

5.1 重点内容

5.1.1 概述

1. 数字滤波器

数字滤波器用有限精度算法进行信号滤波处理,它利用离散时间 LTI 系统的特性对输入序列的波形或频谱进行加工处理,将输入数字序列通过一定的运算后转变为输出数字序列,从而达到改变信号频谱的目的。

数字滤波器可以用时域输入输出差分方程、单位采样脉冲响应以及系统函数等表示。研究实现方法,即运算结构时,一般采用方框图或信号流图表示系统。

2. 表示方法

数字滤波器的各种数学等效描述从不同的角度指出了其特性。

(1) 时域 I/O 差分方程:

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (5.1.1)$$

其中, $x(n)$ 、 $y(n)$ 分别为数字系统的输入、输出序列; $\{a_i, i=1, 2, \dots, N; b_j, j=0, 1, 2, \dots, M\}$ 为常数,也称为数字系统的结构参数。

(2) 卷积方程:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{\infty} h(i)x(n-i) \quad (5.1.2)$$

其中, $x(n)$ 、 $y(n)$ 分别为数字系统的输入、输出序列; $h(n)$ 为数字系统的单位采样脉冲响应。

(3) 单位采样脉冲响应:

$$h(n) = \{h(0), h(1), h(2), \dots, h(M), \dots\} \quad (5.1.3)$$

(4) 系统函数:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (5.1.4)$$

(5) 频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (5.1.5)$$

(6) 零点、极点分布:

$$\{z_j, j = 1, 2, \dots, M; \quad p_i, i = 1, 2, \dots, N\}$$

零点 z_j 、极点 p_i 可通过求解系统函数 $H(z)$ 分子多项式、分母多项式的零点得到。

(7) 网络结构图和相应的(状态变量分析)样值处理算法。

3. 分类

数字滤波器按其单位采样脉冲响应 $h(n)$ 的时间特性,分为两类:无限长脉冲响应(IIR)滤波器和有限长脉冲响应(FIR)滤波器。

IIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 包含无限个非零值,持续时间为无限长。时域 I/O 差分方程(或系统函数的分母多项式)中至少有一个系数 a_i 不为零,这类滤波器存在输出到输入的反馈,需要使用递归计算方法实现,一般表示如下。

时域 I/O 差分方程:

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

系统函数:

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 只包含有限个非零值,持续有限长时间。时域 I/O 差分方程(或系统函数的分母多项式)中系数 $a_i = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$,一般结构中没有输出到输入的反馈,主要为非递归型结构,具体表示如式(5.1.6)和式(5.1.7)所示。

时域 I/O 差分方程:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (5.1.6)$$

系统函数:

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (5.1.7)$$

5.1.2 信号流图表示网络结构

1. 基本运算单元

数字系统的基本运算单元有 3 种,即单位延迟器、常数乘法器和加法器。其方框图法和信号流图法表示如图 5-1 所示。

2. 信号流图

图 5-2 给出了一个信号流图的示意。相关术语总结如下。

(1) 节点:图 5-2(b)信号流图中圆点称为节点,每一节点都对应一个变量,或者代表一个信号。

(2) 支路:连接两个节点的有向线段称为支路。

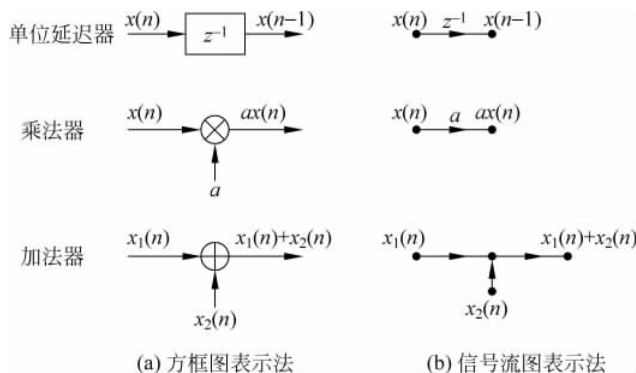


图 5-1 基本运算的方框图表示及信号流图表示

- (3) 源节点：只有输出支路与之相连的节点，称为源节点或输入节点。
- (4) 吸收节点：只有输入支路与之相连的节点，称为吸收节点或输出节点。

3. 基本信号流图

基本信号流图必须满足以下条件：

- (1) 信号流图中所有支路都是基本的，即支路增益是常数或者是 z^{-1} 。
- (2) 信号流图环路中必须存在延迟支路。
- (3) 信号流图中节点和支路的数目是有限的。

图 5-2(a) 是基本信号流图，图中有两个环路，环路增益分别为 $-a_1 z^{-1}$ 和 $-a_2 z^{-2}$ ，且环路中都有延时支路。而图 5-2(b) 不是基本信号流图，它不能决定一种具体的算法，不满足基本信号流图的条件。

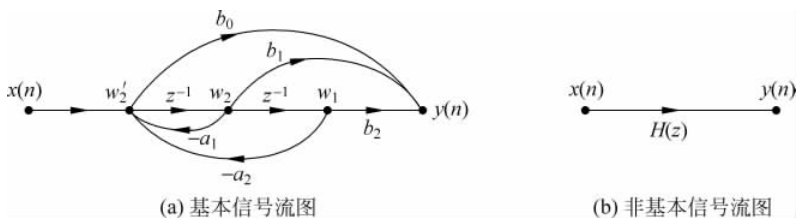


图 5-2 信号流图

5.1.3 IIR 滤波器的基本网络结构

1. 直接型 I

1) 二阶数字滤波器

系统函数一般如式(5.1.8)所示。

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (5.1.8)$$

对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) \quad (5.1.9)$$

式(5.1.8)所示二阶 IIR 滤波器直接型 I 结构如图 5-3 所示，有如下特点：

- (1) 一个相加器把系统时域 I/O 差分方程右边的所有项加起来。加法器的输出是 $y(n)$ 。

(2) 前向分支加权乘因子 $b_j (j=0, 1, 2)$ 对应于 $H(z)$ 的分子多项式系数；在时域 I/O 差分方程中是与输入 $x(n)$ 有关的非递归项。

(3) 后向分支加权乘因子 $-a_i (i=1, 2)$ 对应于 $H(z)$ 的分母多项式非零次幂项系数；在时域 I/O 差分方程中是与输出 $y(n)$ 有关的反馈(递归)项。

(4) 已知直接型 I 滤波器, 给定输入序列 $x(n)$, 求系统的响应 $y(n)$, 可用样值迭代处理方法: 数字滤波器按设定的算法, 一次处理一个采样值 $x(n)$, 同时送出一个相应的输出样值 $y(n)$ 。

特别提示: 直接型 I 网络结构图中反馈加权乘因子是系统函数分母多项式非零次幂项系数的负数。

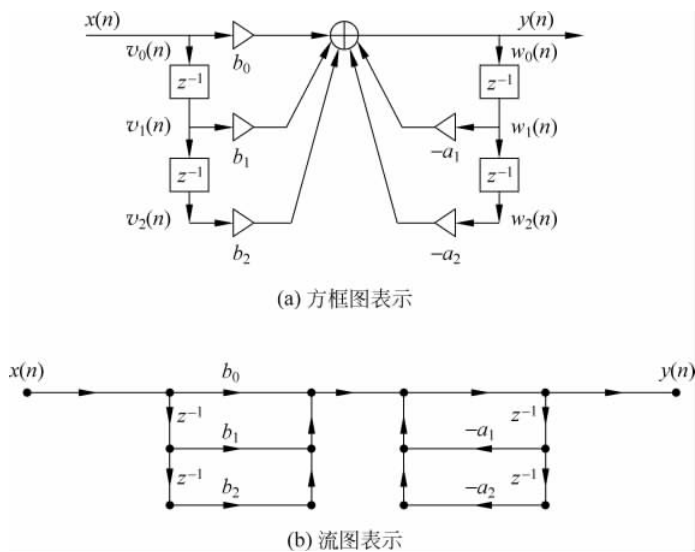


图 5-3 IIR 滤波器直接型 I 结构

2) 任意阶数字滤波器

一般系统函数如式(5.1.10)所示。

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (5.1.10)$$

滤波器的阶数为 $\max\{M, N\}$, 对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) \quad (5.1.11)$$

当 $M=N$ 时, 就是 N 阶 IIR 滤波器, 其直接型 I 的网络结构, 只要在二阶 IIR 滤波器网络, 即如图 5-2 所示的结构下面加更多的延迟环节和相应乘法器即可。

2. 直接型 II (典型型)

1) 二阶数字滤波器

式(5.1.8)所示的数字滤波器系统函数 $H(z)$ 可等效地写成:

$$H(z) = \frac{1}{D(z)} \cdot N(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot [b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}] \quad (5.1.12)$$

可整理对应的时域 I/O 差分方程,得到式(5.1.13)。

$$y(n) = \{b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)\} + \{-a_1y(n-1) - a_2y(n-2)\} \quad (5.1.13)$$

根据式(5.1.12)所示的系统函数,可构造直接型 II (典型型)的二阶滤波器方框图,如图 5-4(a)所示,信号流图如图 5-4(b)所示。

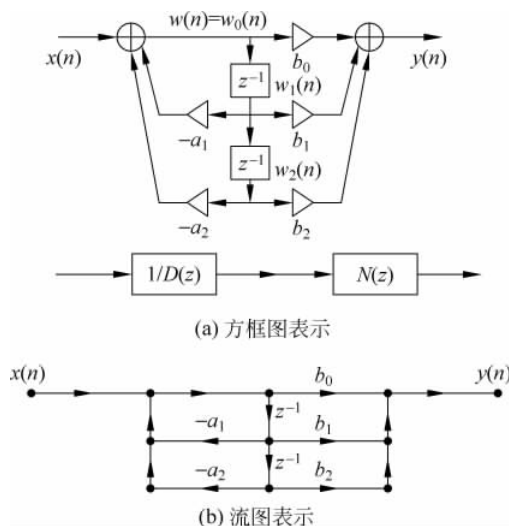


图 5-4 IIR 滤波器直接型 II 结构

2) 任意阶数字滤波器

一般系统函数 $H(z)$ 可表示为

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_Nz^{-N}}$$

阶数为 $\max\{M, N\}$ 。

对应的时域 I/O 差分方程为:

$$y(n) = \{-a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \cdots - a_Ny(n-N)\} + \{b_0x(n) + b_1x(n-1) + \cdots + b_Mx(n-M)\}$$

当 $M=N$ 时,就是 N 阶滤波器,其直接型 II 的网络结构,只要在二阶滤波器典型网络(如图 5-4 所示的框图)下面加更多的延迟环节和相应乘法器即可。

3. 级联型

1) 二阶节

实际物理可实现的系统函数 $H(z)$,是实系数的多项式的分式。相应的零点和极点是实数或共轭对。共轭对的零点、极点对应着实系数二次多项式。所以级联型的滤波器单级基本结构是“二阶滤波器”,称为“二阶节”(second order section, SOS),可用直接型 I 或典型型实现。

式(5.1.14)给出了一般 L 级 SOS 级联的数字滤波器的系统函数。

$$H(z) = A \prod_{i=1}^L H_i(z) \quad (5.1.14)$$

其中, $H_i(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}, i=1, 2, \dots; L$ 是第 i 级二阶节的系统函数; A 是归一化常数。

因为可把实际一阶系统看作二阶节的特例,所以式(5.1.14)所示的系统函数 $H(z)$ 分子分母多项式的实际阶数小于或等于 $2L$ 。级联型实现的数字滤波器方框图如图 5-5 所示。

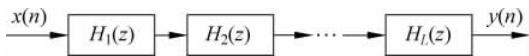


图 5-5 级联型 $H(z)$ 方框图

2) 级联型滤波器结构特点

- (1) 硬件实现时,可用一个二阶节“时分复用”,节省存储单元。
- (2) 因为每一二阶节都对应一对共轭零点和一对共轭极点,所以可单独调整滤波器的零点、极点,从而方便地调整滤波器的频率响应。
- (3) 级联次序不同,运算误差不同,且极间电平移动不同。极间输出电平太大,则滤波器运算可能溢出;太小,则输出信号的信噪比(SNR)太小。

4. 并联型

1) 结构

把系统函数表示为实系数二阶多项式部分因式之和,则总系统函数是各二阶节表示的子系统的并联。

式(5.1.15)给出了 L 个 SOS 并联的数字滤波器的系统函数。

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_L(z) \tag{5.1.15}$$

其中, $H_i(z)$ 的系统函数如式(5.1.16)所示。每个 $H_i(z)$ 对应着一对共轭复极点,该 SOS 可用直接型 I 或典型型实现。

$$H_i(z) = \frac{b_{i0} + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}} \tag{5.1.16}$$

式(5.1.15)所示系统输出的 z 变换可表示为

$$Y(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)X(z) + \dots + H_L(z)X(z) \tag{5.1.17}$$

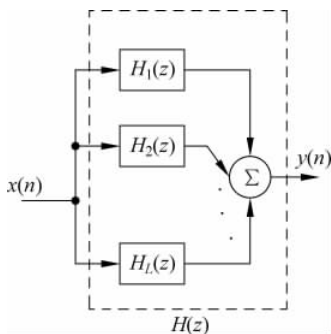


图 5-6 并联型 $H(z)$ 方框图

式(5.1.17)表明,输入序列 $x(n)$ 通过并联的 L 个子滤波器后,在输出端累加可得到总输出 $y(n)$ 。并联型实现的数字滤波器方框图如图 5-6 所示。

2) 并联型滤波器特点

- (1) 运算速度快,各子网络对输入同时计算,较之直接型、级联型结构,运算速度最高。
- (2) 可单独调整极点。
- (3) 各基本节的误差互不影响,较之直接型、级联型结构,累积运算误差最小。

5. 转置型

转置理论:把基本信号流图网络中所有支路的方向颠倒,且将输入 $x(n)$ 和输出 $y(n)$ 位置互换,则转置后结构的输入输出关系和原来的一样(系统函数保持不变)。

图 5-4(b)的直接型 II 结构,转置后的网络如图 5-7 所示,画成输入在左方,输出在右方

的习惯形式,则如图 5-8 所示。

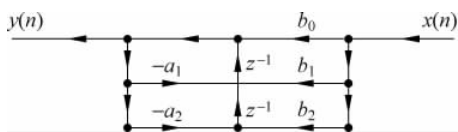


图 5-7 直接型 II 结构的转置

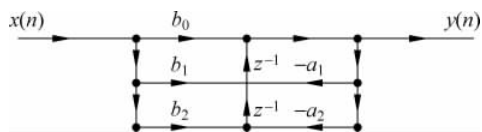


图 5-8 输入在左,输出在右

5.1.4 FIR 滤波器的基本结构

1. 直接型 FIR 滤波器

时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) \quad (5.1.18)$$

直接型的 FIR 滤波器结构图如图 5-9 所示。

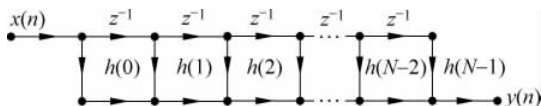


图 5-9 FIR 滤波器直接型结构

2. 级联型 FIR 滤波器

当 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 为实序列,则其系统函数非零的零点必然是实数或共轭对。如果把系统函数共轭成对的零点组合,对应着实系数的二次多项式,故 FIR 滤波器的系统函数可表示为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \quad (5.1.19)$$

其中, $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ 表示取 $\frac{N}{2}$ 的整数部分。 N 为奇数时, FIR 滤波器的级联结构如图 5-10 所示。

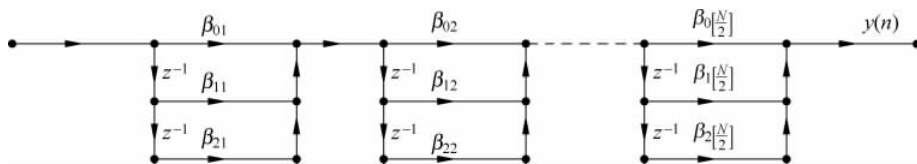


图 5-10 FIR 滤波器的级联型结构(N 为奇数)

3. 线性相位型 FIR 滤波器

1) 线性相位特性

对不同频率 ω_i 的输入正弦波信号,产生的输出相移 φ_i 和正弦波的频率成线性关系,即满足式(5.1.20),则称这个滤波器具有线性相位特性。

$$\varphi_i = k\omega_i \quad (5.1.20)$$

2) 信号无频率失真

对于有线性相位特性的滤波器,当滤波器通带内通过多个频率信号时,输出各频率分量

的瞬时相位均满足：

$$\varphi_T(t) = \omega_i t + k\omega_i = \omega_i(t + k) \quad (5.1.21)$$

由式(5.1.21)可见,线性相移特性的斜率 k 可看成是所有输入频率分量经过该滤波器后,都产生了同样的时间延迟。因此线性相位滤波器通带内的信号传输无频率失真。

3) 其他结构特点

单位采样脉冲响应长度为 N 的线性相位因果 FIR 滤波器,单位采样脉冲响应 $h(n)$ 是实的,相对 $\frac{N-1}{2}$ 一定是奇(或偶)对称的(N 为奇数时具有实际的对称中心点, N 为偶数时是虚的对称点)。网络结构只需 $\frac{N}{2}$ (N 为偶数)或 $\frac{N+1}{2}$ (N 为奇数)个乘法器进行相应的乘法运算。线性相位的 FIR 系统的结构如图 5-11 所示。

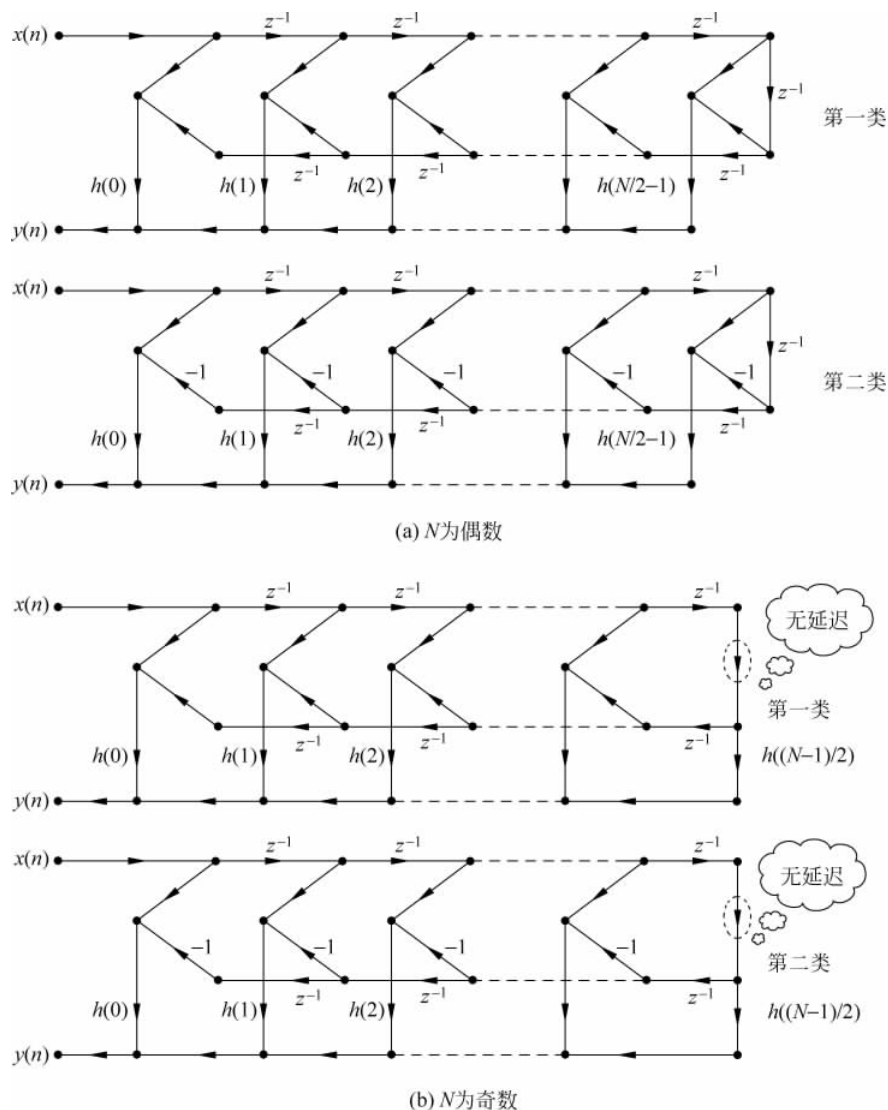


图 5-11 线性相位的 FIR 系统的结构

4. 频率采样型 FIR 滤波器

在满足频域采样定理的条件下,可以用 FIR 滤波器的系统频率响应在 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样值 $H(k)$, 重构数字系统的系统函数 $H(z)$, 如式(5.1.22)所示。

$$H(z) = \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.1.22)$$

其中,

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

式(5.1.22)表明: $H(z)$ 由(梳状)FIR 滤波器 $H_c(z) = (1 - z^{-N})$ 与 IIR 滤波器级联而成。这里的 IIR 滤波器是 N 个一阶网络 $H_k(z)$ 的并联:

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

每个 $H_k(z)$ 均是一个无损耗的 IIR 谐振器, 谐振频率分别是数字域频率 $\frac{2\pi}{N}k$ rad。根据式(5.1.22), 可构造频率采样型 FIR 滤波器, 其结构如图 5-12 所示。

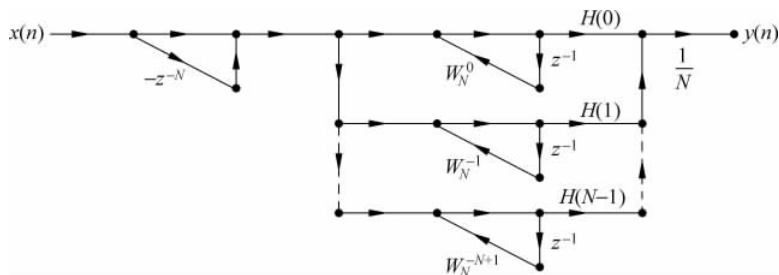


图 5-12 频率采样型 FIR 滤波器结构

1) 梳状陷波滤波器(notch filter)

一般梳状滤波器的系统函数如式(5.1.23)所示。

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{1 - a^N z^{-N}} \quad (5.1.23)$$

对应式(5.1.23)中参数 r, a 的不同取值情况, 下面介绍两种典型的梳状滤波器。

(1) (梳状)FIR 陷波滤波器。式(5.1.23)中令 $a=0, r=1$, 即得梳状 FIR 陷波滤波器的系统函数:

$$H(z) = 1 - z^{-N} \quad (5.1.24a)$$

其网络结构如图 5-13(a)所示。

由式(5.1.24a)可知, 该滤波器在 z 平面单位圆上有 N 个等分的零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$)。在 z 平面上 $z=0$ 处有 N 阶极点。零点、极点分布如图 5-13(b)所示。

该梳状 FIR 陷波滤波器的频率响应、幅频响应分别如式(5.1.24b)、式(5.1.24c)所示。

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N} \quad (5.1.24b)$$

$$H(\omega) = |H(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin\left(\frac{N}{2}\omega\right) \right| \quad (5.1.24c)$$

由式(5.1.24c)画出该滤波器的幅频响应曲线如图 5-13(c)所示,滤波器幅频特性形状如梳子的齿,在频率 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k (k=0,1,2,\dots,N-1)$ 处幅频响应为零,即“陷波”。

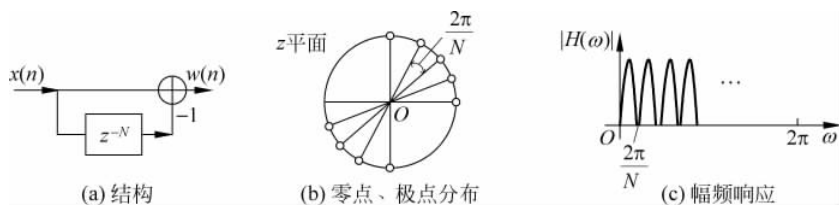


图 5-13 FIR 梳状滤波器结构,零点、极点分布和幅频响应

(2) (梳状)IIR 陷波滤波器。式(5.1.23)中,当 $a < 1$,且接近于 1, $r=1$ 时,即得梳状 IIR 陷波滤波器的系统函数:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - a^N z^{-N}} \tag{5.1.25}$$

其零点、极点分布如图 5-14(a)所示。

由式(5.1.25)可知,该滤波器的 N 个零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} (k=0,1,2,\dots,N-1)$ 在 z 平面单位圆上; N 个极点 $az_k = ae^{j\frac{2\pi}{N}k} (k=0,1,2,\dots,N-1)$ 在 z 平面单位圆内,接近单位圆。

z 平面单位圆上旋转点 $z = e^{j\omega}$ 对零点、极点对 (z_i, az_i) 的距离近似相等,其中 $i=0,1,2,\dots,N-1$,当单位圆上的点 z 旋转到频率为 $\omega_i = i \frac{2\pi}{N}$ 弧度处,与该处零点 z_i 的距离等于零,对应的 IIR 滤波器的幅频响应为零。该梳状 IIR 陷波滤波器幅频响应如图 5-14(b)所示,形状如梳子的齿,在频率 $i \frac{2\pi}{N}$ 处有极小值,其他频率点近似平坦。

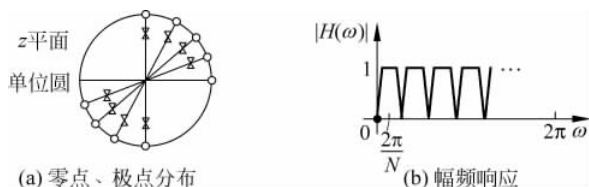


图 5-14 IIR 梳状滤波器零点、极点分布和幅频响应

2) 无损耗 IIR 并联谐振器

一阶数字系统 $H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$ 中,常数 $H(k)$ 是有限长单位采样脉冲响应为 $h(n)$ 的 FIR 滤波器频率响应的频域采样值。一阶系统 $H_k(z)$ 对频率 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 的响应为 ∞ ,表现为系统谐振,无损耗。所以称该一阶系统是谐振频率为 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ 的无损耗 IIR 谐振器。

无损耗 IIR 并联谐振器的系统函数如式(5.1.26)所示,是由多个谐振频率不同的一阶无损耗 IIR 谐振器并联构成,该系统函数在 z 域单位圆上共有 N 个极点: $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} (k=0,1,2,\dots,N-1)$,说明式(5.1.26)所示系统对 N 个频率分量 $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k (k=0,1,2,\dots,N-1)$ 分别

谐振。

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad (5.1.26)$$

3) 修正的频率采样型 FIR 滤波器

(1) 特点。式(5.1.22)所示频率采样型 FIR 滤波器中, 并联 IIR 谐振器在 z 平面单位圆上的 N 个极点与梳状滤波器在 z 平面单位圆上的 N 个零点一一对应相消。总体上, 该 FIR 滤波器对频率分量 $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ 的响应正好是 $H(k)$, 即其频率响应的频域采样值。

(2) 稳定性问题。频率采样型 FIR 滤波器中, 并联 IIR 谐振器的 N 个极点在 z 平面单位圆上的位置由 FIR 滤波器理论上的系数决定。系数的量化误差, 使并联 IIR 滤波器谐振频率移动, 可能使梳状滤波器的零点和并联 IIR 谐振器的极点不能完全对消, 导致 FIR 滤波器系统不稳定。

(3) 修正频率采样型 FIR 滤波器。为了改善上述频率采样型 FIR 滤波器在 z 平面单位圆上的零点、极点不能完全对消带来的系统不稳定问题, 可以把并联 IIR 谐振器的极点设置在 z 平面上半径 r 小于 1, 但近似于 1 的圆周上。相应的, 梳状滤波器的零点也移到同一个半径小于 1 的圆周上, 并与并联 IIR 谐振器的极点一一对消, 得到“修正频率采样型 FIR 滤波器”, 系统函数如式(5.1.27)所示。

$$H(z) \approx \frac{1}{N} (1 - r^N z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}, \quad r \leq 1 \quad (5.1.27)$$

其中, $H(z)$ 的极点、零点均为 $z_k = r e^{j\frac{2\pi k}{N}}$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$), 在 z 平面单位圆内。

(4) 根据极点情况讨论修正频率采样型 FIR 滤波器的网络结构。修正频率采样型 FIR 滤波器的共轭复极点在半径为 r 的圆周上以实轴为轴成对称分布。将第 k 个与第 $(N-k)$ 个一阶 IIR 谐振器合并为一个实系数的二阶滤波器网络 $H_k(z)$, 如式(5.1.28)所示。网络结构如图 5-15 所示。

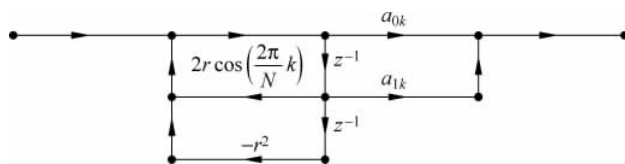


图 5-15 二阶 IIR 谐振器 $H_k(z)$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - r W_N^{-(N-k)} z^{-1}} = \frac{a_{0k} + a_{1k} z^{-1}}{1 - z^{-1} 2r \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + r^2 z^{-2}}, \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, N \text{ 为奇数} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, N \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (5.1.28)$$

其中,

$$\begin{cases} a_{0k} = 2\text{Re}[H(k)] \\ a_{1k} = -2r\text{Re}[H(k)W_N^k] \end{cases} \quad (5.1.29)$$

实极点对应一阶 IIR 滤波器网络,其系统函数如式(5.1.30)和式(5.1.31)所示。

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} \quad (5.1.30)$$

$$H_{\frac{N}{2}}(z) = \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + rz^{-1}}, \quad N \text{ 为偶数} \quad (5.1.31)$$

综合起来,当 N 为偶数时,修正频率采样型 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 如式(5.1.32)所示,有一对实极点($k=0$ 及 $k=\frac{N}{2}$ 点); 结构如图 5-16 所示,由一阶网络 $H_0(z)$ 、 $H_{\frac{N}{2}}(z)$ 和各二阶网络 $H_k(z)$ 构成, $k=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$ 。

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + H_{\frac{N}{2}}(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H_k(z) \right] \quad (5.1.32)$$

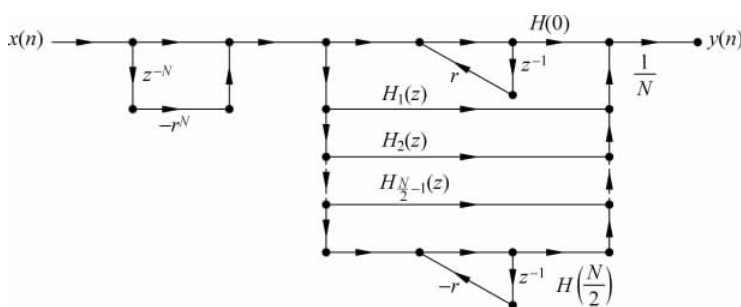


图 5-16 修正频率采样型 FIR 滤波器结构(N 为偶数)

当 N 为奇数时,修正频率采样型 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$,如式(5.1.33)所示,只有一个实极点($k=0$ 点); 结构如图 5-17 所示,由一阶网络 $H_0(z)$ 和各二阶网络 $H_k(z)$ 构成, $k=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$ 。

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} H_k(z) \right] \quad (5.1.33)$$

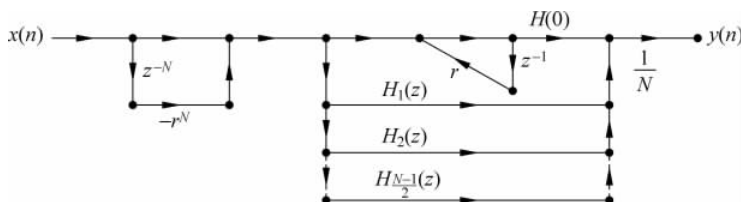


图 5-17 修正频率采样型 FIR 结构(N 为奇数)

5.1.5 格型结构

1. 全零点格型滤波器

一个 N 阶的 FIR 滤波器的系统函数如式(5.1.34)所示。

$$H(z) = B(z) = \sum_{i=0}^N b_i z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^N b_N^{(i)} z^{-i} \quad (5.1.34)$$

其中, $b_N^{(i)}$ 表示 FIR 滤波器的第 i 个系数, 并假设首项(零次幂项)系数 $b_0 = 1$; $H(z)$ 对应的格型结构见图 5-18。

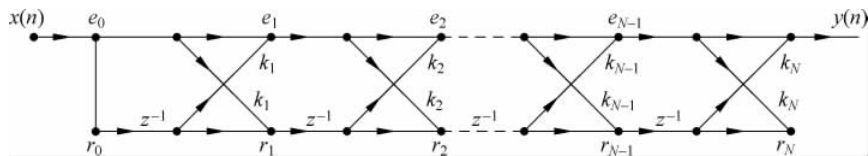


图 5-18 全零点格型滤波器网络结构

格型网络基本单元如图 5-19 所示, 有两个输入端和两个输出端, 输入信号 $x(n)$ 同时送到第一级格型网络单元的两个输入端, 而在输出端仅取最后一级格型网络单元上面的一个输出端作为整个 FIR 格型滤波器的输出信号 $y(n)$ 。

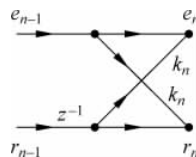


图 5-19 全零点格型结构基本单元

2. 全极点格型滤波器

一个 N 阶的 IIR 滤波器的系统函数如式(5.1.35)所示。

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N a_N^{(i)} z^{-i}} = \frac{1}{A(z)} \quad (5.1.35)$$

由式(5.1.35)可见, $H(z) = \frac{1}{A(z)}$ 可以看成是式(5.1.34)所示的 FIR 滤波器系统 $B(z) = A(z)$ 的逆系统。

所以将图 5-18 所示的 FIR 滤波器按求逆准则进行变换, 即得到 IIR 滤波器 $H(z) = \frac{1}{A(z)}$ 的格型网络结构, 如图 5-20 所示, 具体步骤如下:

(1) 将输入至输出的无延迟通路全部反向, 并把该通路的常数值支路增益改变为原来增益值的倒数(图 5-18 中上面 $e_0 - e_1 - e_2 - \dots - e_N$ 的支路, 增益全为 1)。

(2) 再把指向上面这条新通路的各节点的其他支路的增益(指向上面节点的各支路增益反射系数)改变为原来增益值的负值。

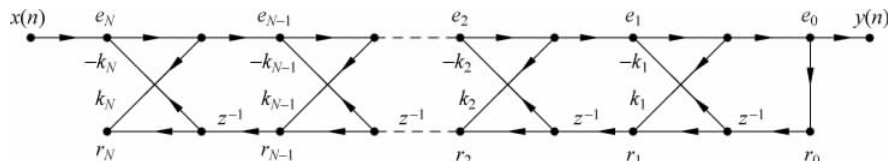


图 5-20 全极点格型滤波器网络结构

(3) 将输入、输出交换位置。

(4) 按照常规,将输入画在网络左端,输出画在网络右端,所得的格型网络如图 5-20 所示,系统函数正好就是原来 FIR 滤波器系统函数的倒数。

5.2 习题解答

5-1 设系统用下面时域 I/O 差分方程描述:

$$y(n] - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n] + \frac{1}{3}x(n-1)$$

试分别画出系统的直接型、级联型和并联型结构。差分方程中 $x(n]$ 和 $y(n]$ 分别表示系统的输入和输出信号。

解: 将时域 I/O 差分方程两边进行 z 变换得

$$Y(z) - \frac{3}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-2} = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

(1) 直接型系统函数:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

则直接型结构如图 5-21 所示。

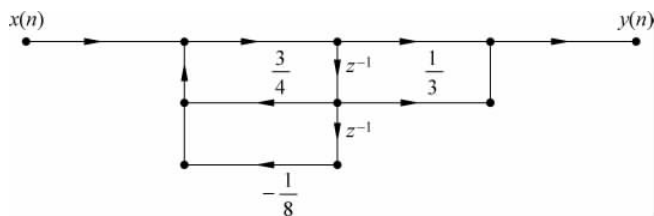


图 5-21 题 5-1 解图一

(2) 对 $H(z)$ 分母进行因式分解:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

按照上式有两种级联形式:

①

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

②

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

则级联型两种结构如图 5-22 和图 5-23 所示。

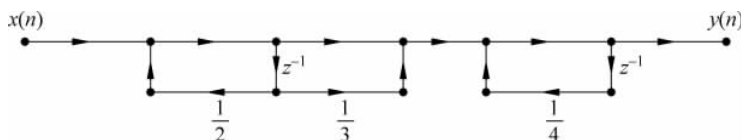


图 5-22 题 5-1 解图二

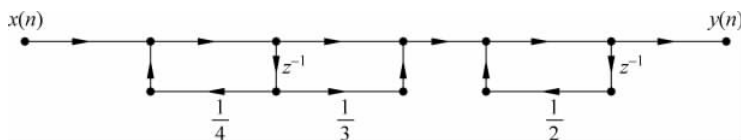


图 5-23 题 5-1 解图三

(3) 对 $H(z)$ 进行部分分式展开:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z - \frac{1}{4}}$$

$$A = \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$$

$$B = \frac{z + \frac{1}{3}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \bigg|_{z=\frac{1}{4}} = -\frac{7}{3}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{10}{3}}{z - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{7}{3}}{z - \frac{1}{4}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{7}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

上式对应的并联型结构图如图 5-24 所示。

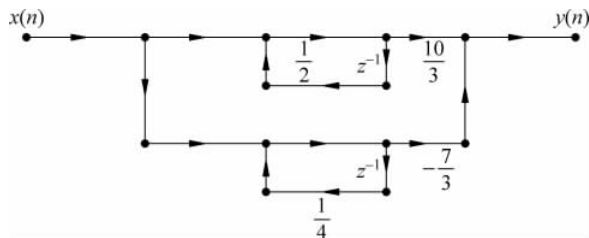


图 5-24 题 5-1 解图四

5-2 设数字滤波器的时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = (a + b)y(n - 1) - aby(n - 2) + x(n - 2) + (a + b)x(n - 1) + abx(n)$$

式中, $|a| < 1, |b| < 1$ 。试画出系统的直接型、级联型结构, $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示系统的输入和输出信号。

解: 将时域 I/O 差分方程两边进行 z 变换, 整理得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{ab + (a + b)z^{-1} + z^{-2}}{1 - (a + b)z^{-1} + abz^{-2}}$$

(1) 系统函数直接型网络结构如图 5-25 所示。

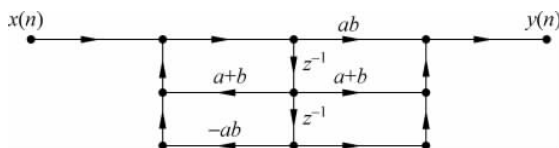


图 5-25 题 5-2 解图一

(2) 对 $H(z)$ 的分子、分母多项式因式分解, 可得级联型表达式, 有两种形式:

① $H(z) = \frac{a + z^{-1}}{(1 - az^{-1})} \cdot \frac{b + z^{-1}}{(1 - bz^{-1})}$, 其级联型结构如图 5-26 所示。



图 5-26 题 5-2 解图二

② $H(z) = \frac{b + z^{-1}}{(1 - az^{-1})} \cdot \frac{a + z^{-1}}{(1 - bz^{-1})}$, 其级联型结构如图 5-27 所示。



图 5-27 题 5-2 解图三

5-3 用直接型 I 及典型型结构实现以下系统函数描述的数字系统:

$$H(z) = \frac{3 + 4.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{2 + 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2}}$$

解: 因为给定系统函数可整理为

$$H(z) = \frac{1.5 + 2.1z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.3z^{-1} - 0.2z^{-2}} = \frac{1.5 + 2.1z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 - (-0.3z^{-1} + 0.2z^{-2})}$$

而系统函数一般形式为

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

两式相比,可得

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.3, & a_2 &= 0.2 \\ b_0 &= 1.5, & b_1 &= 2.1, & b_2 &= 0.4 \end{aligned}$$

直接型 I 结构如图 5-28 所示。

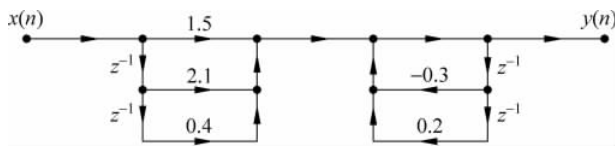


图 5-28 题 5-3 解图一

典型型结构如图 5-29 所示。

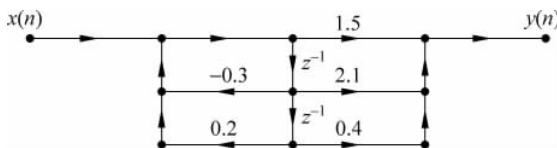


图 5-29 题 5-3 解图二

5-4 用级联型结构实现以下系统函数描述的数字系统,一共能构成几种级联型网络?

$$H(z) = \frac{4(z+1)(z^2 - 1.4z + 1)}{(z-0.5)(z^2 + 0.9z + 0.8)}$$

解: 因为基于二阶节的级联型系统函数一般形式为

$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}}{1 - \alpha_{1k}z^{-1} - \alpha_{2k}z^{-2}} = \frac{4(1+z^{-1})(1-1.4z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

则

$$A = 4$$

$$\beta_{11} = 1, \quad \beta_{21} = 0, \quad \beta_{12} = -1.4, \quad \beta_{22} = 1$$

$$\alpha_{11} = 0.5, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{12} = -0.9, \quad \alpha_{22} = -0.8$$

由此可得,若采用二阶节实现,还考虑分子分母组合成二阶(一阶)基本节的方式和级联次序,则有四种实现形式。结构一和结构二示意图分别如图 5-30 和图 5-31 所示。

5-5 图 5-32 中画出了 4 个系统,试用各子系统的单位采样脉冲响应分别表示各总系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 。并求其总系统函数 $H(z)$ 。

解:

$$(a) \quad h(n) = h_1(n) * h_2(n) * h_3(n), \quad H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z)$$

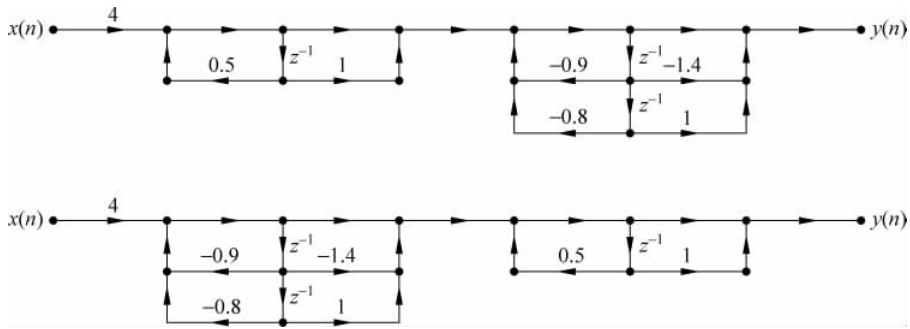


图 5-30 题 5-4 解图一

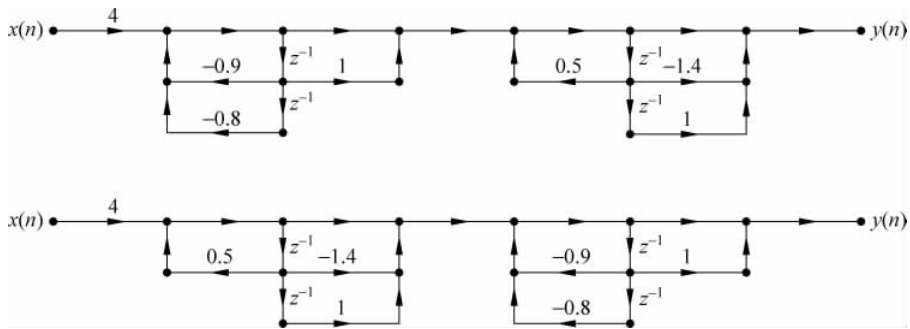


图 5-31 题 5-4 解图二

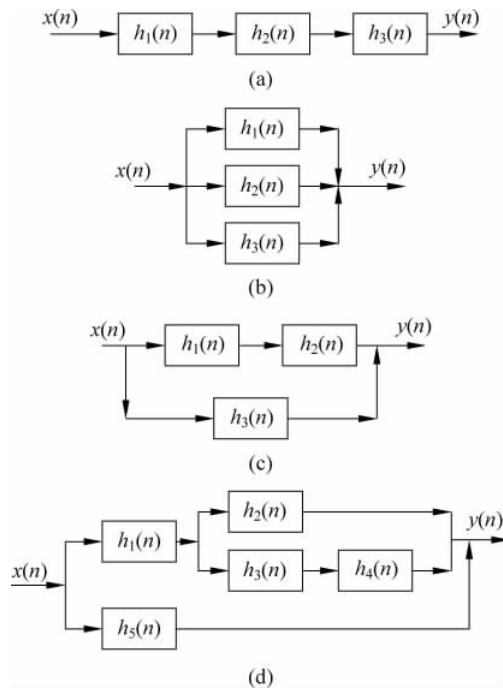


图 5-32 题 5-5 图

$$(b) h(n) = h_1(n) + h_2(n) + h_3(n), \quad H(z) = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z)$$

$$(c) h(n) = h_1(n) * h_2(n) + h_3(n), \quad H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) + H_3(z)$$

$$(d) h(n) = h_1(n) * h_2(n) + h_1(n) * h_3(n) * h_4(n) + h_5(n)$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) + H_1(z)H_3(z)H_4(z) + H_5(z)$$

5-6 写出图 5-33 中各信号流图表示的数字系统的系统函数及时域 I/O 差分方程。

解:

(a) 根据给定信号流图, 系统时域 I/O 差分方程为

$$y(n] = ay(n-1) + x(n)$$

上式两边 z 变换, 整理得系统函数

$$H(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})}$$

(b) 根据系统函数和典型网络结构的关系, 可直接写出

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

系统函数对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$$

(c) 令流程图右上的节点为 $w(n)$, 根据流程图列出节点时域 I/O 差分方程:

$$w(n) = x(n) + (-r\sin\theta)y(n-1) + (r\cos\theta)w(n-1) \quad (1)$$

$$y(n) = (r\cos\theta)y(n-1) + (r\sin\theta)w(n-1) \quad (2)$$

式①、式②两边取 z 变换:

$$W(z) = X(z) - r\sin\theta \cdot z^{-1}Y(z) + r\cos\theta \cdot z^{-1}W(z) \quad (3)$$

$$Y(z) = r\cos\theta \cdot z^{-1}Y(z) + r\sin\theta \cdot z^{-1}W(z) \quad (4)$$

联立式③、式④, 消去 $W(z)$, 整理得系统函数

$$H(z) = \frac{r\sin\theta \cdot z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta \cdot z^{-1} + r^2 \cdot z^{-2}}$$

对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = 2r\cos\theta \cdot y(n-1) - r^2y(n-2) + r\sin\theta \cdot x(n-1)$$

5-7 试给出以下系统函数所描述数字系统的并联型实现:

$$H(z) = \frac{5.2 + 1.58z^{-1} + 1.41z^{-2} - 1.6z^{-3}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2})}$$

解: 对此系统函数进行因式分解并展成部分分式, 得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{5.2 + 1.58z^{-1} + 1.41z^{-2} - 1.6z^{-3}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2})} \\ &= 4 + \frac{0.2}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1 + 0.3z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} \end{aligned}$$

则

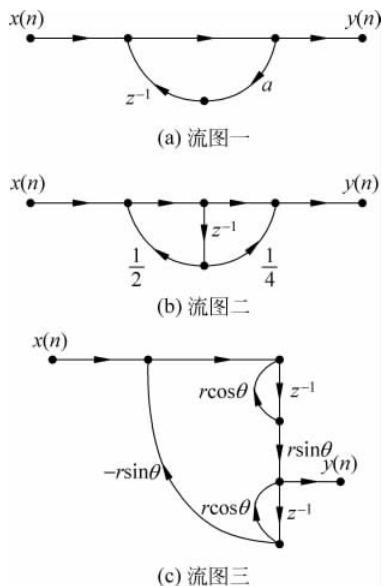


图 5-33 题 5-6 图

$$G_0 = 4$$

$$\alpha_{11} = 0.5, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{12} = -0.9, \quad \alpha_{22} = -0.8$$

$$\gamma_{01} = 0.2, \quad \gamma_{11} = 0, \quad \gamma_{02} = 1, \quad \gamma_{12} = 0.3$$

并联结构如图 5-34 所示。

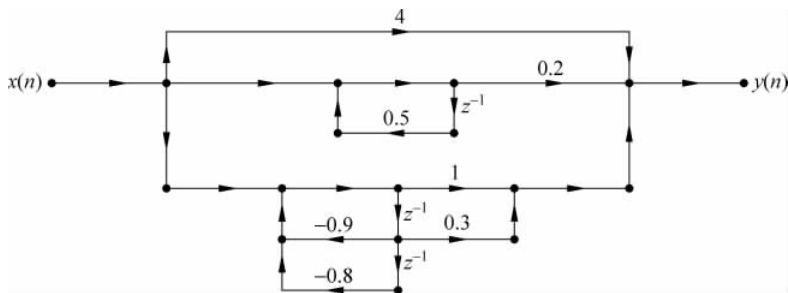


图 5-34 题 5-7 解图

5-8 已知 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应为

$$h(n) = \delta(n) + 0.3\delta(n-1) + 0.72\delta(n-2) + 0.11\delta(n-3) + 0.12\delta(n-4)$$

试画出其级联型结构实现。

解：根据 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$, 依给定的 $h(n)$ 得

$$H(z) = 1 + 0.3z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.11z^{-3} + 0.12z^{-4}$$

$$= (1 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2})(1 + 0.1z^{-1} + 0.4z^{-2})$$

而 FIR 滤波器级联型结构的模型公式为

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

对照上式可得

$$\beta_{01} = 1, \quad \beta_{11} = 0.2, \quad \beta_{21} = 0.3$$

$$\beta_{02} = 1, \quad \beta_{12} = 0.1, \quad \beta_{22} = 0.4$$

级联结构如图 5-35 所示。

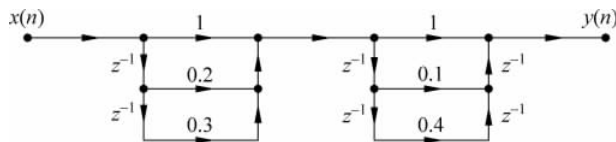


图 5-35 题 5-8 解图

5-9 写出图 5-36 中各信号流图描述的数字系统的系统函数

解：

(a) $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$

(b) 流程图的中间两个单位延迟器从下向上节点设为 $u(n)$ 、 $v(n)$ 、 $w(n)$, 则根据流程

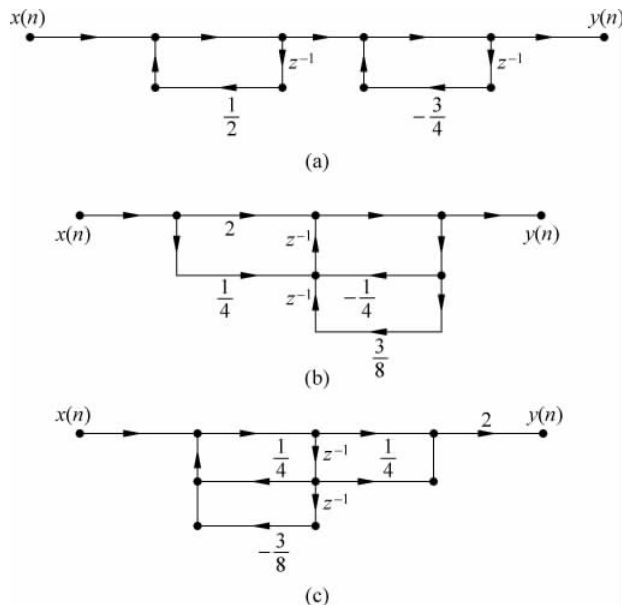


图 5-36 题 5-9 图

图,可列出节点的时域差分方程:

$$u(n) = \frac{3}{8}y(n) \quad ①$$

$$v(n) = u(n-1) + \frac{1}{4}x(n) - \frac{1}{4}y(n) \quad ②$$

$$w(n) = 2x(n) + v(n-1)$$

$$y(n) = w(n) = 2x(n) + v(n-1) \quad ③$$

式①~式③两边 z 变换,消去 $U(z)$ 、 $V(z)$,整理得系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

讨论:

① 题 5-9 的图 5-36(b)正是上述系统函数描述的常规典型型网络结构的转置型网络结构;

② 转置型网络结构也很常用。读者可以自己总结转置型网络结构和系统函数 $H(z)$ 的关系特征。

(c) 根据典型型网络结构图和系统函数的关系,可以写出:

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}}$$

5-10 已知滤波器的单位采样脉冲响应为 $h(n) = 0.9^n R_5(n)$, 求出该滤波器的系统函数, 并画出其直接型结构。

解:

$$\begin{aligned} h(n) &= 0.9^n R_5(n) \\ H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0.9^n R_5(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^4 0.9^n z^{-n} \\ &= \frac{1 - 0.9^5 z^{-5}}{1 - 0.9 z^{-1}} = \frac{1 - 0.59049 z^{-5}}{1 - 0.9 z^{-1}} \end{aligned}$$

由上式得到系统函数直接型结构如图 5-37 所示。

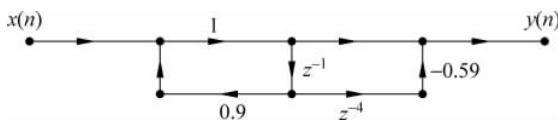


图 5-37 题 5-10 解图

5-11 已知滤波器的单位采样脉冲响应为 $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)$, 试用频率采样结构来实现该滤波器。设采样点数 $N=5$, 要求画出频率采样网络结构图, 写出滤波器的参数计算公式。

解: 已知频率采样结构的公式为

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$N=5$ 时,

$$\begin{aligned} H(k) &= \text{DFT}[h(n)] = \sum_{n=0}^4 [\delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4)] W_N^{kn} \\ &= 1 - e^{-j\frac{2}{5}\pi k} + e^{-j\frac{8}{5}\pi k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

其采样频率结构如图 5-38 所示。

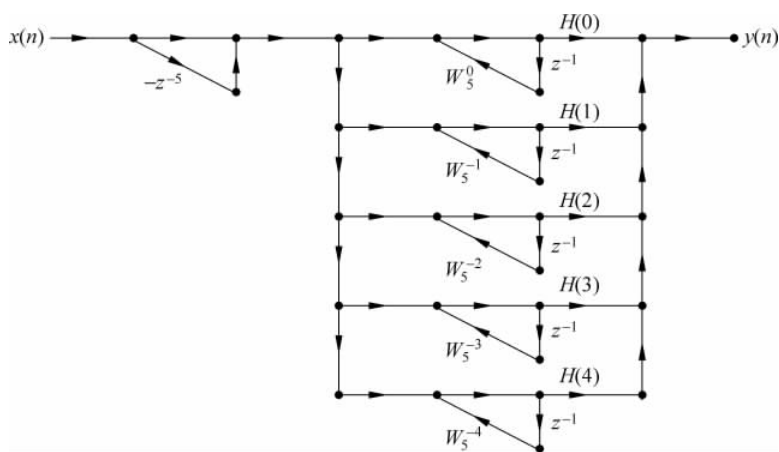


图 5-38 题 5-11 解图

5-12 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{5} \times (1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-4})$$

试画出此滤波器的线性相位网络结构。

解: 由题中所给条件可知

$$h(n) = \frac{1}{5}\delta(n) + \frac{3}{5}\delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{3}{5}\delta(n-3) + \frac{1}{5}\delta(n-4)$$

则

$$h(0) = h(4) = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$h(1) = h(3) = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$h(2) = 1$$

即 $h(n)$ 是偶对称, 对称中心在 $n = \frac{N-1}{2} = 2$ 处, N 为奇数 ($N=5$)。

线性相位网络结构如图 5-39 所示。

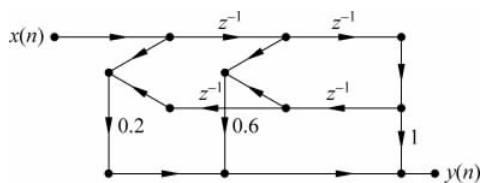


图 5-39 题 5-12 解图

5-13 设滤波器的时域 I/O 差分方程为:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$$

(1) 试用直接型 I、典型型及一阶节的级联型、一阶节的并联型网络结构实现此差分方程。

(2) 求系统的频率响应(幅度响应及相位响应)。

(3) 设采样频率为 10kHz, 输入正弦波幅度为 5, 频率为 1kHz, 试求该滤波器的稳态输出。

解:

(1) 根据

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

可得

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1$$

直接型 I 结构及典型型结构见图 5-40 和图 5-41。

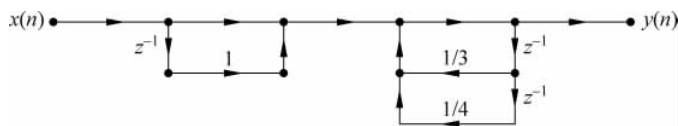


图 5-40 题 5-13 解图一

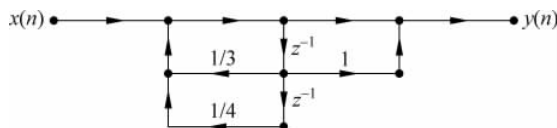


图 5-41 题 5-13 解图二

一阶节级联型的 $H(z)$ 如下:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{1+z^{-1}}{(1-0.69z^{-1})(1+0.36z^{-1})} \end{aligned}$$

一阶节级联型结构示意图见图 5-42。



图 5-42 题 5-13 解图三

一阶节并联型的 $H(z)$ 求得如下:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}} \\ &= \frac{1.61}{1-0.69z^{-1}} - \frac{0.61}{1+0.36z^{-1}} \end{aligned}$$

一阶节并联结构见图 5-43。

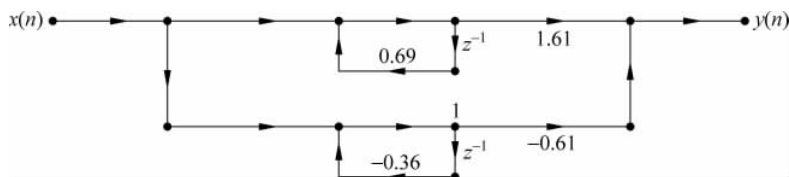


图 5-43 题 5-13 解图四

(2) 由题意可知

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

令 $z = e^{j\omega}$, 代入系统函数可推出系统频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega} - \frac{1}{4}e^{-2j\omega}} = \frac{(1 + \cos\omega) - j\sin\omega}{1 - \frac{1}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos 2\omega + j\left(\frac{1}{3}\sin\omega + \frac{1}{4}\sin 2\omega\right)}$$

系统幅频特性为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{(1 + \cos\omega)^2 + \sin^2\omega}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos 2\omega\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\sin\omega + \frac{1}{4}\sin 2\omega\right)^2}}$$

利用三角恒等式 $\cos 2\omega = 2(\cos\omega)^2 - 1 = 1 - 2(\sin\omega)^2 = (\cos\omega)^2 - (\sin\omega)^2$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, 化简上式可得:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{2\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\frac{169}{144} + \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 - (\cos\omega)^2}}$$

相频特性为

$$\begin{aligned} \arg[H(e^{j\omega})] &= -\arctan\left(\frac{\sin\omega}{1 + \cos\omega}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{3}\sin\omega + \frac{1}{4}\sin 2\omega}{1 - \frac{1}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos 2\omega}\right) \\ &= -\arctan\left(\tan\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\omega\right)\sin\omega}{1 - \frac{1}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos(2\omega)}\right) \\ &= -\frac{\omega}{2} - \arctan\left(\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\omega\right)\sin\omega}{1 - \frac{1}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos 2\omega}\right) \end{aligned}$$

(3) 已知输入正弦波幅度为 5, 频率为 1kHz, 可得 $x(t)$ 的周期 T_1 为

$$T_1 = \frac{1}{1000\text{Hz}} = 10^{-3}\text{s} = 1\text{ms}$$

又因采样频率为 10kHz, 即采样周期为

$$T = \frac{1}{10 \times 10^3\text{Hz}} = 0.1 \times 10^{-3}\text{s} = 0.1\text{ms}$$

即对正弦信号 $x(t) = 5\sin(2\pi t \times 10^3)$ 采样, 在 $x(t)$ 的一个周期内, 采样点数为 10 个, 且在下一周期内的采样值与 $(0, T_1)$ 间的采样值完全一样。所以可以将输入看作

$$\begin{aligned} x(n) &= 5\sin(2\pi \times 10^3 \times nT) \\ &= 5\sin(10^3 \times 2\pi \times 10^{-4}n) = 5\sin\left(\frac{1}{5}n\pi\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, 9 \end{aligned}$$

系统输入序列的周期为 10, 数字频率为:

$$\omega_0 = 0.2\pi \text{ rad}$$

可得此系统稳态输出为

$$y(n) = 5 |H(e^{j\omega_0})| \sin[\omega_0 n + \arg(H(e^{j\omega_0}))]$$

$$|H(e^{j\omega_0})| = \frac{2\cos\frac{\omega_0}{2}}{\sqrt{\frac{169}{144} + \left(\sin\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - (\cos\omega_0)^2}} \Big|_{\omega_0=0.2\pi}$$

$$= 2.4263$$

$$\arg[H(e^{j\omega_0})] = \left\{ -\frac{\omega}{2} - \arctan \left[\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\omega\right)\sin\omega}{1 - \frac{1}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos(2\omega)} \right] \right\} \Big|_{\omega=0.2\pi}$$

$$= -0.1\pi - 0.1866\pi$$

$$= -0.2866\pi = -0.9$$

故输出为

$$y(n) = 12.13\sin(0.2\pi n - 0.9)$$

5-14 分别给定三个数字滤波器的系统函数为：

$$H_1(z) = 1 - 0.6z^{-1} - 1.4145z^{-2} + 0.864z^{-3}$$

$$H_2(z) = 1 - 0.98z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.898z^{-3}$$

$$H_3(z) = H_1(z)/H_2(z)$$

分别画出它们的直接型网络结构。

解： $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 和 $H_3(z)$ 直接型结构如图 5-44~图 5-46 所示。

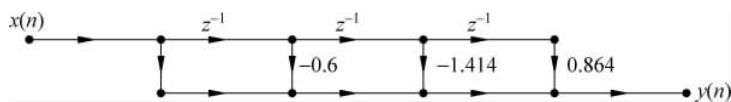


图 5-44 题 5-14 解图一

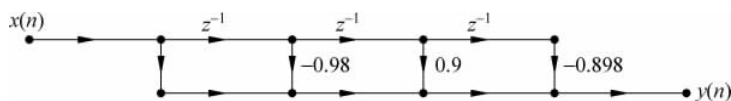


图 5-45 题 5-14 解图二

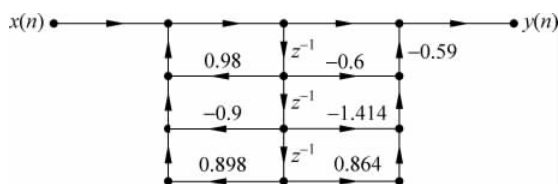


图 5-46 题 5-14 解图三