



一、数的认识



1. 数字

1) 数字的诞生和发展

数字作为数学大厦的基石,是人类进化的产物。数的概念的形成可能与火的使用一样古老,它对于人类文明的意义也绝不亚于火的使用。

在几百万年以前,我们的祖先还完全没有数的概念。原始人类过着群居的生活。白天共同劳动,采集果薯,捕猎鸟兽,晚上住在洞穴里,共同享用劳动所得。逐渐对“数”产生了朦胧的概念,但也仅限于“有”“无”“多”“少”。他们狩猎而归,猎物或有或无。同时,他们也会注意到一只羊与许多只羊、一头狼与整群狼在数量上的差异。

随着文明的进步,这些模糊不清的概念越来越难以满足生产、生活的需要。由于记事和分配生活用品等方面的需要,逐渐产生了数的概念。最早人们利用自己的手指头、石块或者木棍来计数。比如,捕获了1头野兽,就用1块石子代表。捕获了3头,就放3块石子。公元前1500年,南美洲秘鲁印加族(印第安人的一部分)习惯于“结绳计数”——每收进一捆庄稼,就在绳子上打个结,用结的多少来记录收成。根据我国古书《易经》的记载,上古时期的中国人也是“结绳而治”,就是用在绳上打结的办法来记事表数。传说古代波斯王打仗时也常用绳子打结来计算天数。

另外,用利器在树皮上或兽皮上刻痕,也是古人常用的办法。底

优生必会的数学技巧

格里斯河与幼发拉底河之间及两河周围,叫作美索不达米亚,那里产生过一种文化,与埃及文化一样,也是世界上最古老的文化之一。美索不达米亚人用在树木或者石头上刻痕划印来记录流逝的日子。后来,他们逐渐以符号代替刻痕,用1个符号表示1件东西,2个符号表示2件东西,以此类推,这种计数方法延续了很久。后来又改为“书契”,即用刀在竹片或木头上刻痕计数。直到今天,我们中国人还经常会使用写“正”字来计数。每写一画代表“一”,而“正”字正好是五画,还包含着“逢五进一”的意思。

到了后来,人们发现仅仅用自然数来计数是远远不够的。比如,分配物品时,3个人分2件东西,每个人该分多少呢?于是分数就产生了。

接着人们又发现很多数量具有相反的意义,比如,增加和减少、前进和后退,为了表示这样的量,又产生了负数。正数、负数和零,统称为有理数。

公元前2500年,毕达哥拉斯的学生在研究1与2的比例中项时,发现没有一个能用整数比例写成的数可以表示它,这个新数的出现使毕达哥拉斯感到震惊,紧接着人们又发现了很多不能用两整数之比写出来的数,如圆周率就是最重要的一个,人们就把这些数称作无理数。有理数和无理数一起统称为实数。

但是后来,在解方程的时候常常需要开平方,如果被开方数是负数,这道题还有解吗?如果没有解,那么数学运算就像走在死胡同中那样处处碰壁。于是数学家们就规定用符号“ i ”表示“-1”的平方根,虚数就这样诞生了。

数字的概念发展到虚数以后,在很长一段时间内,就连某些数学家也认为数的概念已经十分完善了。可是1843年10月16日,英国数学家哈密尔顿又提出了“四元数”的概念。所谓四元数,就是由一个标量(实数)和一个向量(其中 x 、 y 、 z 为实数)组成的数。四元数在数论、群论、量子理论以及相对论等方面有着广泛的应用。与此同时,人们还开展了对“多元数”理论的研究。

到目前为止,数字的“家族”已发展得十分庞大。至于究竟什么



时候才能把数字家族的成员全部凑齐，依然是未知数！

2) 阿拉伯数字

阿拉伯数字，其实并不是阿拉伯人发明创造的，而是发源于古印度。后来被阿拉伯人掌握、改进，并传到了西方，西方人非常喜爱这套方便、实用的计数符号，便将这些数字称为阿拉伯数字。慢慢地，世界各地都认同了这个叫法。尽管后来人们知道了事情的真相，但由于习惯使然，也就一直没有改正过来。

在古代印度，进行城市建设时需要设计和规划，进行祭祀时需要计算日月星辰的运行，于是，数学计算就产生了。大约在公元前3000年，印度河流域居民的数字就比较先进，而且采用了十进位的计算方法。到公元前3世纪，印度出现了整套的数字，但各地区的写法并不完全一致，其中最具有代表性的是婆罗门式。现代数字就是由这一组数字演化而来的。当时，在这一组数字中，只有1~9九个符号，还没有出现“0”这个数字。“0”是到了笈多王朝（公元320—550年）时期才出现的。

这些阿拉伯数字不单单用来计数，还有着丰富的哲学内涵。

1：可以看作是数字“1”，也可以看作是一根棍子、一个拐杖、一把竖立的枪、一支蜡烛……

2：可以看作是数字“2”，也可以看作是一只木马、一个跪着的人、一个陡坡、一个滑梯、一只鹅……

3：可以看作是数字“3”，也可以看作是两根手指、斗鸡眼、树杈、立起来的W……

4：可以看作是数字“4”，也可以看作是一个蹲着的人、小帆船、小红旗、小刀……

5：可以看作是数字“5”，也可以看作是大肚子、小屁股、音符……

6：可以看作是数字“6”，也可以看作是小蝌蚪、一个头和一个手臂露在外面的人……

7：可以看作是数字“7”，也可以看作是拐杖、小桌子、板凳、镰

刀……

8: 可以看作是数字“8”,也可以看作是数学符号“ ∞ ”、花生、套环、雪人……

9: 可以看作是数字“9”,也可以看作是一个靠着坐的人、小嫩芽……

0: 可以看作是数字“0”,也可以看作是胖乎乎的人、圆形、鞋底、脚丫、瘦子的脸、鸡蛋……

3) 罗马数字

罗马数字是一种现在应用比较少的数量表示方法。但是,它的产生标志着一种古代文明的进步。

罗马数字是在希腊数字的基础上建立的一种计数方法。大约在2500年前,罗马人还处在文化发展的初期,当时他们用手势来表示数字。比如,为了表示一、二、三、四个物体,就分别伸出一、二、三、四根手指;表示五个物体就伸出一只手;表示十个物体就伸出两只手。相应地,为了记录下这些数字,就在羊皮上画出 I、II、III 来代替手指的根数;要表示一只手时,就写成“V”形,表示大拇指与食指张开的形状;表示两只手时,就画成“VV”形,后来又写成一只手向上,一只手向下的“X”,这就是罗马数字的雏形。

后来为了表示较大的数,罗马人用符号 C 表示一百。C 是拉丁词 century 的第一个字母,century 就是一百的意思。用符号 M 表示一千。M 是拉丁词 mille 的第一个字母,mille 就是一千的意思。取字母 C 的一半,成为符号 L,表示 50。这样,罗马数字就有了下面七个基本符号: I 表示 1, V 表示 5, X 表示 10, L 表示 50, C 表示 100, D 表示 500, M 表示 1000。若在数的上面画一横线,这个数就扩大 1000 倍。这样就可以表示更大的数字。

用罗马数字表示数的基本方法一般是把若干个罗马数字写成一列,它表示的数等于各个数字所表示的数相加的和。但是也有例外,当符号 I、X 或 C 位于大数的后面时就作为加数;位于大数的前面时就作为减数。具体规则如下。



(1) 重复数次。一个罗马数字重复几次,就表示这个数的几倍。

(2) 右加左减。在一个较大的罗马数字的右边记上一个较小的罗马数字,表示大数字加小数字。在一个较大的罗马数字的左边记上一个较小的罗马数字,表示大数字减小数字。但是,左减不能跨越等级。比如,99 不可以用 IC 表示,而用 $XCIX$ 表示。

(3) 加线乘千。在一个罗马数字的上方加上一条横线或者在右下方写 M ,表示将这个数字乘以 1000,即是原数的 1000 倍。同理,如果上方有两条横线,即是原数的 1000000 倍。

(4) 单位限制。同样单位最多只能出现 3 次,如 40 不能表示为 $XXXX$,而要表示为 XL 。

罗马数字表示大数字时写起来就比较简短,但计算十分不便。到现在已经很少有人使用罗马数字计数了。现在有的钟表表面仍用它表示时数。此外,在书稿章节及科学分类时也有采用罗马数字的。

遗憾的是,罗马数字里没有 0。运算的时候不能进位,不能做除法,即使十分简单的运算,也极为困难。罗马教皇还自认为用罗马数字来表示任何数字不但完全够用而且十全十美,他们甚至向外界宣布:“罗马数字是上帝发明的,从今以后不许人们再随意增加或减少一个数字。”0 在罗马是被禁止使用的。

有一次,一位罗马学者了解到了关于 0 的介绍,他认为 0 对计数是很有益处的,于是便不顾罗马教皇的禁令,在自己的著作中悄悄记载了一些关于 0 的用法,并把一些有关 0 的知识以及在运算中所起到的作用暗中进行传播。这件事被罗马教皇知道后,马上派人把他给囚禁了起来,还大发脾气地说:“神圣的数,不可侵犯,是上帝创造出来的,绝不允许 0 这个邪物加进来,弄污了神圣的数!”

但是黑暗终究战胜不了光明,人们一旦意识到 0 的重要作用,就会不顾一切地冲破教会的束缚,大胆地使用起它来。

725 年,罗马人开始用字母 N (N 是 $nulla$ 的简称,拉丁文释义为零)代表零。

4) 中文数字

我们常用的计数方法除了阿拉伯数字外,还有中文数字。中文数字又分为小写与大写。

阿拉伯数字与中文数字大小写对照表见表 1-1。

表 1-1 阿拉伯数字与中文大小写对照表

阿拉伯数字	中文小写数字	中文大写数字
0	〇	零
1	一	壹
2	二	贰
3	三	叁
4	四	肆
5	五	伍
6	六	陆
7	七	柒
8	八	捌
9	九	玖
10	十	拾
20	二十/廿(niàn)	贰拾
30	三十/卅(sà)	叁拾
40	四十/卌(xì)	肆拾
100	一百	壹佰
200	二百/貳(bì)	贰佰
1000	一千	壹仟
10000	一万	壹万
100000000	一亿	壹亿



通过上面的表格我们可以看出,不管是阿拉伯数字(1、2、3…),还是汉字小写数码(一、二、三……),由于笔画简单,都容易被涂改伪造。所以一般文书和商业财务票据上的数字都要采用中文大写数字:壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟。而像万、亿这类数字,本身笔画已经比较复杂,而且使用机会也较少,没有必要再用别的字代替。

这些汉字很早就已经产生了,而用作大写数字,属于假借。数字的这种繁化写法,早在唐代就已经全面地使用了,后来逐步规范化成为一套大写数码,并一直沿用至今。

中文大写数字的广泛应用,主要是防止人篡改数字进行经济犯罪而采取的有效措施。

明朝初年,一起涉及12名高官、6个部的左右侍郎的重大“郭桓贪污案”,就是利用空白账册大做假账,通过篡改数字大肆侵吞钱粮,累计高达2400多万石,这个数字几乎和当时全国秋粮实征总数相当。朱元璋对此大为震怒,下令将郭桓等同案犯几万人斩首示众,同时制定了惩治经济犯罪的严格法令,并在财务管理上进行技术防范——把汉字中的数字改为难以涂改的大写,即将“一二三四五六七八九十百千”改为“壹贰叁肆伍陆柒捌玖拾佰仟”等,被称为中国历史上金额数字大写的首创。

到了现代社会的今天,银行票证、流动支票、实用发票、合同协议、账目单据等各类经济文本必须标明大写数字,已经成为“约定俗成”的规则。

票据规定,银行、单位和个人填写票据与结算凭证,必须做到标准化、规范化,要求要素齐全、数字正确、字迹清晰、不错漏、不潦草,防止涂改。中文大写金额数字应用正楷或行书填写,如壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟、万、亿、元、角、分、零、整(正)等字样。不得用一、二(两)、三、四、五、六、七、八、九、十、念、毛、另(或○)填写,不得自造简化字。如果金额数字书写中使用繁体字,如贰、陆、亿、万、圆的,也应受理。

2. 整数

1) 因数与倍数

(1) 概念

因数和倍数：若整数 a 能够被 b 整除， a 叫作 b 的倍数， b 就叫作 a 的因数。

公因数：几个数公有的因数，叫作这几个数的公因数；其中最大的一个，叫作这几个数的最大公因数。

公倍数：几个数公有的倍数，叫作这几个数的公倍数；其中最小的一个，叫作这几个数的最小公倍数。

互质数：如果两个数的最大公因数是 1，那么这两个数叫作互质数。

(2) 性质

因数与倍数的性质如下。

一个数的因数的个数是有限的，其中最小的因数是 1，最大的因数是它本身；一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的倍数是它本身，没有最大的倍数。倍数和因数是相互存在的。0 是任何整数的倍数。

(3) 因数

① 表示一个数的因数的方法

(a) 列举法。即把一个数的因数按从小到大的顺序列出来。

例子：表示出 36 的因数。

解：36 的因数有 1、2、3、4、6、9、12、18、36。

(b) 集合法。即把一个数的因数按从小到大的顺序写在集合圈里。

例子：表示出 36 的因数。

解：36 的因数如图 1-1 所示。

② 求一个数的因数的方法

(a) 用乘法找。

用乘法找就是用因数和倍数的关系

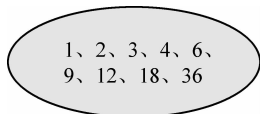


图 1-1



来找。

例子：找出 36 的所有因数。

解：首先我们在自然数的范围内找出所有乘积为 36 的乘法算式。一般我们会从 1 开始找起。

$$1 \times 36 = 36, 2 \times 18 = 36, 3 \times 12 = 36, 4 \times 9 = 36, 6 \times 6 = 36$$

所以, 1、2、3、4、6、9、12、18、36 都是 36 的因数。

(b) 用除法找。

用除法找, 就是用整除的意义来找。

例子：找出 36 的所有因数。

解：首先我们找出 36 除以哪些数可以整除。一般我们会从 1 开始找起。

$$36 \div 1 = 36, 36 \div 2 = 18, 36 \div 3 = 12, 36 \div 4 = 9, 36 \div 6 = 6$$

所以, 1、2、3、4、6、9、12、18、36 都是 36 的因数。

③ 求一个数有多少个因数

求一个数有多少个因数, 可以将这个数分解质因数, 然后将相同的因数的积用 a^n 的形式表示出来, 最后给各因数的指数加 1, 然后将所得的和连乘, 积就是这个数的因数的个数。

例子：求 180 的因数的个数。

解：

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \end{aligned}$$

所以, 180 的因数的个数为 $(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$ (个)。

④ 最大公因数的性质

(a) 几个数都除以它们的最大公因数, 所得的几个商是互质数。

(b) 几个数的最大公因数都是这几个数的因数。

(c) 几个数的公因数, 都是这几个数的最大公因数的因数。

(d) 几个数都乘以一个自然数 m , 所得的积的最大公因数等于这几个数的最大公因数乘以 m 。

⑤ 求最大公因数的基本方法

(a) 分解质因数法。先分解质因数, 然后把相同的因数连乘

起来。

几个自然数的最大公因数必须包含这几个自然数全部公有的质因数,因此我们可以先把各个数分解质因数,再把这几个自然数全部公有的质因数选出来并连乘起来,所得的积就是要求的最大公因数。

例子:求 18 和 24 的最大公因数。

解:先分别分解质因数。

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

公有的质因数为 2 和 3,所以 18 和 24 的最大公因数是 $2 \times 3 = 6$ 。

(b) 短除法。先找公有的因数,然后相乘。

用几个数公有的质因数从小到大依次作为除数,分别去除这几个数,把除得的商写在该数的下方,一直除到这几个商只有公因数 1 为止,然后把所有的除数连乘起来,所得的积就是这几个数的最大公因数。

例子:求 18 和 24 的最大公因数。

解:根据图 1-2 可知,18 和 24 的最大公因数是 $2 \times 3 = 6$ 。

$$\begin{array}{r|l}
 2 & 18 \quad 24 \\
 \hline
 3 & 9 \quad 12 \\
 \hline
 & 3 \quad 4
 \end{array}$$

图 1-2

(c) 辗转相除法。每一次都用除数和余数相除,能够整除的那个余数,就是所求的最大公因数。

具体方法:先用较小的数去除较大的数,再用出现的余数(第一余数)去除除数。接着再用出现的第二余数去除第一余数……直到没有余数为止。最后的除数就是两个数的最大公因数。

例子:求 18 和 24 的最大公因数。

解:先用 $24 \div 18 = 1 \cdots 6$;

再用 $18 \div 6 = 3$,没有余数;

所以,18 和 24 的最大公因数是 6。

(d) 特殊方法。

如果两个数互质,则它们的最大公因数是 1;如果较小数是较大