速度快 2 倍,即 $r'=r^2=0.606^2 \approx 0.37$ 。所以选择 $z=0.25 \pm j0.25$ 。这是由于

$$\sqrt{0.25^2 + 0.25^2} = 0.35 \approx r'$$

因此,观测器在 z 平面上根的位置为

$$(z + 0.25 + j0.25)(z + 0.25 - j0.25) = z^2 + 0.5z + 0.125 \quad (5-32)$$

预报观测器的特征方程由式(5-27)给出。

$$\begin{aligned}
& |zI - \Phi + LC| \\
& = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \\
& = \left| \begin{bmatrix} z - e^{-T} & l_1 \\ -(1 - e^{-T}) & z - 1 + l_2 \end{bmatrix} \right| \\
& = z^2 + (l_2 - 1 - e^{-T})z + (1 - e^{-T})l_1 - e^{-T}(l_2 - 1) = 0
\end{aligned}$$

这里 $T=1\text{s}$,因此

$$z^2 + (l_2 - 1.368)z + 0.632l_1 - 0.368l_2 + 0.368 = 0 \quad (5-33)$$

比较式(5-32)与式(5-33)同次幂的系数有

$$l_2 - 1.368 = 0.5$$

$$0.632l_1 - 0.368l_2 + 0.368 = 0.125$$

解其可得

$$l_1 = 0.703, \quad l_2 = 1.868$$

现时观测器的特征方程由式(5-31)给出。

$$\begin{aligned}
& |zI - \Phi + LC\Phi| \\
& = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} \right| \\
& = z^2 + [l_1(1 - e^{-T}) - e^{-T} + l_2 - 1]z + e^{-T} - l_2e^{-T} = 0
\end{aligned}$$

这里 $T=1\text{s}$,因此

$$z^2 + (0.632l_1 + l_2 - 1.368)z + 0.368 - 0.368l_2 = 0 \quad (5-34)$$

比较式(5-32)与式(5-34)同次幂的系数有

$$0.632l_1 + l_2 - 1.368 = 0.5$$

$$0.368 - 0.368l_2 = 0.125$$

解其可得

$$l_1 = 3.337, \quad l_2 = 0.660$$

* 5.3.2 降阶观测器

在 5.3.1 节中介绍的全阶状态观测器中,如果有些状态变量可以测量,则与连续时间状态空间系统一样,对可以测量的状态变量不必再进行估计,只需对不可测量的状态变量进行估计,这就是降阶观测器。

在离散时间状态空间系统中,同样将状态向量分成两个部分,即 $\mathbf{x}_a$ 是可以直接测量的状态变量部分,而 $\mathbf{x}_b$ 是要进行估计的状态变量部分。参照式(5-1)与式(5-2),描述整个系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k+1) \\ \mathbf{x}_b(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_b \end{bmatrix} u(k) \quad (5-35)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a(k) \\ \mathbf{x}_b(k) \end{bmatrix} \quad (5-36)$$

描述要进行估计的状态变量部分为

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \Phi_{bb}\mathbf{x}_b(k) + \Phi_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{r}_b u(k) \quad (5-37)$$

式中, $\Phi_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{r}_b u(k)$ 是已知的,因而可以认为是对 $\mathbf{x}_b$ 动态响应的输入。重新整理式(5-35)的 $\mathbf{x}_b$ 部分有

$$\mathbf{x}_a(k+1) - \Phi_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{r}_a u(k) = \Phi_{ab}\mathbf{x}_b(k) \quad (5-38)$$

式中, $\mathbf{x}_a(k+1) - \Phi_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{r}_a u(k)$ 是已知的测量值。这样,式(5-38)就将等式左边的测量值与等式右边的未知状态联系起来了。这里式(5-37)和式(5-38)与部分状态 $\mathbf{x}_b$ 之间的关系,和式(5-1)与全部状态 $\mathbf{x}$ 之间的关系是相同的。因此,为了得到所需的降阶估计器,可在全阶状态观测器方程中做以下替换。

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}_b$$

$$\Phi \leftarrow \Phi_{bb}$$

$$\mathbf{r} u(k) \leftarrow \Phi_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{r}_b u(k)$$

$$y(k) \leftarrow \mathbf{x}_a(k+1) - \Phi_{aa}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{r}_b u(k)$$

$$\mathbf{C} \leftarrow \Phi_{ab}$$

从而得到降阶观测器方程为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_b(k+1) &= \Phi_{bb}\hat{\mathbf{x}}_b(k) + \Phi_{ba}\mathbf{x}_a(k) + \mathbf{r}_b u(k) + \\ &\quad \mathbf{L}_r [\mathbf{x}_a(k+1) - \Phi_{aa}\mathbf{x}_a(k) - \mathbf{r}_a u(k) - \Phi_{ab}\hat{\mathbf{x}}_b(k)] \end{aligned} \quad (5-39)$$

将式(5-37)减去式(5-39)可得出误差方程为

$$\hat{\mathbf{x}}_b(k+1) = [\Phi_{bb} - \mathbf{L}_r \Phi_{ab}] \hat{\mathbf{x}}_b(k) \quad (5-40)$$

这里降阶观测器的反馈矩阵 $\mathbf{L}_r$ 可以完全按照前面的方法来选择,即

$$|zI - \Phi_{ab} + L_r \Phi_{ab}| = \alpha_e(z) \quad (5-41)$$

式(5-41)也就是将其特征方程的根配置在需要的位置上(配置方法包括 5.2.4 节中介绍的系数匹配法、转移矩阵法、艾克曼公式法和 MATLAB 直接算法等)。

5.4 带状态观测器的极点配置

如果采用 5.2 节介绍的控制率,并采用 5.3 节介绍的估计状态向量来实现,便组成了一个完整的控制系统,如图 5-10(a)所示。由于在设计控制率时假设反馈是真实的状态 $\mathbf{x}(k)$ 而不是 $\hat{\mathbf{x}}(k)$,因此必须考查采用 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 反馈时会对系统的动态性能产生什么样的影响。

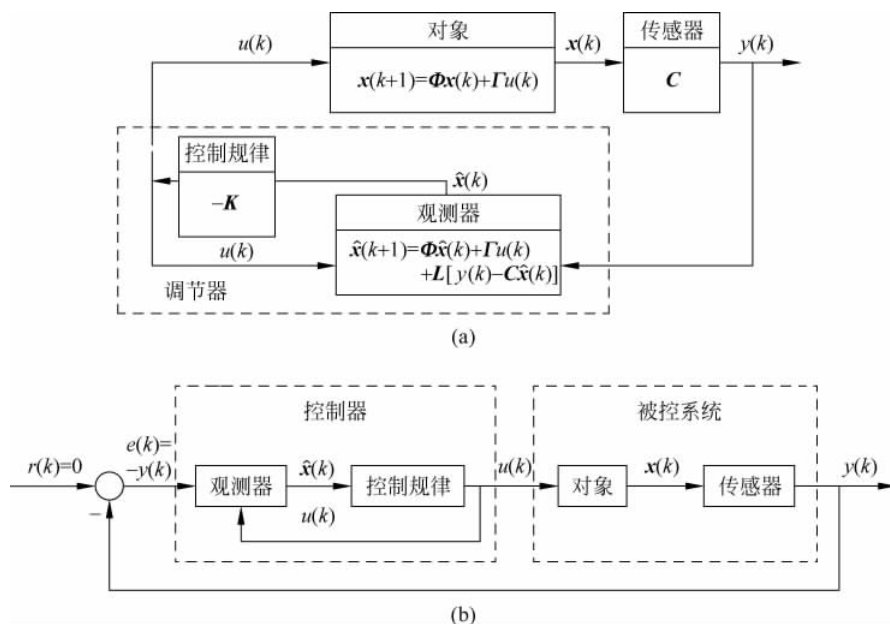


图 5-10 观测器与控制器的结构图

5.4.1 分离原理

由图 5-10(a)和式(5-14)有

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) - \Gamma \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}(k) \quad (5-42)$$

根据式(5-23),可以用状态误差来表达式(5-42)。

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) - \Gamma \mathbf{K} [\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)] \quad (5-43)$$

将式(5-43)与观测器误差方程(5-25)合并,可得到两个描述整个系统性能的耦合方程。

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - LC & 0 \\ \Gamma \mathbf{K} & \Phi - \Gamma \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \quad (5-44)$$

对式(5-44)做 z 变换可得其特征方程为

$$\begin{vmatrix} zI - \Phi + LC & 0 \\ \Gamma \mathbf{K} & zI - \Phi + \Gamma \mathbf{K} \end{vmatrix} = 0 \quad (5-45)$$

在式(5-45)的特征方程中,因为右上方为零矩阵,所以上式可改写为

$$|zI - \Phi + LC| |zI - \Phi + \Gamma \mathbf{K}| = \alpha_e(z) \alpha_c(z) = 0 \quad (5-46)$$

换言之,式(5-44)描述的系统的极点是由控制器极点和观测器极点组成的。 $\alpha_c(z)$ 为观测器指标的多项式表达, $\alpha_c(z)$ 为控制器指标的多项式表达。与连续系统一样,控制器-观测器组合系统和单独控制器及单独观测器时具有相同的极点,这就是所谓的分离原理。分离原理就是说闭环系统的动态特性与观测器的动态特性无关,系统与观测器可分别独立地进行设计。根据分离原理控制器可按式(5-16)进行设计,观测器可按式(5-27)进行设计。

5.4.2 控制器特性与系统特性

由状态观测器与控制率即式(5-22)、式(5-25)和式(5-30)描述的控制器,如图5-10(b)所示。其输入为 $y(k)$,输出为 $u(k)$,若用传递函数 $D(z)$ 对其进行表达,可将式(5-30)代入式(5-22)中,求得

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\Phi - LC - \mathbf{F}K] \hat{\mathbf{x}}(k) + L y(k) \quad (5-47)$$

对式(5-47)取 z 变换并整理可得到

$$z \hat{\mathbf{X}}(z) - \Phi \hat{\mathbf{X}}(z) + LC \hat{\mathbf{X}}(z) + \mathbf{F}K \hat{\mathbf{X}}(z) = LY(z)$$

即

$$\begin{cases} [z\mathbf{I} - \Phi + LC + \mathbf{F}K] \hat{\mathbf{X}}(z) = LY(z) \\ \hat{\mathbf{X}}(z) = [z\mathbf{I} - \Phi + LC + \mathbf{F}K]^{-1} LY(z) \end{cases} \quad (5-48)$$

由

$$U(z) = -K \hat{\mathbf{X}}(z)$$

有

$$U(z) = -K[z\mathbf{I} - \Phi + LC + \mathbf{F}K]^{-1} LY(z) \quad (5-49)$$

由式(5-49)可得控制器的离散传递函数为

$$D(z) = -\frac{U(z)}{Y(z)} = K[z\mathbf{I} - \Phi + LC + \mathbf{F}K]^{-1} L \quad (5-50)$$

系统对象的离散传递函数由式(5-8)给出,即

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mathbf{F} \quad (5-51)$$

这样,闭环系统的特征方程 $1 + D(z)G(z) = 0$ 可写为

$$1 + [K(z\mathbf{I} - \Phi + LC + \mathbf{F}K)^{-1} L][C(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mathbf{F}] = 0 \quad (5-52)$$

式(5-52)也就是控制器特性与系统特性之间的关系。

5.4.3 带状态观测器的离散系统极点配置

从如图5-10(a)所示的系统中可以看出,基于观测器设计的控制器也可以表达为如图5-10(b)所示的情形,而将图5-10(b)与图4-36相比较可以发现,图5-10(b)左边虚线框内的控制器部分相当于经典传递函数方法设计的控制器(补偿器)。有时也将这种控制器称为状态空间设计的补偿器。这是因为可以在观测器方程中加入控制反馈得到,即

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = [\Phi - \mathbf{F}K - LC] \hat{\mathbf{x}}(k) + L y(k) \\ u(k) = -K \hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (5-53)$$

控制器本身的极点可按下式求得

$$|zI - \Phi + \Gamma K + LC| = 0 \quad (5-54)$$

而不必在状态空间设计中确定。

上面介绍的控制器和观测器特征方程根的位置,实际上也就是闭环系统的极点。这样在4.4.1节中介绍的传递函数设计方法的性能指标同样可以用来帮助选择控制器与观测器根的位置。在工程实际中比较方便的做法是,首先选择控制根,以满足性能指标和执行机构的限制,然后选择观测器的根使它比控制根所对应的运动模态有更快的衰减速度(一般选择快2~6倍)。因此,系统总的响应是由系统中较慢的控制极点的响应来决定的。观测器的快速根意味着观测器的状态能迅速收敛到正确值。观测器响应速度的上限一般由噪声抑制特性和对系统模型误差的灵敏度所决定。

【例5-10】 对于例4-2的机器臂系统,即 $G(s)=1/[s(s+1)]$,按照例5-8的指标要求,即 $\zeta=0.5$,以及 $\omega_n=1$,取 $T=1s$,设计具有观测器与状态反馈的闭环调节系统。

解 带观测器与状态反馈的闭环调节系统可如图5-10(b)所示。根据分离原理,系统与观测器可分别独立地进行设计,即控制器可按式(5-16)进行设计,观测器可按式(5-27)进行设计。在例5-8中已经设计好了反馈控制率 $k_1=0.385, k_2=0.921$ 。接下来需设计观测器。

设计观测器时首先需要确定观测器根的位置。由控制指标有 $r=0.606$,这里取状态观测器的响应速度比闭环系统的响应速度快4倍,即 $r'=r^4=0.606^4 \approx 0.1353$ 。为了简单起见,可设观测器根为实极点,即 $p=0.1353$ 。对于预报全阶观测器,其希望的观测器特征方程为

$$(z-p)^2 = (z-0.1353)^2 = z^2 - 0.27z + 0.0183 = 0 \quad (5-55)$$

按照例5-8的方法比较式(5-33)与式(5-55)的同次幂的系数有

$$\begin{aligned} l_2 - 1.368 &= 0.27 \\ 0.632l_1 - 0.368l_2 + 0.368 &= 0.0183 \end{aligned}$$

解其可得

$$l_1=0.086, \quad l_2=1.098$$

由式(5-22)可得预报观测器为

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L[y(k) - C \hat{x}(k)] \\ &= [\Phi - LC] \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L y(k) \\ &= \begin{bmatrix} 0.368 & -0.086 \\ 0.632 & -0.098 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0.086 \\ 1.098 \end{bmatrix} y(k) \end{aligned}$$

由式(5-50)求取数字控制器的离散传递函数,首先

$$\begin{aligned} [zI - \Phi + LC + \Gamma K] &= \begin{bmatrix} z - 0.1247 & 0.668 \\ -0.49 & z + 0.436 \end{bmatrix} \\ [zI - \Phi + LC + \Gamma K]^{-1} &= \frac{1}{z^2 + 0.31z + 0.273} \begin{bmatrix} z + 0.436 & -0.668 \\ 0.49 & z - 0.1247 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} D(z) &= -\frac{U(z)}{Y(z)} = K[zI - \Phi + LC + \Gamma K]^{-1}L \\ &= \begin{bmatrix} 0.385 & 0.921 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z+0.436}{z^2+0.31z+0.273} & \frac{-0.668}{z^2+0.31z+0.273} \\ \frac{0.49}{z^2+0.31z+0.273} & \frac{z-0.1247}{z^2+0.31z+0.273} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.086 \\ 1.098 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解其可得

$$D(z) = \frac{1.043z - 0.355}{z^2 + 0.31z + 0.273}$$

接下来考查闭环系统的特征方程 $1 + D(z)G(z) = 0$, 即式(5-52), 首先

$$(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1} = \frac{1}{z^2 - 1.368z + 0.368} \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 0.632 & z-0.368 \end{bmatrix}$$

因此

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{F} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

闭环系统特征方程为

$$\begin{aligned} & 1 + D(z)G(z) \\ &= 1 + [\mathbf{K}(z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{LC} + \mathbf{F}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{L}][\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi)^{-1}\mathbf{F}] \\ &= 1 + \frac{1.043z - 0.355}{z^2 + 0.31z + 0.273} \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - 1.368z + 0.368} \\ &= \frac{z^4 - 1.056z^3 + 0.568z^2 - 0.114z + 0.006}{(z^2 + 0.31z + 0.273)(z^2 - 1.368z + 0.368)} = 0 \end{aligned}$$

从上述特征方程可以看出, 其特征根为 $0.2375, 0.0804, 0.3690 \pm j0.4220$, 均在单位圆内, 故控制系统是稳定的。

所设计的具有预报二阶观测器和状态反馈构成的调节系统, 在初始条件 $x_1(0) = x_2(0) = 1$ 时, 其状态与重构的状态如图 5-11 所示。由图 5-11 可知, 在 $1 \sim 2$ 个采样周期内, 状态观测器即可跟上系统。

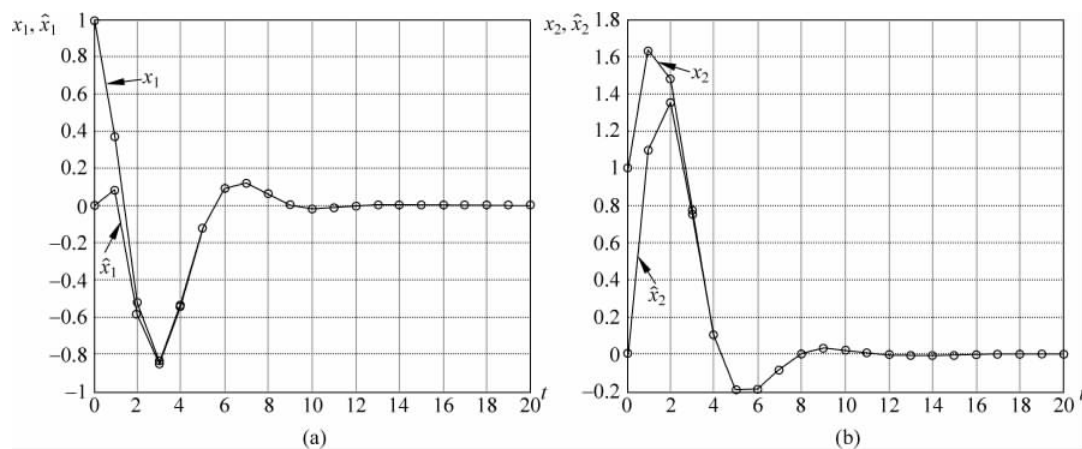


图 5-11 例 5-10 预报观测器系统状态响应图

本题 MATLAB 仿真程序如下。

```
Ts=1;
A=[0.368 0 0.632 1];
B=[0.632 0.368]';
C=[0 1];D=0;
G=ss(A,B,C,D,Ts);
L=[0.385 0.921];
```

```

K=[0.086 1.097]';
A_oc=A-B*L-K*C;
Goc=ss(A_oc,-K,-L,0,Ts);
Gol=G*Goc;
Gcl=feedback(Gol,1,-1);
lfg=dcgain(Gcl);
N=1/lfg;
T_ref=N*Gcl;
t=[0:Ts:20];
r=0*t;
z0=[1 1 0 0]';
[y,t,z]=lsim(T_ref,r,t,z0);
figure(1)
plot(t,z(:,1),'t',z(:,1),'o',t,z(:,3),'t',z(:,3),'o');grid on
figure(2)
plot(t,z(:,2),'t',z(:,2),'o',t,z(:,4),'t',z(:,4),'o');grid on

```

【例 5-11】 如图 5-12(a) 所示的通信卫星, 考虑其单轴姿态调节方式如图 5-12(b) 所示。

若采样周期为 0.1s, 用离散状态空间的方法设计一个控制反馈, 使系统满足超调量小于 16%、上升时间小于 0.5s、过渡时间小于 2.55s 的性能指标; 同时用观测器与控制率构筑一调节器, 并使系统满足上述指标要求。

解 第一步, 被控系统模型的建立。

如果卫星所受微小干扰力矩为 M_D , 调整喷射发动机发出的喷射气流所产生的控制力矩为 $F_C d$, 根据牛顿运动方程有

$$F_C d + M_D = I \ddot{\theta} \quad (5-56)$$

式中, I 为转动惯量; $\ddot{\theta}$ 为角加速度 (θ 为卫星姿态的偏移角); M_D 为干扰力矩; $F_C d$ 为控制力矩。

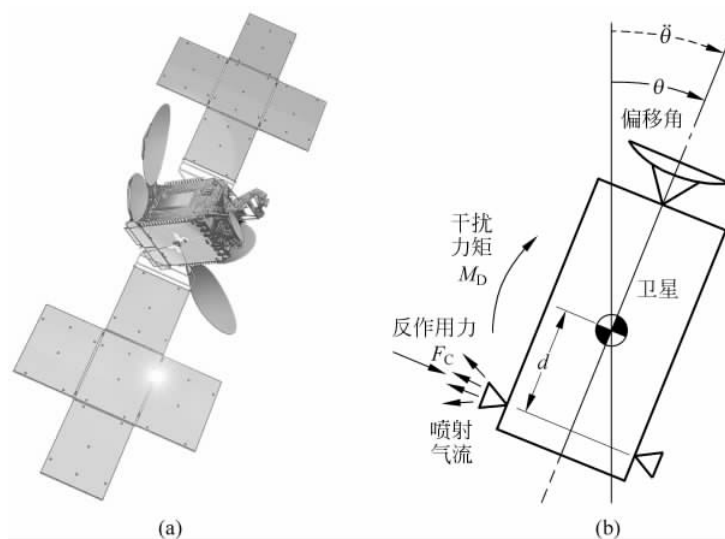


图 5-12 卫星姿态控制系统图

若将微小的干扰力矩忽略,对式(5-56)做拉普拉斯变换可得到控制推力(系统输入)与卫星姿态(系统输出)的传递关系为

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{M_c(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2} \quad (5-57)$$

式中,定义 $F_{cd}=M_c$,为控制力矩(即系统输入)。

由式(5-57)可知,卫星单轴姿态的动态特性是一个双积分对象。为了用离散状态空间的方法进行设计,需将对象的传递函数表达转换为状态空间表达。卫星姿态控制对象框图如图 5-13 所示。在图中设 $y=\theta$,则

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = u \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5-58)$$

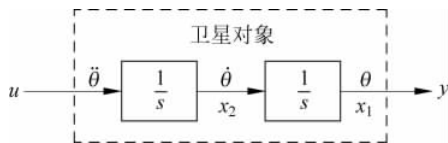


图 5-13 卫星姿态控制对象框图

第二步,若 D/A 转换器为零阶保持器,将被控对象离散化。

依据式(3-60)与式(3-61),用拉普拉斯变换的方法来计算离散模型,这里可利用例 3-12 的计算结果,有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (5-59)$$

式中, T 为采样周期。

第三步,设计指标的转换。对于时域指标超调量小于 16%、上升时间小于 0.5s、过渡时间小于 2.55s,对应于 s 域指标为

$$\begin{aligned} \zeta &= 0.6(1 - M_p) = 0.6(1 - 0.16) \approx 0.5 \\ \omega_n &= 1.8/t_r = 1.8/0.5 = 3.6 \\ \sigma &= 4.6/t_s = 4.6/2.55 \approx 1.8 \end{aligned}$$

这样

$$\omega_d = \frac{\sigma}{\zeta} \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{1.8}{0.5} \sqrt{1 - 0.5^2} \approx 3.12$$

也即在 s 平面上希望根的位置为

$$s = -1.8 \pm j3.12$$

对应于 z 域指标则为

$$r = e^{-\sigma T} = e^{-1.8 \times 0.1} = 0.835$$

$$\theta = \omega_d T = 3.12 \times 0.1 \times 180/\pi \approx 17.9^\circ$$

z 平面上希望根的位置如图 5-14 所示。 z 平面上希望根的多项式表达为

$$(z - 0.835e^{j17.9^\circ})(z - 0.835e^{-j17.9^\circ}) = z^2 - 1.6z + 0.7 = 0 \quad (5-60)$$

第四步,用离散状态空间的方法设计控制反馈向量。

判断系统的能控性。

$$W_c = [\mathbf{F} \quad \Phi\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 0.005 & \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\det W_c = \det \begin{bmatrix} 0.005 & 0.015 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \neq 0$$

可见, W_c 为非奇异矩阵,所以系统能控。

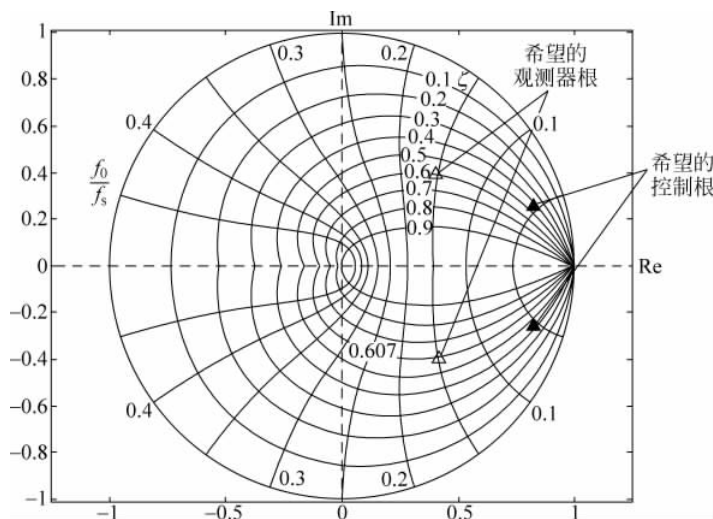


图 5-14 希望根的位置图

由式(5-16)闭环系统的特征方程求取控制矩阵 $\mathbf{K}$, 即

$$\begin{aligned} |z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F}\mathbf{K}| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z-1+(T^2/2)k_1 & (T^2/2)k_2-T \\ Tk_1 & z-1+Tk_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= z^2 + [Tk_2 + (T^2/2)k_1 - 2]z - (1 - e^{-T})k_1 + \\ &\quad (T^2/2)k_1 - Tk_2 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (5-61)$$

这里 $T=0.1\text{s}$, 比较式(5-60)和式(5-61)的同次幂系数可得

$$k_1 = \frac{0.1}{T^2} = \frac{0.1}{0.1^2} = 10$$

$$k_2 = \frac{0.35}{T} = \frac{0.35}{0.1} = 3.5$$

带控制反馈向量的卫星姿态闭环控制系统图如图 5-15 所示。

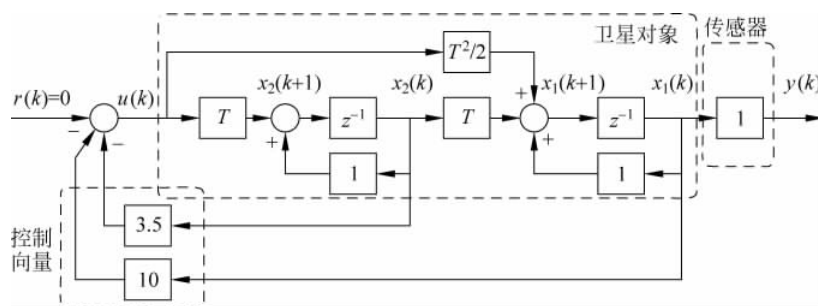


图 5-15 带控制反馈向量的卫星姿态闭环控制系统图

第五步,设计观测器与带观测器和控制率的调节器。

同样,先判断系统的能观性。

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1 \ 0) \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\det W_o = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \neq 0$$

可见, W_o 为非奇异矩阵,所以系统能观。

这里取状态观测器的响应速度比闭环系统的响应速度快 3 倍,即 $r' = r^3 = 0.835^3 \approx 0.582$ 。为了简单起见,可设观测器根为 $z = 0.4 \pm j0.4$,如图 5-14 所示。观测器希望根的多项式表达为

$$(z + 0.4 + j0.4)(z + 0.4 - j0.4) = z^2 - 0.8z + 0.32 = 0 \quad (5-62)$$

这里取预报观测器,其特征方程由式(5-27)给出。

$$\begin{aligned} & |zI - \Phi + LC| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z-1+l_1 & -T \\ l_2 & z-1 \end{bmatrix} \right| = z^2 + (l_1-2)z + Tl_2 + 1 - l_1 = 0 \end{aligned} \quad (5-63)$$

这里 $T=0.1s$,比较式(5-62)与式(5-63)同次幂的系数可得

$$l_1 = 1.2, \quad l_2 = 5.2$$

由式(5-50)可求取带控制率的调节器的离散传递函数为

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{U(z)}{Y(z)} = -K[zI - \Phi + LC + \Gamma K]^{-1}L \\ &= -[10 \ 3.5] \left[\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1^2/2 \\ 0.1 \end{bmatrix} (10 \ 3.5) + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 5.2 \end{bmatrix} (1 \ 0) \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 5.2 \end{bmatrix} \\ &= -30.4 \times \frac{z - 0.825}{z - 0.2 \pm j0.557} \end{aligned}$$

图 5-16 所示是在 $x(0) = [0 \ 1]^T$ 时的受控系统的状态与控制器的输出曲线。

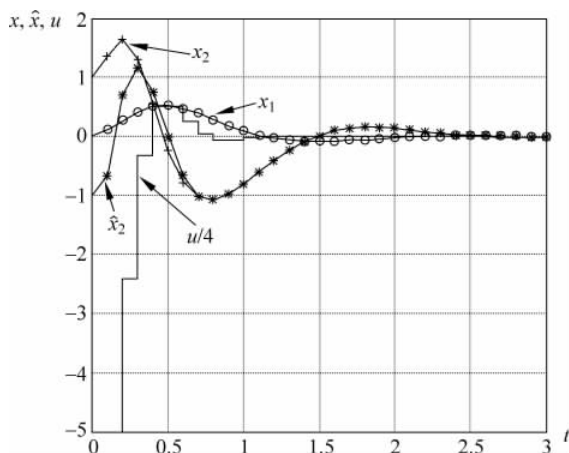


图 5-16 例 5-11 预估观测器系统状态响应图

如果取现时观测器,则其特征方程由式(5-31)给出,按照上面类似的方法即可求出调节器的离散传递函数,即

$$D(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = -25.1 \times \frac{z(z-0.792)}{z-0.265 \pm j0.394}$$

在如图 5-15 所示的卫星姿态控制系统中,如果卫星的姿态信号 x_1 可以测量,只是卫星的内部状态信号(即速度信号 x_2)难以测量时,可以考虑采用降阶观测器。要采用降阶观测器,需将卫星对象模型配成可满足式(5-35)与式(5-36)的形式,即

$$\begin{bmatrix} \Phi_{aa} & \Phi_{ab} \\ \Phi_{ba} & \Phi_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_a \\ \Gamma_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{被测位置状态, } y \\ \text{待估计的速度信号} \end{bmatrix}$$

降阶观测器的反馈矩阵 L_r 可以按照式(5-41)表达的特征方程来求取。由于本对象系统为二阶系统,因此只有一个观测器的根需要求取,该根就是观测器按照角速度收敛时的速率。选取降阶观测器的根比控制器的根快 4 倍,即 $r' = r^4 = 0.835^4 \approx 0.5$ 。为了简单起见,可将降阶观测器根配置在实轴上。由式(5-41)表达的特征方程为

$$|zI - \Phi_{bb} + L_r \Phi_{ab}| = z - 1 + L_r T = \alpha_c(z) = (z - 0.5) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} -1 + L_r T &= -0.5 \\ L_r &= 5 \end{aligned}$$

由式(5-39)有

$$\begin{aligned} \hat{x}_b(k+1) &= \Phi_{bb} \hat{x}_b(k) + \Phi_{ba} x_a(k) + \Gamma_b u(k) + \\ &\quad L_r [x_a(k+1) - \Phi_{aa} x_a(k) - \Gamma_a u(k) - \Phi_{ab} \hat{x}_b(k)] \\ &= \hat{x}_b(k) + 0.1u(k) + 5 \times [y(k+1) - y(k) - 0.005u(k) - 0.1 \hat{x}_b(k)] \\ &= 0.5 \hat{x}_b(k) + 0.075u(k) + 5y(k+1) - 5y(k) \end{aligned} \quad (5-64)$$

注意,控制率为

$$u(k) = -Kx(k) = -[10 \quad 3.5] \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{x}_b(k) \end{bmatrix} = -10y(k) - 3.5 \hat{x}_b(k) \quad (5-65)$$

将式(5-65)代入式(5-64)并整理有

$$z \hat{x}_b(k) = 0.238 \hat{x}_b(k) + 5z y(k) - 5.75 y(k)$$

即

$$\hat{x}_b(k) = \frac{5z - 5.75}{z - 0.238} y(k) \quad (5-66)$$

将式(5-66)代入式(5-65)并整理有

$$u(k) = -10y(k) - 3.5 \times \frac{5z - 5.75}{z - 0.238} y(k) = -\frac{27.5z - 22.405}{z - 0.238} y(k)$$

对上式做 z 变换并整理, 于是可得调节器传递函数为

$$D_r(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = -27.5 \times \frac{z - 0.818}{z - 0.238} \quad (5-67)$$

由降阶观测器和控制反馈向量构成的卫星姿态闭环控制系统如图 5-17 所示。

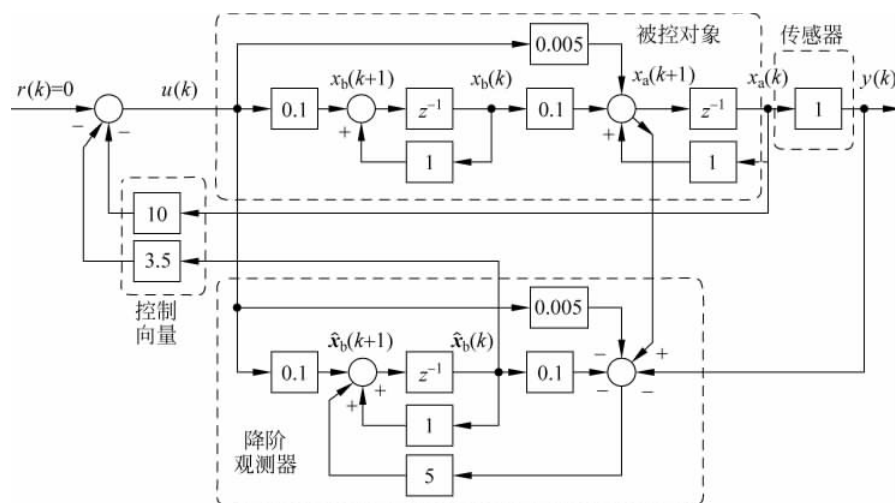


图 5-17 带降阶观测器和控制反馈向量的卫星姿态闭环控制系统图

图 5-18 所示的是带降阶观测器受控系统在 $x(0) = [0 \ 1]^T$ 时的状态与控制器的输出曲线。

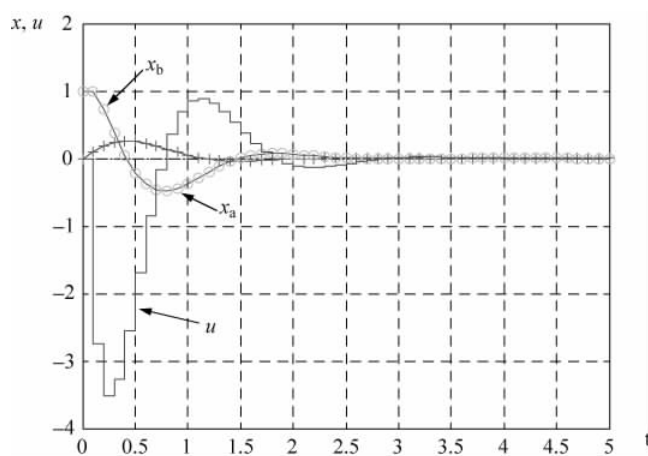


图 5-18 例 5-11 降阶观测器系统状态响应图

式(5-67)表达的调节器与第4章中介绍的超前补偿器非常相似。

5.5 带参考输入的离散系统极点配置

在5.4节中讨论的极点配置是在系统没有参考输入情况下的,也就是说,在系统出现扰动时调节器的作用是使系统的状态趋于零。如果希望系统具备伺服控制的功能,则需对系统加入参考输入。

系统加入参考输入的方式主要有3种,一是参考输入与控制量相比较后加入;二是参考输入与状态变量相比较后加入;三是参考输入与输出相比较后加入,这种方式主要是基于状态观测器的方式。

5.5.1 参考输入与控制量相比较后加入

参考输入与控制量相比较的控制系统图如图5-19所示。由于这种比较方式不仅涉及与输出相关的信息,还会涉及每个状态信息,系统会产生一个非零输出误差。改进的方法是在参考输入处加一个输入参考向量 $\bar{N}$,如图5-20所示。

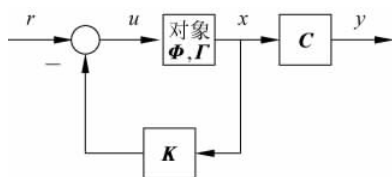


图 5-19 参考输入与控制量相减的控制系统图

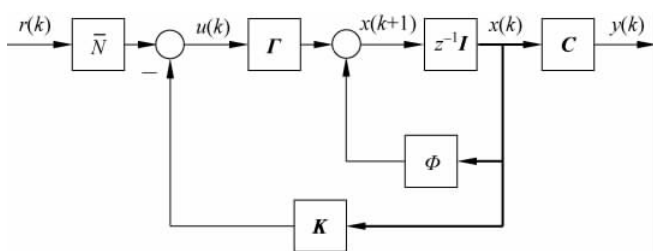


图 5-20 改进后的参考输入与控制量相减的控制系统图

对于单输入-单输出系统 $\bar{N}$ 是标量。由图5-20有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

而

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k) + \bar{N} r(k) \quad (5-68)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma [-\mathbf{K} \mathbf{x}(k) + \bar{N} r(k)] \\ &= \Phi \mathbf{x}(k) - \Gamma \mathbf{K} \mathbf{x}(k) + \Gamma \bar{N} r(k) \end{aligned}$$

即

$$\mathbf{x}(k+1) - \Phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \mathbf{K} \mathbf{x}(k) = \mathbf{F} \mathbf{N}_u r(k)$$

对上式做 z 变换并整理有

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{N}} R(z)$$

代入输出方程可得系统传递函数

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \bar{\mathbf{N}} \quad (5-69)$$

在稳态时,

$$y(k) = r(k) \quad (5-70)$$

由式(5-70)即可求出 $\bar{\mathbf{N}}$ 。

【例 5-12】 对于例 5-8 状态空间表达的机械臂系统,增加参考输入并求 $\bar{\mathbf{N}}$ 。采样周期为 $T=1\text{s}$ 。

解 机械臂系统的状态空间表达为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

按式(5-68)求取系统传递函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= [0 \quad 1] \left[\begin{bmatrix} z-0.368 & 0 \\ -0.632 & z-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} (0.385 \quad 0.921) \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z-0.661}{z^2-0.786z+0.368} & \frac{-0.582}{z^2-0.786z+0.368} \\ \frac{0.49}{z^2-0.786z+0.368} & \frac{z-0.125}{z^2-0.786z+0.368} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ &= \frac{0.368z+0.264}{z^2-0.786z+0.368} \bar{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

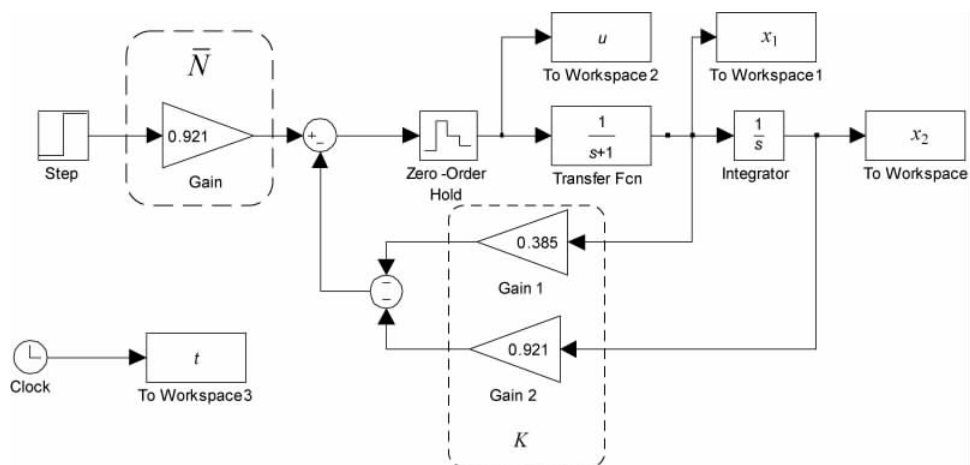
参考输入为单位阶跃时,按式(5-70)求取 $\bar{\mathbf{N}}$ 为

$$\begin{aligned} y(k) = r(k) = 1 &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) H(z) R(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.368z+0.264}{z^2-0.786z+0.368} \frac{z}{z-1} \bar{\mathbf{N}} \\ &= \frac{0.368+0.264}{1-0.786+0.368} \times \bar{\mathbf{N}} = 1 \end{aligned}$$

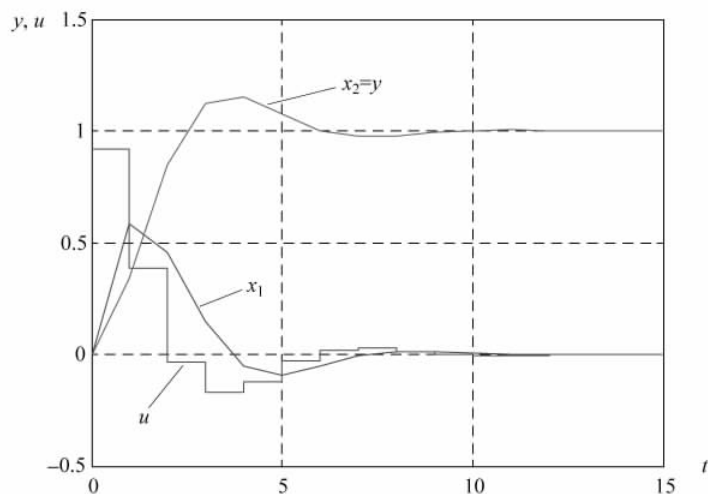
所以 $\bar{\mathbf{N}}=0.921$ 。

系统结构如图 5-21(a)所示,仿真曲线如图 5-21(b)所示。从仿真结果可以看出控制效果较好。

值得注意的是,这里采样周期为 $T=1\text{s}$,在低采样频率时也能实现如此好的控制效果,在第 4 章介绍的常规控制器设计方法是较难实现的。



(a) 系统结构



(b) 仿真曲线

图 5-21 例 5-12 控制系统图

5.5.2 参考输入与状态变量相比较后加入

参考输入与状态变量相比较,需将参考输入引入给每个状态变量,这就需要在输入处配置一个输入向量 $\mathbf{N}_x$ 。另外,由于系统中的每个状态变量值是不会相同的,这时系统也会产生一个非零输出误差(尤其是 0 型系统更是如此)。解决的方法是将参考输入也加给控制输出,这时还需引入一个输入参考向量 $\mathbf{N}_u$,控制系统图如图 5-22 所示。

对于离散状态空间系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k)$$

在稳态时

$$y_{ss} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{ss}$$

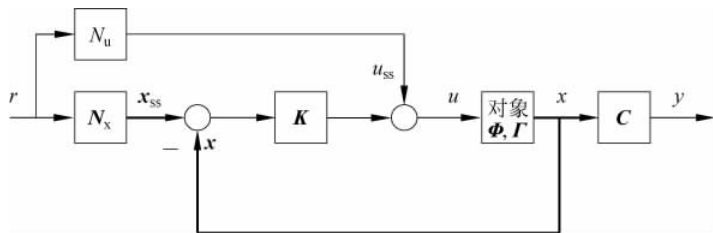


图 5-22 参考输入与状态变量相减的控制系统图

$$\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{x} = \mathbf{N}_x \mathbf{r}_{ss}$$

所以

$$\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C} \mathbf{N}_x \mathbf{r}_{ss} = \mathbf{r}_{ss}$$

即

$$\mathbf{C} \mathbf{N}_x = \mathbf{I} \quad (5-71)$$

另外,在稳态时还有 $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k)$, 则

$$\mathbf{x}_{ss} = \Phi \mathbf{x}_{ss} + \Gamma u_{ss}$$

$$\mathbf{x}_{ss} = \Phi \mathbf{x}_{ss} + \Gamma \mathbf{N}_u \mathbf{r}_{ss}$$

所以

$$(\Phi - \mathbf{I}) \mathbf{x}_{ss} + \Gamma \mathbf{N}_u \mathbf{r}_{ss} = 0$$

或

$$(\Phi - \mathbf{I}) \mathbf{N}_x \mathbf{r}_{ss} + \Gamma \mathbf{N}_u \mathbf{r}_{ss} = 0 \quad (5-72)$$

由式(5-71)与式(5-72)有

$$\begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

由此即可求出

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5-73)$$

从图 5-22 可以看出,由式(5-73)求出 $\mathbf{N}_u$ 与 $\mathbf{N}_x$ 后,控制输出为

$$u(k) = \mathbf{N}_u \mathbf{r}(k) + \mathbf{K}[\mathbf{N}_x \mathbf{r}(k) - \mathbf{x}(k)] = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k) + (\mathbf{N}_u + \mathbf{K} \mathbf{N}_x) \mathbf{r}(k) \quad (5-74)$$

在式(5-74)中,如果令 $\mathbf{N}_u + \mathbf{K} \mathbf{N}_x = \bar{\mathbf{N}}$, 则式(5-74)与式(5-68)相同,这就是说也可以用 $\mathbf{N}_u$ 与 $\mathbf{N}_x$ 去求 $\bar{\mathbf{N}}$ 。

【例 5-13】 对于例 5-8 状态空间表达的机械臂系统,按照参考输入与状态变量相比较的方式增加参考输入,并求 $\mathbf{N}_u$ 与 $\mathbf{N}_x$ 。采样周期为 $T=1\text{s}$ 。

解 按式(5-73)求取

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{I} & \Gamma \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.368 & 0) - (1 & 0) & (0.632) \\ 0.632 & 1 & 0.368 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.632 & 0 & 0.632 \\ 0.632 & 0 & 0.368 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

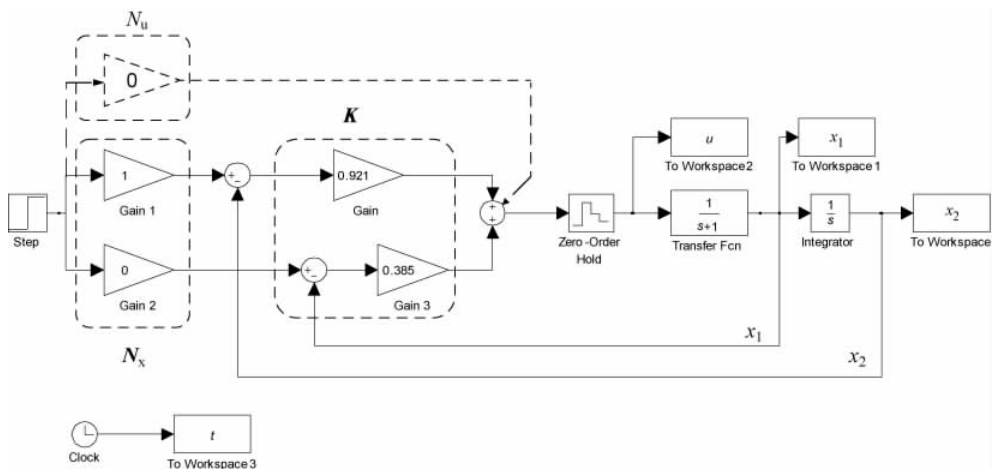
$$\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_u = 0$$

系统结构如图 5-23(a)所示,仿真曲线如图 5-23(b)所示。

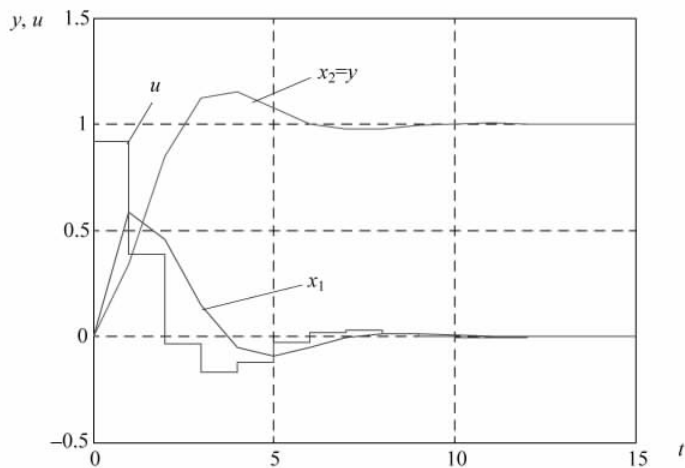
在已求出 N_u 与 N_x 时,用式 $N_u + \mathbf{K}N_x = \bar{N}$ 求 $\bar{N}$ 。

$$\bar{N} = N_u + \mathbf{K}N_x = (0) + (0.385 \quad 0.921) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.921$$

同样也可得到图 5-21(a)所示的系统结构。



(a) 系统结构



(b) 仿真曲线

图 5-23 例 5-13 控制系统图

从仿真结果可以看出控制效果较好,同样这也是低采样频率的控制系统。

5.5.3 参考输入与输出相比较后加入

参考输入与输出相比较后加入方式是基于状态观测器的,也称为输出误差命令方式(即 $e=y-r$),这种方式与第4章中介绍的反馈系统的结构极为相似。在这种方式中,调节器位于前馈通道,系统结构如图5-10(b)所示。

【例 5-14】 对于例 5-10 带状态观测器的机械臂系统加参考输入,并仿真。采样周期为 $T=1\text{s}$ 。

解 带状态观测器的控制器已在例 5-10 中求出,系统结构如图 5-24(a)所示,仿真曲线如图 5-24(b)所示。

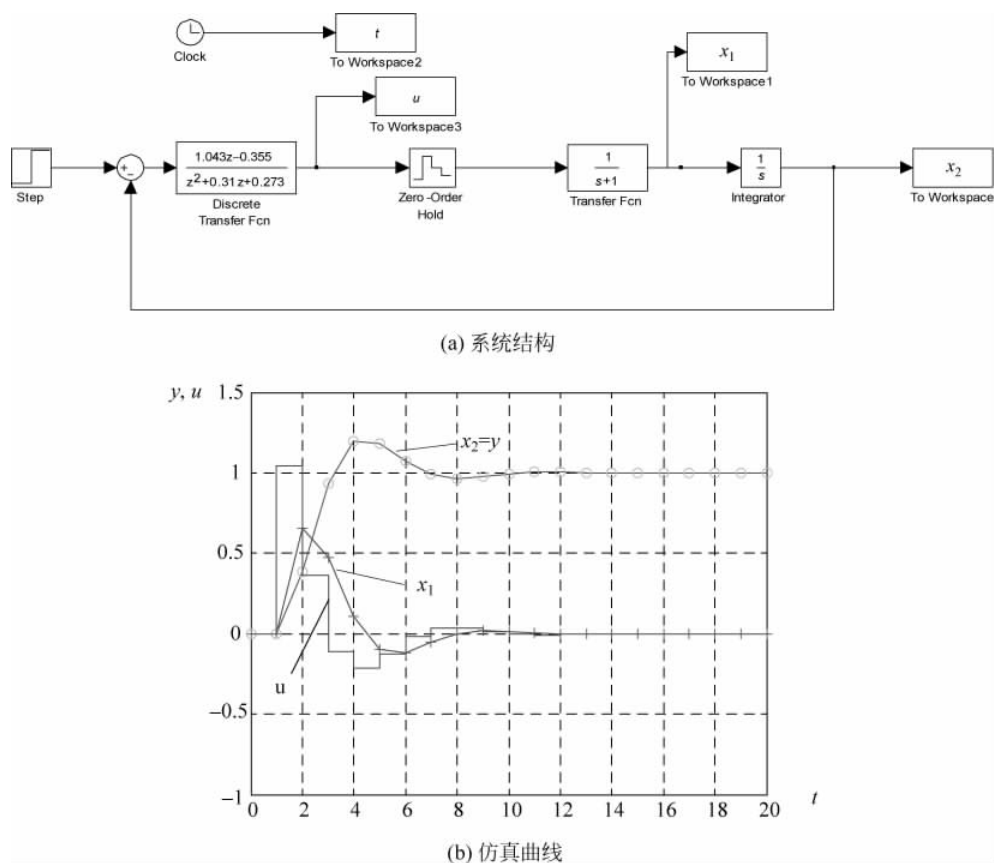


图 5-24 例 5-14 控制系统图

5.5.4 积分控制

在伺服系统中,为消除输出对参考输入的跟踪误差,或者是为消除输出对扰动输入所产生的误差,通常需要引入积分控制。引入积分控制时,采用前向近似的积分表达相对比较简单。积分的前向近似表达为

$$\frac{1}{s} \Rightarrow \frac{T}{z-1}$$

前向近似积分的传递函数可写为

$$\frac{X_1(z)}{R'(z)} = \frac{T}{z-1}$$

对应的差分方程为

$$x_1(k+1) = x_1(k) + Tr'(k)$$

该差分方程的方框图如图 5-25 所示。

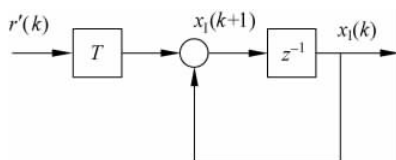


图 5-25 积分器方框图

积分器一般加在前向通道。由图 5-25 可以看出,引入积分器以后,系统的状态维数将增加一维。系统的反馈控制率也要重新考虑,积分器上同样也要引入增益。为简单起见,可将积分增益与积分环节的采样周期一并考虑,记为 K_1 。此时闭环系统图如图 5-26 所示。

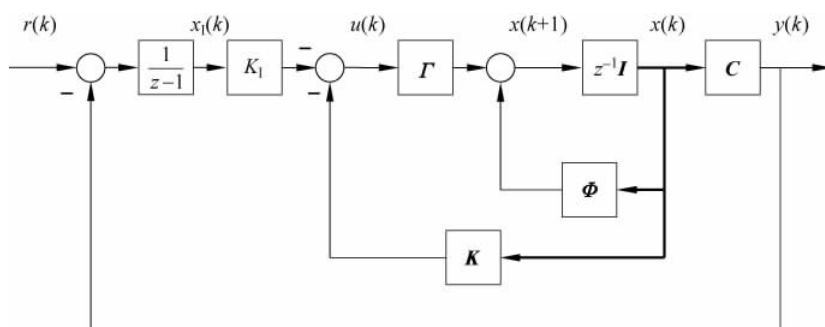


图 5-26 带积分控制的状态空间系统图

由图 5-26 可知,系统的控制增益分别为

$$\mathbf{K} = (k_1 \quad k_2)$$

$$\mathbf{K}_1 = (k_1)$$

因此

$$u(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) - \mathbf{K}_1x_1(k)$$

将上式代入系统状态方程中有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \\ &= \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma[-\mathbf{K}\mathbf{x}(k) - \mathbf{K}_1x_1(k)] \\ &= [\Phi - \Gamma\mathbf{K}]\mathbf{x}(k) - \Gamma\mathbf{K}_1x_1(k) \end{aligned} \quad (5-75)$$

而积分器的状态方程可写为

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + Tr'(k) \\ &= x_1(k) + T[r(k) - y(k)] \end{aligned}$$

若取 $T=1$, 将上式整理有

$$x_1(k+1) = -\mathbf{C}x(k) + x_1(k) + r'(k) \quad (5-76)$$

将式(5-75)与式(5-76)联立有

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{F}\mathbf{K} & -\mathbf{F}\mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = [\mathbf{C} \ 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix}$$

对上式做 z 变换有

$$z \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{X}_I(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{F}\mathbf{K} & -\mathbf{F}\mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{X}_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R(z)$$

也即

$$\begin{bmatrix} z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F}\mathbf{K} & \mathbf{F}\mathbf{K}_I \\ \mathbf{C} & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ \mathbf{X}_I(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} R(z)$$

考虑输出方程后可得系统特征方程为

$$\begin{vmatrix} z\mathbf{I} - \Phi + \mathbf{F}\mathbf{K} & \mathbf{F}\mathbf{K}_I \\ \mathbf{C} & z-1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5-77)$$

这里也可将系统状态方程和输出方程一并转换为传递函数表达, 即

$$H(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathbf{C}'(z\mathbf{I} - \Phi')^{-1}\mathbf{N}' \quad (5-78)$$

式中

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \Phi - \mathbf{F}\mathbf{K} & -\mathbf{F}\mathbf{K}_I \\ -\mathbf{C} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}' = [\mathbf{C} \ 0], \quad \mathbf{N}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

【例 5-15】 对于例 5-8 状态空间机械臂系统加积分控制, 并重新设计控制反馈。系统设计指标同例 5-8, 采样周期为 $T=1\text{s}$ 。

解 系统设计指标为

$$z = 0.607e^{\pm j49.9^\circ}$$

取积分器根的位置为 $z=0.5$, 这样系统指标表达为

$$(z-0.5)(z^2-0.786z+0.368) = z^3-1.286z^2+0.761z-0.184=0$$

系统离散模型为

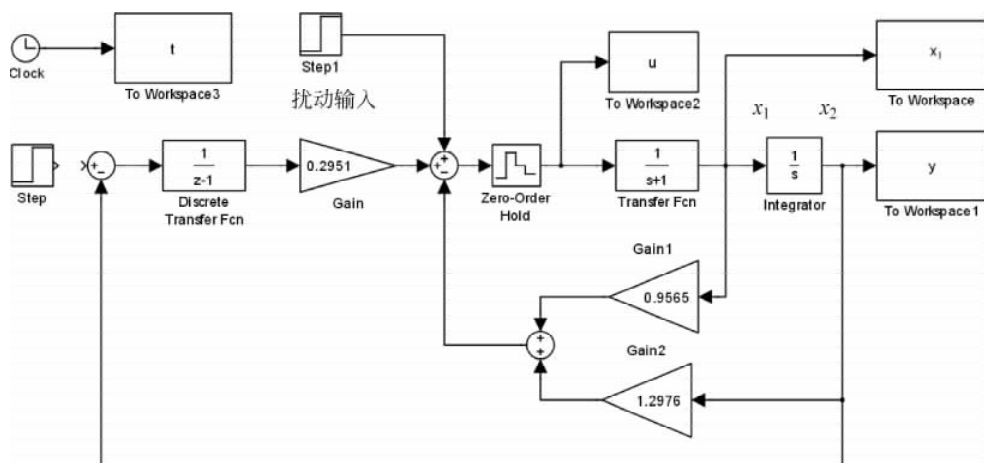
$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

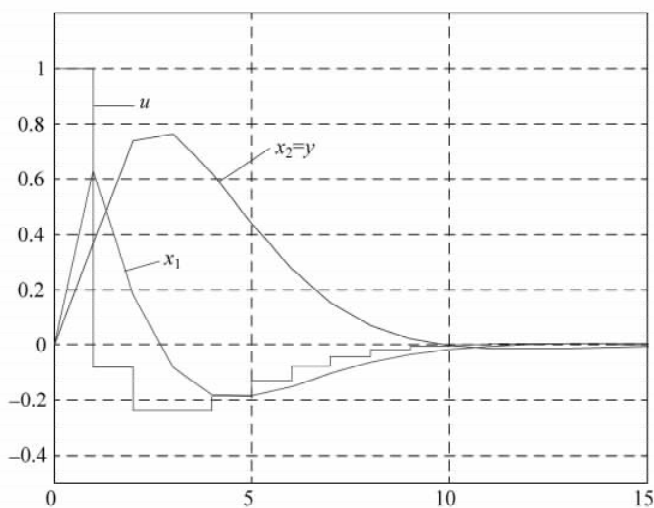
由式(5-77)特征方程有

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.368 & 0 \\ 0.632 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2) & \begin{pmatrix} 0.632 \\ 0.368 \end{pmatrix} (k_I) \\ \mathbf{C} & z-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z-0.368+0.632k_1 & 0.632k_2 & 0.632k_I \\ -0.632+0.368k_1 & z-1+0.368k_2 & 0.368k_I \\ 0 & 1 & z-1 \end{vmatrix}$$



(a) 系统结构



(b) 仿真曲线

图 5-28 带积分器的控制系统对扰动抑制作用图

5.6 本章小结

本章内容主要包括状态空间系统的数字控制器设计,状态空间系统的观测器设计,以及状态空间系统的调节器设计等。通过本章内容,读者主要学习了以下内容。

- (1) 状态空间方法是建立在由 n 个一阶微分方程或差分方程描述系统的基础之上的。
- (2) 离散时间系统状态空间方程的求解可用递推方法,也可用 z 变换方法。
- (3) 脉冲传递函数矩阵也揭示了状态空间方程与脉冲传递函数之间的关系。
- (4) 对于单输入-单输出离散时间状态空间系统的稳定性问题,可将其转换成传递函数,再按 4.2 节中介绍的方法进行判断。
- (5) 极点配置就是通过状态变量的反馈使闭环系统的全部极点配置到希望的位置。并非所有系统都能对其全部极点进行配置,这就是系统的能控性问题。同样,也不是所有系统

都具有可观性的,这就是系统的能观性问题。

(6) 将连续时间状态空间系统采样得到的离散时间状态空间系统,其系统矩阵和输入矩阵的计算均与采样周期有关。

(7) 离散状态空间系统的极点配置方法包括系数匹配法、转移矩阵法、艾克曼公式法和MATLAB直接计算法等。

(8) 状态观测器根据其配置结构分为开环状态观测器和闭环状态观测器。根据其估计的时刻分为预估状态观测器和现时状态观测器。根据估计对象的阶数分为全阶状态观测器和降阶状态观测器。

(9) 观测器的设计与控制率的设计方法相同。

(10) 系统的极点是由控制器极点和观测器极点组成的。控制器-观测器组合系统称为调节器。

(11) 闭环系统的动态特性与观测器的动态特性无关,系统与观测器可分别独立地进行设计。控制器可按式(5-16)进行设计,而观测器可按式(5-27)进行设计。

(12) 如果对状态空间系统加入参考输入即可构成伺服系统。

习题 5

5.1 写出脉冲传递函数系统

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z+1}{z^2+1.3z+0.4}$$

的能控标准型状态空间表达和能观标准型状态空间表达。

5.2 求下述系统

$$y(k+2) + y(k+1) + 0.16y(k) = u(k+1) + 2u(k)$$

的状态空间表达。

5.3 下列状态空间系统是否能控与能观?

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [-1 \quad 0.5] \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

5.4 若系统对象的状态方程表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma u(k) \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

其状态反馈为 $u(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k)$, 求闭环系统的特征方程。

5.5 用前向矩阵法求下列状态方程的离散等价。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

5.6 已知系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 1] \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

确定状态反馈 $\mathbf{K}$, 使闭环极点位于 0.1 和 0.25 处。

5.7 对于下列状态方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00484 \\ 0.0952 \end{bmatrix} u(k)$$

用极点配置的方法求增益矩阵 $\mathbf{K}$, 使闭环系统特征方程在状态回零时的阻尼比为 0.46、时间常数(时间常数 $\tau=1/\sigma$)为 0.5s。

5.8 习题 4.6 的燃烧室控制系统(图 4-79), 在忽略扰动输入时, 如果采样周期 $T=1\text{s}$, 且令控制器 $D(z)=1$, 则系统开环传递函数为

$$(0.04) \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{2}{s(s+0.5)}\right\} = \frac{0.04147}{z-0.7408}$$

- (1) 画出对象与传感器的信号流程图, 写出该系统的状态方程。
- (2) 求闭环系统的时间常数 $\tau(\tau=1/\sigma)$ 。
- (3) 用极点配置的方法设计控制反馈 $\mathbf{K}$, 使闭环系统的时间常数 $\tau=1\text{s}$ 。
- (4) 说明在(3)中求出的 $\mathbf{K}$ 能满足希望的闭环系统特征方程。
- (5) 画出系统实现的方框图。

参 考 文 献

- [1] Gene F Franklin, 等. 动态系统的数字控制[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [2] Charles L Phillips, 等. 反馈控制系统[M]. 5 版. 北京: 科学出版社, 2012.
- [3] Katsuhiko Ogata. 离散时间控制系统[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [4] Charles L Phillips, 等. 数字控制系统——分析与设计[M]. 3 版. New Jersey: Prentice-Hall, 1995.
- [5] 徐丽娜. 数字控制——建模与分析、设计与实现[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2014.
- [6] Katsuhiko Ogata. 现代控制系统[M]. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [7] 冯培埏. 计算机控制技术[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2002.
- [8] Karl J Astrom, 等. 计算机控制系统——原理与设计[M]. 3 版. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [9] Richard C Dorf, 等. 现代控制系统[M]. 10 版. 北京: 清华大学出版社, 2008.