



“十四五”时期国家重点出版物出版专项规划
重大出版工程规划项目



变革性光科学与技术丛书

Optical and Electronic Chaos Generation
Theory and Experiments

光电混沌信号产生 理论与实验

王安帮 著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍了光电混沌信号产生的方法和实验进展,简要介绍了混沌信号与系统的分析方法,论述了电学混沌信号产生的基本原理、电路结构及混沌动力学特征,阐述了基于半导体激光器、光电振荡器两类光学混沌信号的产生方法、原理和实验,并分析了半导体激光器混沌输出的量子统计特性。

本书可作为高等院校信息科学、光电子学、光通信技术、物理电子学等相关专业教师、研究生的参考书,也可供相关研究和应用领域研究人员参考。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

光电混沌信号产生理论与实验/王安椿著. —北京:清华大学出版社,2023.10
(变革性光科学与技术丛书)
ISBN 978-7-302-63514-7

I. ①光… II. ①王… III. ①信号处理—混沌理论—研究 IV. ①TN911.7

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 086566 号

责任编辑:鲁永芳

封面设计:意匠文化·丁奔亮

责任校对:赵丽敏

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:小森印刷(北京)有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:170mm×240mm 印 张:15.75

字 数:295 千字

版 次:2023 年 10 月第 1 版

印 次:2023 年 10 月第 1 次印刷

定 价:129.00 元

产品编号:078444-01

丛书编委会

主 编

罗先刚 中国工程院院士,中国科学院光电技术研究所

编 委

周炳琨 中国科学院院士,清华大学

许祖彦 中国工程院院士,中国科学院理化技术研究所

杨国桢 中国科学院院士,中国科学院物理研究所

吕跃广 中国工程院院士,中国北方电子设备研究所

顾 敏 澳大利亚科学院院士、澳大利亚技术科学与工程院院士、
中国工程院外籍院士,皇家墨尔本理工大学

洪明辉 新加坡工程院院士,新加坡国立大学

谭小地 教授,北京理工大学、福建师范大学

段宣明 研究员,中国科学院重庆绿色智能技术研究院

蒲明博 研究员,中国科学院光电技术研究所

清华大学出版社

丛书序

光是生命能量的重要来源,也是现代信息社会的基础。早在几千年前人类便已开始了对光的研究,然而,真正的光学技术直到 400 年前才诞生,斯涅耳、牛顿、费马、惠更斯、菲涅耳、麦克斯韦、爱因斯坦等学者相继从不同角度研究了光的本性。从基础理论的角度看,光学经历了几何光学、波动光学、电磁光学、量子光学等阶段,每一阶段的变革都极大地促进了科学技术的发展。例如,波动光学的出现使得调制光的手段不再限于折射和反射,利用光栅、菲涅耳波带片等简单的衍射型微结构即可实现分光、聚焦等功能;电磁光学的出现,促进了微波和光波技术的融合,催生了微波光子学等新的学科;量子光学则为新型光源和探测器的出现奠定了基础。

伴随着理论突破,20 世纪见证了诸多变革性光学技术的诞生和发展,它们在一定程度上使得过去 100 年成为人类历史长河中发展最为迅速、变革最为剧烈的一个阶段。典型的变革性光学技术包括激光技术、光纤通信技术、CTD 成像技术、LED 照明技术、全息显示技术等。激光作为美国 20 世纪的四大发明之一(另外三项为原子能、计算机和半导体),是光学技术上的重大里程碑。由于其极高的亮度、相干性和单色性,激光在光通信、先进制造、生物医疗、精密测量、激光武器乃至激光核聚变等技术中均发挥了至关重要的作用。

光通信技术是近年来另一项快速发展的光学技术,与微波无线通信一起极大地改变了世界的格局,使“地球村”成为现实。光学通信的变革起源于 20 世纪 60 年代,高琨提出用光代替电流,用玻璃纤维代替金属导线实现信号传输的设想。1970 年,美国康宁公司研制出损耗为 20 dB/km 的光纤,使光纤中的远距离光传输成为可能,高琨也因此获得了 2009 年的诺贝尔物理学奖。

除了激光和光纤之外,光学技术还改变了沿用数百年的照明、成像等技术。以最常见的照明技术为例,自 1879 年爱迪生发明白炽灯以来,钨丝的热辐射一直是最常见的照明光源。然而,受制于其极低的能量转化效率,替代性的照明技术一直是人们不断追求的目标。从水银灯的发明到荧光灯的广泛使用,再到获得 2014 年诺贝尔物理学奖的蓝光 LED,新型节能光源已经使得地球上的夜晚不再黑暗。另外,CCD 的出现为便携式相机的推广打通了最后一个障碍,使得信息社会更加丰

富多彩。

20 世纪末以来,光学技术虽然仍在快速发展,但其速度已经大幅减慢,以至于很多学者认为光学技术已经发展到瓶颈期。以大口径望远镜为例,虽然早在 1993 年美国就建造出 10 m 口径的“凯克望远镜”,但迄今为止望远镜的口径仍然没有得到大幅增加。美国的 30 m 望远镜仍在规划之中,而欧洲的 (JW) 百米望远镜则由于经费不足而取消。在光学光刻方面,受到衍射极限的限制,光刻分辨率取决于波长和数值孔径,导致传统 i 线(波长为 365 nm)光刻机单次曝光分辨率在 200 nm 以上,而每台高精度的 193 nm 光刻机成本达到数亿元人民币,且单次曝光分辨率也仅为 38 nm。

在上述所有光学技术中,光波调制的物理基础都在于光与物质(包括增益介质、透镜、反射镜、光刻胶等)的相互作用。随着光学技术从宏观走向微观,近年来的研究表明:在小于波长的尺度上(即亚波长尺度),规则排列的微结构可作为人造“原子”和“分子”,分别对入射光波的电场和磁场产生响应。在这些微观结构中,光与物质的相互作用变得比传统理论中预言的更强,从而突破了诸多理论上的瓶颈难题,包括衍射定律、衍射极限、吸收厚度-带宽极限等,在大口径望远镜、超分辨率成像、太阳能、隐身和反隐身等技术中具有重要应用前景。譬如,基于梯度渐变的表面微结构,人们研制了多种平面的光学透镜,能够将几乎全部入射光波聚集到焦点,且焦点的尺寸可突破经典的瑞利衍射极限,这一技术为新型大口径、多功能成像透镜的研制奠定了基础。

此外,具有潜在变革性的光学技术还包括量子保密通信、太赫兹技术、涡旋光束、纳米激光器、单光子和单像元成像技术、超快成像、多维度光学存储、柔性光学、三维彩色显示技术等。它们从时间、空间、量子态等不同维度对光波进行操控,形成了覆盖光源、传输模式、探测器的全链条创新技术格局。

值此技术变革的肇始期,清华大学出版社组织出版“变革性光科学与技术丛书”,是本领域的一大幸事。本丛书的作者均为长期活跃在科研第一线,对相关科学和技术的历史、现状和发展趋势具有深刻理解的国内外知名学者。相信通过本丛书的出版,将会更为系统地梳理本领域的技术发展脉络,促进相关技术的更快发展,为高校教师、学生以及科学爱好者提供沟通和交流平台。

是为序。

罗先刚

2018 年 7 月

序 言

混沌是复杂系统中特殊的动力学现象,描述了对系统初始状态高度敏感的无规则动态特性。现代混沌理论起始于 20 世纪 60 年代气象学家爱德华·洛伦茨(Edward Norton Lorenz)在天气预测研究中发现的“蝴蝶效应”。经过 60 年的研究,混沌理论在数学、物理、天文学、化学、社会学等取得了长足发展,特别是与先进的光学、光电子学结合,在保密光通信、激光雷达、传感等应用领域孕育了一系列变革性光学技术。

光电混沌信号产生是混沌应用的基础。混沌信号产生已经从数学方程拓展到基于忆阻器、半导体超晶格、激光器、电光调制器等先进非线性器件的复杂电学和光学系统,甚至光子集成的混沌半导体激光器也已经问世。此外,光电混沌信号产生机理研究,还可以从复杂性科学的角度分析光电器件动力学现象的原因和过程并揭示内在规律,为新型器件设计和研发提供理论依据。

笔者有幸在国家优秀青年科学基金、国家自然科学基金重点、重大仪器、科技部重点研发计划、国际合作等项目支持下,专注从事混沌激光产生与应用研究。在导师王云才教授建议和鼓励下,笔者开始构思和撰写这本书。此书聚焦于光电混沌信号产生这一问题,重点介绍了基于半导体激光器、电光调制器的光学混沌产生理论、方法及特性。目的是为相关专业的研究生、教师以及相关领域的研究人员提供参考。

付梓之际,恰逢混沌科学研究 60 周年。期待混沌信号产生研究能够进一步推动混沌理论的深入发展,促进复杂性科学与其他学科的交叉融合,激发出国家重大需求的新技术。

本书的撰写离不开团队成员的共同努力。在此衷心感谢王云才教授指导,感谢贾志伟副教授、张建国副教授、郭龔强教授、王龙生副教授以及博士研究生李青天、张蓉、王俊丽等人的支持和帮助。第 2~3 章由张建国副教授撰写,第 4 章及第 5 章集成混沌源部分由贾志伟副教授撰写,第 7 章由郭龔强教授撰写,其余章节由笔者撰写。博士研究生李青天、张蓉、王俊丽协助作图和文字校准,全书的统稿由贾志伟副教授协助笔者完成。感谢国家自然科学基金委、科技部、山西省科技厅、

广东省科技厅的项目资助,本书中的相关研究工作才得以完成。

由于作者水平有限,书中难免有不妥和不足之处,恳请广大读者特别是同行专家批评指正,在此我们致以深深的谢意。

本书配有导读视频和图库等资源,请扫二维码观看。



本书导读视频



本书图库

王安帮
2023年9月

目 录

第 1 章 绪论	i
1.1 混沌信号产生的意义	1
1.2 混沌信号产生的研究历程	2
1.2.1 电路混沌产生	2
1.2.2 光学混沌产生	4
1.3 本书结构安排	7
参考文献	8
第 2 章 混沌信号与系统分析方法	13
2.1 前言	13
2.2 混沌系统分析方法	14
2.2.1 稳态解及线性稳定性分析	14
2.2.2 数值仿真	14
2.2.3 分岔图	16
2.3 混沌信号分析方法	18
2.3.1 时域分析法	18
2.3.2 频域分析法	24
参考文献	26
第 3 章 电学混沌信号产生	28
3.1 典型数学混沌系统的电路实现	28
3.1.1 洛伦茨混沌电路	28
3.1.2 逻辑斯谛映射混沌电路	30

3.1.3	帐篷映射混沌电路	30
3.1.4	多涡卷混沌映射电路	31
3.2	基于非线性器件的混沌电路	33
3.2.1	蔡氏混沌电路	33
3.2.2	考毕兹混沌电路	37
3.2.3	布尔混沌电路	44
3.2.4	忆阻器混沌电路	48
	参考文献	54
第4章	半导体激光器基础	57
4.1	半导体激光器原理与结构	57
4.1.1	半导体材料及光学增益	58
4.1.2	半导体激光谐振腔	62
4.1.3	半导体激光器阈值条件	63
4.2	半导体激光器物理特性	64
4.2.1	速率方程	64
4.2.2	稳态特性	65
4.2.3	动力学特性	66
4.3	常用半导体激光器类型	67
4.3.1	FP 半导体激光器	67
4.3.2	DFB 与 DBR 半导体激光器	68
4.3.3	垂直腔面发射激光器	69
4.3.4	微腔半导体激光器	70
	参考文献	72
第5章	半导体激光器产生混沌	74
5.1	引言	74
5.1.1	激光器分类	74
5.1.2	半导体激光器产生混沌典型方法	75
5.1.3	本章内容安排	76
5.2	光反馈 DFB 半导体激光器	77
5.2.1	典型实验装置	77

5.2.2	理论模型	78
5.2.3	稳态及线性稳定性分析	80
5.2.4	长外腔反馈进入混沌的路径	84
5.2.5	短外腔反馈进入混沌的路径	90
5.2.6	光反馈激光器混沌振荡的特征	92
5.2.7	反馈时延特征抑制方法	97
5.3	光注入 DFB 半导体激光器	103
5.3.1	光注入方式	103
5.3.2	连续光单向注入激光器	104
5.3.3	调制光单向注入激光器	108
5.3.4	激光器互注入	113
5.4	光电反馈 DFB 半导体激光器	115
5.4.1	实验装置与理论模型	115
5.4.2	光电反馈半导体激光器的混沌激光产生	116
5.5	混沌带宽展宽方法	119
5.5.1	外光注入	119
5.5.2	复杂光反馈	123
5.5.3	混沌光混频	126
5.5.4	混沌光后处理	130
5.6	其他类型半导体激光器产生混沌	136
5.6.1	多纵模 FP 激光器	137
5.6.2	DBR 激光器产生波长混沌	143
5.6.3	垂直腔面发射激光器	144
5.6.4	微腔激光器	151
5.6.5	纳米半导体激光器	155
5.7	集成混沌激光器	160
5.7.1	模块化集成混沌激光器	161
5.7.2	片上集成混沌激光器	164
5.7.3	展望	171
	参考文献	172

第 6 章 光电振荡系统产生混沌..... 184

6.1	混沌光电振荡器简介	184
-----	-----------------	-----

6.1.1	基本原理	184
6.1.2	研究进展	186
6.2	基于强度调制器的混沌光电振荡器	187
6.2.1	装置与模型	187
6.2.2	线性稳定性分析	189
6.2.3	进入混沌路径	190
6.2.4	光电振荡器混沌信号特性	193
6.2.5	反馈环路结构改进	195
6.3	基于相位调制器的混沌光电振荡器	197
6.3.1	装置与模型	197
6.3.2	混沌信号产生	198
6.3.3	相位光电振荡器的改进	199
6.4	基于其他调制器的混沌光电振荡器	201
	参考文献	204
第7章	混沌激光的量子统计特性	208
7.1	引言	208
7.1.1	光场的量子统计	209
7.1.2	光子的聚束效应	210
7.2	混沌激光的光子统计分布	212
7.2.1	单光子计数	212
7.2.2	混沌激光的光子统计特性	212
7.3	混沌激光的二阶相干度	216
7.3.1	光场的二阶相干度	216
7.3.2	HBT 关联测量	219
7.3.3	混沌激光的二阶相干度	224
7.4	混沌激光量子统计特性的测量	226
7.4.1	微观量子统计特性与宏观动力学特性的测量	226
7.4.2	不同光子数分布下混沌激光二阶相干度的测量结果	230
7.4.3	不同混沌状态下光场二阶相干度的测量结果	231
7.5	本章小结	234
	参考文献	234
	索引	237

第 1 章

绪 论

1.1 混沌信号产生的意义

混沌是非线性系统产生的复杂、无规则的行为,对系统初始值十分敏感,且具有长期不可预测性。混沌理论消除了关于确定性系统可以预测的拉普拉斯幻想,与量子理论、相对论一起被誉为 20 世纪三大科学理论(Gleick,2008)。

混沌现象广泛存在于天体运动、气象演变、神经网络等复杂系统。法国数学家庞加莱在解决行星运动中的三体问题时,指出三体运动对初值十分敏感被认为是混沌理论的开端。法国天文学家拉斯卡尔指出 2 亿年后太阳系所有行星(包括地球)将以混沌轨道运行(Laskar,1989)。英国宇宙学家霍金认为黑洞的形成是一种经典意义下的混沌过程(Hawking,2014)。2021 年,诺贝尔物理学奖授予了在复杂系统研究方面做出杰出贡献的三位学者。其中,乔治·帕里西发现从原子尺度到行星尺度物理系统中无序和涨落的相互作用;真锅淑郎、克劳斯·哈塞尔曼则对地球气候进行物理建模,量化可变性并宏观预测全球变暖。在医学领域,混沌理论被用于降低癫痫病的发作频率(Schiff et al.,1994)。可见,研究非线性系统的混沌现象,对揭示系统内在机理与规律具有重要的科学意义。

随着电子学、光电子学技术和器件的发展,混沌理论在工程应用研究中也得到迅速发展(王云才,2023)。例如,在保密通信领域,可将同步的混沌信号量化产生一致随机密钥,用于高速信息的加密解密(Uchida et al.,2008; Gao et al.,2021);或者利用混沌信号掩藏信息,实现高速信息的安全传输(Argyris et al.,2005)。在雷达领域,将混沌信号作为雷达信号可实现高精度目标探测,同时兼顾良好的抗干扰和抗截获能力(Lin et al.,2004)。在测量与传感领域,利用混沌信号可实现高空

间分辨率的光纤(Wang A B et al., 2021)、电缆故障监测(Wang A B et al., 2011),长距离、高分辨率的分布式光纤传感(Li et al., 2022)。混沌应用的关键在于混沌信号的产生。因此,面向不同应用领域,研究混沌产生及其控制理论与技术就变得尤为重要。

1.2 混沌信号产生的研究历程

1963年,洛伦茨在 *Journal of the Atmospheric Sciences* 上发表文章“Deterministic nonperiodic flow”,开启了现代混沌研究(Lorenz, 1963)。1973年,李天岩与约克共同在 *American Mathematical Monthly* 上发表文章“Period three implies chaos”,第一次使用“chaos”名称并给出了严格的数学定义,标志着混沌理论初步形成(Li T Y et al., 2004)。

早在混沌理论形成之前,混沌现象就已经在电子学、光电子学的实验研究中闪现。1927年,荷兰物理学家范德波尔等利用包含氖辉光灯的RC振荡电路进行分频实验研究,意外发现电容器在某些取值时电路会呈现不规则的“噪声”(Van Der Pol et al., 1927)。这是最早的混沌相关的电路实验记录。1960年,梅曼等报道了世界上第一台激光器——红宝石激光器;第二年就实验观测到红宝石激光器激光强度波形的不规则脉动现象(图1.2.1)(Maiman et al., 1961)。这是历史上第一次观察到激光器的非稳态现象。1973年,Cheng等发现激光金属微加工过程中金属板反射会使Nd³⁺:YAG激光器产生不规则振荡(图1.2.2)(Cheng, 1973),激光器输出脉冲序列的频率和强度均出现无规则起伏,严重恶化金属加工的一致性。

混沌概念提出之后,1976年生态学家罗伯特·梅(Roert-May)在 *Nature* 上发表文章,呼吁不同领域的研究者应当注意在一些简单模型中可能存在令人惊奇的复杂动力学行为,及其在数学、实际应用中的重要意义(May, 1976)。该文章有效推动了混沌信号产生的研究。目前,混沌信号产生主要有电路和光学两类方法,其主要发展历程简介如下。

1.2.1 电路混沌产生

1981年,Paul S. Linsay在实验上通过对变容二极管施加正弦电压,观测到了受迫非谐振子的周期倍增及混沌行为(Linsay, 1981),证实了费根鲍姆提出的倍周期导致混沌的理论预期(Feigenbaum, 1978)。Linsay的受迫非谐振子实验是关于混沌产生的首个电路实验。1983年,蔡少棠设计了一种能产生稳定混沌信号的电路,T. Matsumoto将其命名为蔡氏电路(Matsumoto, 1984)。电路混沌产生主要分为两种方式:一是利用电路构建混沌方程,例如洛伦茨混沌电路、逻辑斯谛映射

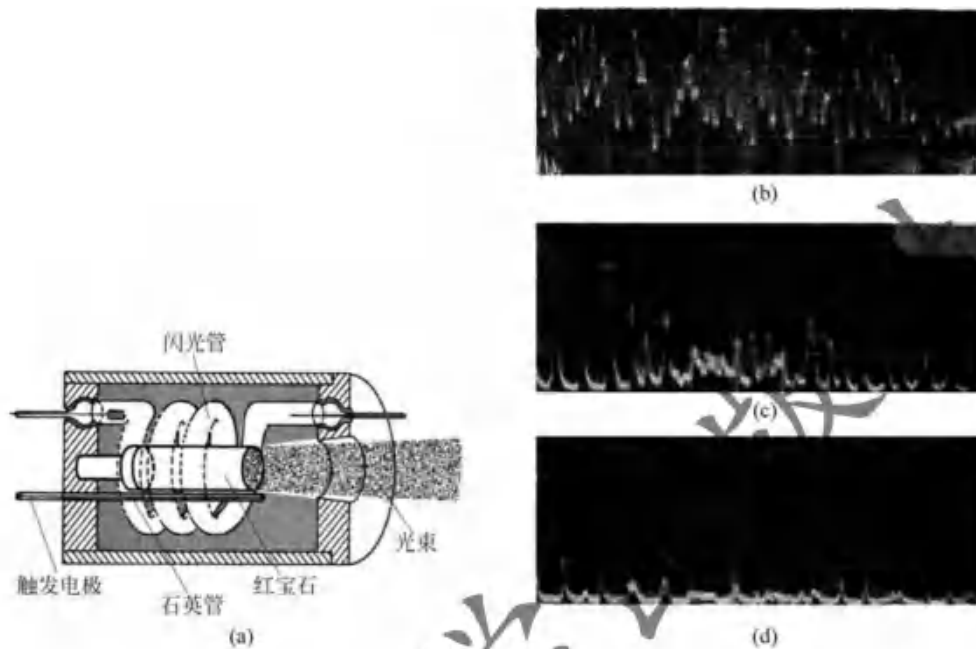
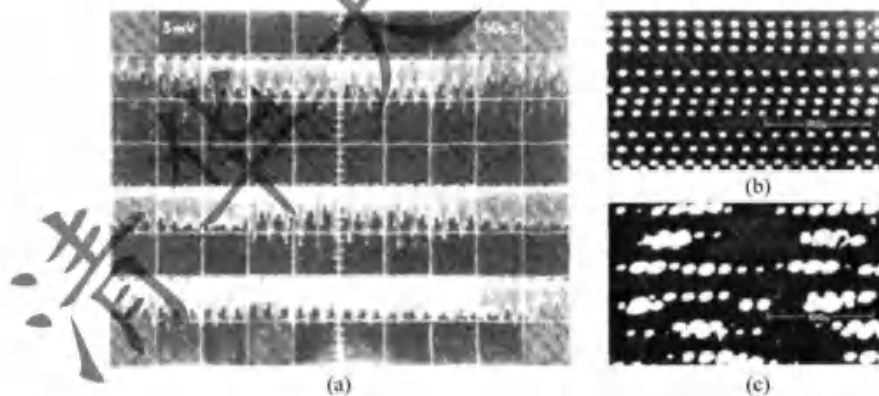


图 1.2.1 红宝石激光器不稳定输出

(a) 灯泵红宝石激光器结构；(b)~(d) 激光器开始振荡之后约 600ps, 1000ps, 1200ps 记录的波形 (10μs/div) (Maiman et al., 1961)

图 1.2.2 $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ 激光器在金属微加工时遭受外部光反馈的影响

(a) 无反馈和(b)有反馈时铌金属膜打孔阵列；(c)反馈情况下激光器输出的不稳定波形 (Cheng, 1973)

混沌电路、帐篷映射混沌电路和多涡卷混沌映射电路等；二是利用非线性电子元件构建非线性电路，如蔡氏混沌电路、陈氏混沌电路、考毕兹混沌电路、布尔混沌电路和忆阻器混沌电路等。

1.2.2 光学混沌产生

1975年,德国斯图加特大学的哈肯(H. Haken)理论上发现均匀加宽单模激光器的麦克斯韦-布洛赫(Maxwell-Bloch)方程与描述流体动力的洛伦茨方程是同构的,并建立了洛伦茨-哈肯(Lorenz-Haken)方程(Haken, 1975)。洛伦茨-哈肯方程不仅为激光器非稳态提供了更本质的解释,同时也预言了激光器可以产生混沌振荡。1980年,池田健介(K. Ikeda)等理论上提出了另一个可以产生光学混沌的模型——包含非线性电介质的环形光学腔(Ikeda et al., 1980)。基于池田模型,研究者发展出基于电光调制器作为非线性元件的光电振荡器(opto-electronic oscillator, OEO),以产生光学混沌(Ikeda et al., 1981)。

1. 激光器混沌

洛伦茨-哈肯方程与洛伦茨方程同构需要严苛的条件:洛伦茨-哈肯模型的速率方程包含电场、电偶极矩、反转粒子数三个物理量,只有当三个物理量的弛豫速率相当时,该模型才与洛伦茨方程同构,方有可能产生混沌。满足此条件的激光器被称为C类激光器(Arecchi et al., 1981)。理论上,C类激光器是不稳定的,自身即可产生混沌振荡。1985年,洛伦茨型混沌在波长 $81.5\mu\text{m}$ 的远红外NH₃激光器中被观察到(Weiss et al., 1985)。

稳定激光器的电场衰变速率通常远小于另外一个或两个物理量的弛豫速率,导致速率方程数量降低(弛豫速率更大的物理量的方程可以忽略)。F. T. Arecchi等将激光器分为A、B、C三类。A类激光器仅用电场速率方程即可描述,如氦离子激光器,波长为 $0.633\mu\text{m}$ 的氦氖激光器、染料激光器等。B类激光器需用电场和反转粒子两者速率方程共同描述,例如红宝石激光器、Nd:YAG激光器、CO₂激光器、半导体激光器等。

A类、B类激光器是稳定的,自身不会产生混沌振荡。T. Yamada等理论研究表明,注入一个调制的光场可以使单模激光器产生混沌(Yamada et al., 1980)。这激发了通过增加激光器自由度产生混沌的思路与方法,例如光反馈、增益调制等。研究者相继利用气体激光器(Arecchi et al., 1982)、半导体激光器(Glas et al., 1983; Cho et al., 1984)、光纤激光器(Phillips et al., 1987)等产生了混沌激光。

值得指出的是,半导体激光器因其体积小、结构简单、混沌复杂度高等优势,已发展成为光学混沌产生的主要器件。早期,研究者就注意到外部光反馈会使半导体激光器产生周期或脉冲振荡、增强低频噪声等现象,并进行了理论探索。尽管这些早期研究并未涉及混沌概念,但却为后来的激光器非线性动力学研究奠定了基础。例如,1980年R. Lang和K. Kobayashi建立了光反馈半导体激光器速率方程(即著名的LK方程),并提出了外腔模式概念(Lang et al., 1980);1982年,

L. Goldberg 等在实验中观察到了外腔模式,并研究了外腔模式对光谱的影响 (Goldberg et al., 1982)。

1983 年,德国科学院 P. Glas 等首次在实验中观察到了 AlGaAs-DH 半导体激光器在外部光栅反馈下的混沌振荡 (Glas et al., 1983)。有趣的是, P. Glas 等明确指出更愿意使用“无规则”而不是“混沌”一词描述这一现象。1984 年,日本大阪大学 Y. Cho 等在国际量子电子学会议上明确报道了外光反馈半导体激光器产生混沌的实验和数值分析结果 (Cho et al., 1984)。1985 年, D. Lenstra 等在实验中发现光反馈导致半导体激光器“相干塌陷”,光谱线宽增大到 25 GHz, 相干长度减小至 10 nm。更有意义的是,他们认为相干塌陷状态并非之前人们认为的噪声,而是混沌 (Lenstra et al., 1985)。1986 年, Y. Cho 等计算了实验测量所得光反馈半导体激光器波形的关联维度,证明了激光器输出为混沌振荡 (Cho et al., 1986)。同年, R. Tkach 和 A. Chraplyvy 研究了光反馈对波长 1.5 μm 的分布反馈 (distributed feedback, DFB) 半导体激光器的影响,揭示了激光器五个典型状态及相应的反馈参数区间 (Tkach et al., 1986)。随后,光反馈半导体激光器进入混沌状态的准周期路径 (Mørk et al., 1990)、倍周期路径 (Ye et al., 1993) 相继被报道。除了光反馈,光注入 (Simpson et al., 1994)、光电反馈 (Lin et al., 2003)、电流调制 (Lee et al., 1985) 等增加自由度方式均被证明可以诱导半导体激光器产生混沌振荡。

随着混沌激光应用的发展需求,混沌激光产生方式的优化是必然趋势,主要体现在以下几个方面。

(1) 集成化以提高鲁棒性: 欧盟框架计划 PICASSO 于 2008 年首次报道了光子集成混沌半导体激光器 (Argüiris et al., 2008); 日本 NTT 公司也于 2011 年报道了光子集成混沌半导体激光器 (Sumida et al., 2011; Harayama et al., 2011)。

(2) 增强带宽: 在连续光输出的激光器中引入混沌光注入 (Uchida et al., 2003), 以及反之 (Wang A B et al., 2008); 或在反馈光路引入额外的光反馈 (Wu et al., 2009a)、非线性器件 (Mercier et al., 2016; Yang et al., 2020) 均可实现带宽增强。通过混沌光的延迟自干涉 (Wang A B et al., 2013a)、光外差 (Wang A B et al., 2013a) 或在混沌光输出端引入光纤环形振荡器 (Wang A B et al., 2013b)、色散光纤 (Li et al., 2018; Zhao et al., 2019) 也可实现带宽增强。

(3) 时延特征抑制: 增加反馈外腔数量 (Wu et al., 2009b)、在光纤反馈回路中引入随机分布反射 (Wang Y C et al., 2012; Xu et al., 2017)、均匀分布反射 (Li et al., 2015)、色散反射 (Wang D M et al., 2017) 等方法均可抑制甚至消除时延特征。

(4) 探索新型激光器的非线性动态及混沌产生: FP 激光器在光反馈情况下可产生多模混沌激光 (Li et al., 2019), 在滤波反馈或光注入下可以实现波长可调谐

的混沌激光(Wang A B et al., 2012);长腔 FP 激光器在光反馈情况下能够产生宽带混沌(Zhong et al., 2023)。在 DBR 激光器光栅区的注入电流中引入非线性反馈,可实现波长混沌产生(Larger et al., 1998)。垂直腔面发射激光器在光反馈或者光注入时具有偏振切换(Paul et al., 2006)、偏振双稳(Pan et al., 2003)、动力学状态切换(Zhang et al., 2021)等现象。二维微腔激光器的 Q 因子高,弛豫振荡频率大,在光反馈下能够产生宽带混沌激光(Wang Y X et al., 2020)。正方形微腔激光器可实现双模或三模激光输出,在光反馈情况下能通过模式拍频实现混沌带宽增强(Li Y L et al., 2022)。

需要说明的是,宽区半导体激光器在光反馈情况下可以产生时空混沌(Adachi et al., 1993)。由于混沌激光的主要应用均是时域混沌,因此本书聚焦于单横模激光器产生的时域混沌。

2. 光电振荡器

利用光电振荡器(OEO)产生混沌的思想,来源于池田模型(Ikeda et al., 1980)。池田模型中,光学环形腔内包含一个光学非线性介质。由于非线性效应较弱,很难实验上实现池田光学混沌信号的产生。1981年,H. M. Gibbs 等将压电晶体置于一对正交的偏振器构成光电混合非线性器件,通过光电反馈构成环形结构,首次实验上产生了池田混沌(Gibbs et al., 1981)。该工作的思路是利用具有非线性响应的光电器件替换非线性光学介质,利用光电反馈代替光反馈,解决了光学池田模型的功率瓶颈。同年,M. Okada 等借鉴 H. M. Gibbs 等的研究思路,利用响应速度更快的电光强度调制器构建光电反馈振荡环,实验观察到了准混沌振荡(Okada et al., 1981)。该工作开启了光电振荡器产生混沌的研究。2004年,R. Genin 等提出基于相位调制器的光电振荡器并观察到了混沌信号的产生(Genin et al., 2004)。

光电振荡器产生混沌的带宽,是由电光调制器、光电探测器、射频放大器三者带宽“交集”决定。当前器件水平可以支持光电振荡器产生宽带混沌。2010年,K. E. Gillan 等利用基于强度调制器的 OEO 实验产生了带宽 8GHz 的混沌信号(Gillan et al., 2010)。需指出的是,其最大李雅普诺夫指数却比较低,仅约为 0.03ns^{-1} 。随后,L. Larger 团队等用一个基于集成 QPSK 调制器的 OEO 结构产生了 13GHz 混沌信号(Nourine et al., 2011)。华中科技大学程孟凡等借鉴电学布尔混沌模型,利用 IQ 调制器结合双延迟反馈环构建光电布尔混沌系统,实验产生 -10dB 带宽为 29GHz 的混沌信号(Luo et al., 2021)。超宽带、高增益的射频放大器,将是 OEO 混沌带宽进一步提升的主要限制因素。

由于电光调制器非线性响应的复杂度较弱,导致混沌信号的复杂度受限。如何提高系统混沌复杂度也成为一个研究方向。2010年,Pere Colet 提出将激光器

光电反馈结构与 OEO 结构结合 (Nguimdo et al., 2010), 抑制系统输出信号的时延特征, 降低系统不稳定状态产生对反馈强度的要求。同理, 光反馈 (Elsonbaty et al., 2018)、光注入 (Zhu et al., 2017) 与 OEO 结构的组合同样可以得到类似的效果。在 OEO 环路中加入多项式变换函数可以产生超混沌信号 (Márquez et al., 2014)。引入频率依赖的群时延模块 (Hou et al., 2016)、非线性放大器 (Talla Mhe et al., 2021)、非线性滤波器 (Kamaha et al., 2020) 等附加非线性器件, 也可提高混沌信号复杂度。随着器件小型化、集成化需求的增加, 基于硅基材料的调制器应用于 OEO 结构中 (Zhang L. et al., 2016)。

1.3 本书结构安排

第 1 章, 绪论。简要介绍混沌产生的理论与工程意义, 混沌产生的研究历程, 以及本书内容与结构安排。

第 2 章, 混沌信号与系统分析方法。主要介绍了面向混沌系统和混沌信号的分析方法, 其中混沌系统分析方法包括分岔图、数值仿真; 混沌信号分析方法包括时域分析法 (李雅普诺夫指数、熵、关联维、自相关、相图) 和频域分析法 (带宽、平坦度)。

第 3 章, 电学混沌信号产生。主要介绍了基于数学模型及非线性器件的电路混沌典型产生方法, 前者包括洛伦茨混沌系统、逻辑斯蒂混沌映射、帐篷混沌映射以及多涡卷混沌映射; 后者包括蔡氏混沌、考毕兹混沌、布尔混沌以及忆阻器混沌。

第 4 章, 半导体激光器基础。首先介绍了半导体激光器的原理及构成, 包括增益材料、谐振腔以及阈值条件等; 然后介绍了半导体激光器的稳态以及动力学特性; 最后介绍了几种常用的半导体激光器, 包括 FP 腔半导体激光器、DFB 腔与 DBR 腔半导体激光器、垂直腔面发射半导体激光器、微腔半导体激光器。

第 5 章, 半导体激光器产生混沌。首先概述了激光器的动力学分类以及半导体激光器产生混沌的典型方法; 然后重点介绍了光反馈 DFB 半导体激光器、光注入 DFB 半导体激光器、光电反馈 DFB 半导体激光器产生混沌以及混沌带宽增强的方法与结果; 最后介绍了其他类型半导体激光器产生混沌以及集成混沌激光器的研究进展。

第 6 章, 光电振荡系统产生混沌。首先概述了光电振荡器的原理及其研究进展; 然后重点介绍了基于马赫-曾德尔调制器和相位调制器的混沌产生方法与结果; 最后列举了基于 IQ 调制器、硅调制器、偏振调制器等其他调制器的光电混沌振荡系统。

第7章,混沌激光的量子统计特性。主要介绍混沌激光的量子特性理论分析、光场判别、光子数分布测量、高阶相干度分析测量等方面的研究进展。

参考文献

- 王云才,2023.混沌信号应用:雷达、传感与保密通信[M].北京:清华大学出版社.
- ADACHI HARA H, HESS O, ABRAHAM E, et al, 1993. Spatiotemporal chaos in broad-area semiconductor lasers[J]. Journal of the Optical Society of America B, 10(4): 678-685.
- ARECCHI F T, LIPPICI L, PUCCIONICI G, et al, 1984. Deterministic chaos in laser with injected signal[J]. Optics Communications, 51(5): 308-314.
- ARECCHI F T, MEUCCI R, PUCCIONICI G, et al, 1982. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser[J]. Physical Review Letters, 49(17): 1217.
- ARGYRIS A, HAMACHER M, CHLOUVERAKIS K E, et al, 2008. Photonic integrated device for chaos applications in communications[J]. Physical Review Letters, 100(19): 194101.
- ARGYRIS A, SYVRIDIS D, LARGER L, et al, 2005. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links[J]. Nature, 438(7066): 343-346.
- CALLAN K E, ILLING L, GAO Z, et al, 2016. Broadband chaos generated by an optoelectronic oscillator[J]. Physical Review Letters, 116(17): 173901.
- CHENG D, 1973. Instability of cavity-dumped YAG laser due to time-varying reflections[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 9(6): 585-588.
- CHO Y, UMEDA T, 1984. Chaos in laser oscillations with delayed feedback: numerical analysis and observation using semiconductor lasers [C]. Anaheim: In International Quantum Electronics Conference (p. WEED), Optica Publishing Group.
- CHO Y, UMEDA T, 1986. Observation of chaos in a semiconductor laser with delayed feedback [J]. Optics Communications, 59(2): 131-136.
- ELSONBATY A, HECAZY S F, OBAYYA S S A, et al, 2018. Simultaneous concealment of time delay signature in chaotic nanolaser with hybrid feedback [J]. Optics and Lasers in Engineering, 107: 342-351.
- FEIGENBAUM M J, 1978. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations[J]. Journal of Statistical Physics, 19(1): 25-52.
- GAO H, WANG A B, WANG L S, et al, 2021. 0.75 Gbit/s high-speed classical key distribution with mode-shift keying chaos synchronization of Fabry-Perot lasers[J]. Light: Science & Applications, 10(1): 1-9.
- GENIN E, LARGER L, GOEDGEBUER J P, et al, 2004. Chaotic oscillations of the optical phase for multigigahertz-bandwidth secure communications [J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 40(3): 294-298.
- GIBBS H M, HOPF F A, KAPLAN D L, et al, 1981. Observation of chaos in optical bistability [J]. Physical Review Letters, 46(7): 474-477.

- GLAS P, MÜLLER R, KLEHR A, 1983. Bistability, self-sustained oscillations, and irregular operation of a GaAs laser coupled to an external resonator[J]. *Optics Communications*, 47(4): 297-301.
- GLEICK J, 2008. *Chaos: Making a new science*[M]. London: Penguin Publishing Group.
- GOLDBERG L, TAYLOR H F, DANDRIDGE A, et al, 1982. Spectral characteristics of semiconductor lasers with optical feedback[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 30(4): 401-410.
- HAKEN H, 1975. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers[J]. *Physics Letters A*, 53(1): 77-78.
- HARAYAMA T, SUNADA S, YOSHIMURA K, et al, 2011. Fast nondeterministic random-bit generation using on-chip chaos lasers[J]. *Physical Review A*, 83(3): 031803.
- HAWKING S W, 2014. Information preservation and weather forecasting in black holes[J]. *arXiv preprint arXiv: 1401.5761*.
- HOU T P, YI L L, YANG X L, et al, 2016. Maximizing the security of chaotic optical communications[J]. *Optics Express*, 24(20): 23439-23449.
- IKEDA K, DAIDO H, AKIMOTO O, 1980. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity[J]. *Physical Review Letters*, 45(9): 709-712.
- KAMAHIA J S D, TALLA MBE J H, WOAFU P, 2020. Routes to chaos and characterization of limit-cycle oscillations in wideband time-delayed optoelectronic oscillators with nonlinear filters[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 37(11): A75-A82.
- LANG R, KOBAYASHI K, 1980. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 16(3): 347-355.
- LARGER L, GOEDGEBUER J P, MEROLLA J M, 1998. Chaotic oscillator in wavelength: a new setup for investigating differential difference equations describing nonlinear dynamics[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 34(4): 594-601.
- LASKAR J, 1989. A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system[J]. *Nature*, 338(6242): 257-258.
- LEE C H, YOON T H, SHIN S Y, 1985. Period doubling and chaos in a directly modulated laser diode[J]. *Applied Physics Letters*, 46(1): 95-97.
- LENSINK D, VERBEEK B, DEN BOEF A, 1985. Coherence collapse in single-mode semiconductor lasers due to optical feedback[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 21(6): 674-679.
- LI J, ZHANG M J, 2022. Physics and applications of Raman distributed optical fiber sensing[J]. *Light: Science & Applications*, 11(128): 1-29.
- LI P, CAI Q, ZHANG J, et al, 2019. Observation of flat chaos generation using an optical feedback multi-mode laser with a band-pass filter[J]. *Optics Express*, 27(13): 17859-17867.
- LI S S, CHAN S C, 2015. Chaotic time-delay signature suppression in a semiconductor laser with frequency-detuned grating feedback[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 21(6): 1800812.
- LI S S, LI X Z, CHAN S C, 2018. Chaotic time-delay signature suppression with bandwidth broadening by fiber propagation[J]. *Optics Letters*, 43(19): 4751-4754.

- LI T Y, YORKE J A, 1975. Period three implies chaos[J]. The American Mathematical Monthly, 82(10): 985-992.
- LI Y L, MA C G, XIAO J L, et al, 2022. Wideband chaotic tri-mode microlasers with optical feedback[J]. Optics Express, 30(2): 2122-2130.
- LIN F Y, LIU J M, 2003. Nonlinear dynamics of a semiconductor laser with delayed negative optoelectronic feedback[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 39(4): 562-568.
- LIN F Y, LIU J M, 2004. Chaotic lidar[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 10(5): 991-997.
- LINSAY P S, 1981. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator[J]. Physical Review Letters, 47(19): 1349-1352.
- LORENZ E N, 1963. Deterministic non-periodic flows[J]. Journal of Atmospheric Science, 20: 130-141.
- LUO H W, CHENG M F, HUANG C M, et al, 2021. Experimental demonstration of a broadband optoelectronic chaos system based on highly nonlinear configuration of IQ modulator[J]. Optics Letters, 46(18): 4654-4657.
- MAIMAN T H, HOSKINS R H, D'HAENENS I J, et al, 1961. Stimulated optical emission in fluorescent solids. II. Spectroscopy and stimulated emission in ruby[J]. Physical Review, 123(4): 1154-1157.
- MATSUMOTO T, 1984. A chaotic attractor from Chua's circuit[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 31(12): 1055-1058.
- MAY R M, 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature, 259(5543): 459-467.
- MERCIER É, WOLFFERSBERGER D, SCIAMANNA M, 2016. Improving the chaos bandwidth of a semiconductor laser with phase-conjugate feedback[C]. Brussels, Belgium: Semiconductor Lasers and Laser Dynamics.
- MÖRK J, MARK J, TROMBORG L, 1990. Route to chaos and competition between relaxation oscillations for a semiconductor laser with optical feedback[J]. Physical Review Letters, 65(16): 1999-2002.
- MÁRQUEZ B A, SÁNCHEZ-VARGAS J J, RAMÍREZ J A, 2014. Polynomial law for controlling the generation of N-scroll chaotic attractors in an optoelectronic delayed oscillator[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 24(3): 033123.
- NGUIMDO R M, COLET P, MIRASSO C, 2010. Electro-optic delay devices with double feedback[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 46(10): 1436-1443.
- NOURINE M, CHEMBO Y K, LARGER L, 2014. Wideband chaos generation using a delayed oscillator and a two-dimensional nonlinearity induced by a quadrature phase-shift-keying electro-optic modulator[J]. Optics Letters, 36(15): 2833-2835.
- OKADA M, TAKIZAWA K, 1981. Instability of an electrooptic bistable device with a delayed feedback[J]. IEEE Journal of Quantum Electronics, 17(10): 2135-2140.
- PAN Z G, JIANG S J, DAGENAIS M, 2003. Optical injection induced polarization bistability in vertical-cavity surface-emitting lasers[J]. Applied Physics Letters, 63(22): 2999-3001.

- PAUL J, MASOLLER C, HONG Y H, et al, 2006, Experimental study of polarization switching of vertical-cavity surface-emitting lasers as a dynamical bifurcation[J]. *Optics Letters*, 31(6): 748-750.
- PHILLIPS M W, GONG H, FERGUSON A I, et al, 1987, Optical chaos and hysteresis in a laser-diode pumped Nd doped fibre laser[J]. *Optics Communications*, 61(3): 215-218.
- RONTANI D, LOCQUET A, SCIAMANNA M, et al, 2007, Loss of time-delay signature in the chaotic output of a semiconductor laser with optical feedback[J]. *Optics Letters*, 32(20): 2960-2962.
- SCHIFF S J, JERGER K, DUONG D H, et al, 1994, Controlling chaos in the brain[J]. *Nature*, 370(6491): 615-620.
- SIMPSON T B, LIU J M, GAVRIELIDES A, et al, 1994, Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser subject to optical injection[J]. *Applied Physics Letters*, 64(26): 3539-3541.
- SUNADA S, HARAYAMA T, ARAI K, et al, 2011, Chaos laser chips with delayed optical feedback using a passive ring waveguide[J]. *Optics Express*, 19(7): 5713-5724.
- TALLA MBÉ J H, ATCHOFFO W N, TCHITNGA R, et al, 2023, Dynamics of time-delayed optoelectronic oscillators with nonlinear amplifiers and its potential application to random numbers generation[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 57(5): 1-7.
- TRACH R, CHRAPLYVY A, 1986, Regimes of feedback effects in 1.5- μm distributed feedback lasers[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 4(11): 1655-1661.
- UCHIDA A, AMANO K, INOUE M, et al, 2008, Fast physical random bit generation with chaotic semiconductor lasers[J]. *Nature Photonics*, 2(12): 728-732.
- UCHIDA A, HEIL T, LIU Y, et al, 2003, High-frequency broadband signal generation using a semiconductor laser with a chaotic optical injection[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 39(11): 1462-1467.
- VAN DER POL B, VAN DER MARK J, 1927, Frequency demultiplication [J]. *Nature*, 120(3019): 364-365.
- WANG A B, WANG B J, LI L, et al, 2015, Optical heterodyne generation of high-dimensional and broadband white chaos[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 21(3): 1800719.
- WANG A B, WANG N, YANG Y B, et al, 2012, Precise fault location in WDM-PON by utilizing wavelength tunable chaotic laser[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 30(21): 3420-3426.
- WANG A B, WANG Y C, HE H C, 2008, Enhancing the bandwidth of the optical chaotic signal generated by a semiconductor laser with optical feedback[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 20(19): 1633-1635.
- WANG A B, YANG Y B, WANG B J, et al, 2013a, Generation of wideband chaos with suppressed time-delay signature by delayed self-interference[J]. *Optics Express*, 21(7): 8701-8710.
- WANG A B, WANG Y C, YANG Y B, et al, 2013b, Generation of flat-spectrum wideband chaos by fiber ring resonator[J]. *Applied Physics Letters*, 102(3): 031112.
- WANG D M, WANG L S, ZHAO T, et al, 2017, Time delay signature elimination of chaos in a

- semiconductor laser by dispersive feedback from a chirped FBG[J]. Optics Express, 25(10): 10911-10924.
- WANG Y C, WANG A B, ZHAO T, 2012. Generation of the non-periodic and delay-signature-free chaotic light [C]. Palma: 2012 International Symposium on Nonlinear Theory and its Application; 126-129.
- WANG Y X, JIA Z W, GAO Z S, et al, 2020. Generation of laser chaos with wide-band flat power spectrum in a circular-side hexagonal resonator microlaser with optical feedback[J]. Optics Express, 28(12): 18507-18515.
- WEISS C O, KLISCHE W, ERING P S, et al, 1985. Instabilities and chaos of a single-mode Nd:YAG ring laser[J]. Optics Communications, 52(6): 405-408.
- WU J G, XIA G Q, CAO L P, et al, 2009a. Experimental investigations on the external cavity time signature in chaotic output of an incoherent optical feedback external cavity semiconductor laser[J]. Optics Communications, 282: 3153-3156.
- WU J G, XIA G Q, WU Z M, 2009b. Suppression of time delay signatures of chaotic output in a semiconductor laser with double optical feedback[J]. Optics Express, 17(23): 20124-20133.
- XU Y P, ZHANG M J, LU P, et al, 2017. Time-delay signature suppression in a chaotic semiconductor laser by fiber random grating induced random distributed feedback[J]. Optics Letters, 42(20): 4107-4110.
- YAMADA T, GRAHAM R, 1980. Chaos in a laser system under a modulated external field[J]. Physical Review Letters, 45(16): 1323-1324.
- YANG Q, QIAO L, ZHANG M, et al, 2020. Generation of a broadband chaotic laser by active optical feedback loop combined with a high nonlinear fiber [J]. Optics Letters, 45 (7): 1750-1753.
- YE J, LI H, MCINERNEY J G, 1999. Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback[J]. Physical Review A, 47(3): 2249-2252.
- ZHANG L, DING J F, YANG J, et al, 2016. Complexity in nonlinear delayed feedback oscillator with silicon Mach-Zehnder modulator [C]. Shanghai: 2016 IEEE 13th International Conference on Group IV Photonics (GFP); 84-85.
- ZHANG T, JIA Z W, WANG A B et al, 2021. Experimental observation of dynamic-state switching in VCSELs with optical feedback[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 33(7): 335-338.
- ZHAO A, JIANG X, LIU S, et al, 2019. Wideband time delay signature-suppressed chaos generation using self-phase-modulated feedback semiconductor laser cascaded with dispersive component[J]. Journal of Lightwave Technology, 37(19): 5132-5139.
- ZHONG X H, JIA Z, LI Q, et al, 2023. Multi-wavelength broadband chaos generation and synchronization using long-cavity FP lasers[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, 29(6): 1-7.
- ZHU X H, CHENG M F, DENG L, et al, 2017. An optically coupled electro-optic chaos system with suppressed time-delay signature[J]. IEEE Photonics Journal, 9(3): 1-9.

第 2 章

混沌信号与系统分析方法

2.1 前言

混沌源自于非线性系统。在物理学中,如果描述某个系统的方程其输入(自变量)与输出(因变量)不成正比,则称其为非线性系统。非线性系统和线性系统最大的差别在于,非线性系统可能会导致混沌、不可预测或不可观测的结果。而非线性动力学是一门利用定性或定量,数值或解析,又或者实验的方法来具体研究非线性系统基本变化规律的新兴学科和热门研究领域。

动力学最初是经典力学的分支学科,主要用于研究物体运动状态与其所受外力之间的关系。17世纪中叶,艾萨克·牛顿爵士利用其发明的微分方程,发现了一系列有关运动和引力的定律,并首次利用动力学完美解释了开普勒提出的行星运动规律。如今,动力学思想早已渗透于众多研究领域,例如物理学、力学、地球科学、应用数学、生命科学和工程技术等,几乎所有与时间有关的问题都可以抽象成某种动力学系统,即一个状态随时间变化的系统。

一般来说,非线性系统的行为可以用非线性微分方程或迭代映射来描述,后者也被称为差分方程,两者的区别是非线性微分方程用于描述连续动力系统,而迭代映射用于描述离散动力系统(陈关荣,2003)。

洛伦茨系统是非线性系统的经典范例,其非线性微分方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.1.1)$$

式中,参数 a, b, c 均为常量,且 $a, b, c > 0$,通常取 $a = 10, b = 8/3, c > 1$ 。洛伦茨方程存在两个非线性项:二次项 xy 和 xz ,使得这个看起来简单的非线性系统可以展现出极其复杂的动力学特性。

2.2 混沌系统分析方法

混沌系统分析旨在利用数学方法研究非线性系统中的混沌现象。它的主要目的是理解复杂系统中的行为模式和规律性,并预测系统的未来发展趋势。混沌系统分析涉及许多数学概念和工具,如分岔理论、自相似性、分形几何学等。通过这些工具,可以分析混沌系统的动力学状态,如稳态、周期态和混沌态等。

2.2.1 稳态解及线性稳定性分析

对于非线性微分方程或混沌系统的数值模型 $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$,令物理变量的微分项为零,求解 $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$,可得到系统稳态解 $\mathbf{X}_s$ 。进一步,利用微扰理论分析系统在该稳态解附近的稳定性,可以得到系统的特征方程和特征振荡。具体方法简述如下:令 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_s + \delta\mathbf{X}e^{i\lambda t}$,并代入非线性微分方程,消去稳态解,忽略高阶小量,可得线性代数方程组 $(\mathbf{F}'(\mathbf{X}_s) - \lambda\mathbf{I})\delta\mathbf{X} = 0$,其特征方程为 $|\mathbf{F}'(\mathbf{X}_s) - \lambda\mathbf{I}| = 0$ 。特征方程通常为超越方程,可用数值方法求解。特征根 λ 通常为复数,可以视为系统对微扰的响应,即系统的特征振荡。特征根的虚部 $\text{Im}(\lambda)$ 表示振动角频率,实部 $\text{Re}(\lambda)$ 表示该频率振动的阻尼系数。当阻尼系数大于零时,表示该频率的响应振动将逐渐增强,系统在该稳态解的附近是不稳定的。对光反馈半导体激光器和光电振荡器的稳态解和线性稳定性分析,可分别见 5.2.3 节和 6.2.2 节。

2.2.2 数值仿真

由于大多数非线性微分方程难以获得解析解,因此需要采用数值计算方法近似求解非线性微分方程。龙格-库塔(Runge-Kutta)法是一种应用广泛的高精度数值计算方法。MATLAB 软件的常微分方程求解器 ODE45 和延时微分方程求解器 ODE23 的核心就是龙格-库塔法。

使用龙格-库塔法求解洛伦茨方程,方程及其初始条件具体如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y, \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2, \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 50] \quad (2.2.1)$$

设定好初始值 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, 0)$ 后,通过不断迭代,即可得到方程的数值解。

上述条件下洛伦茨方程具有如同振翅蝴蝶般的相图,如图 2.2.1 所示。

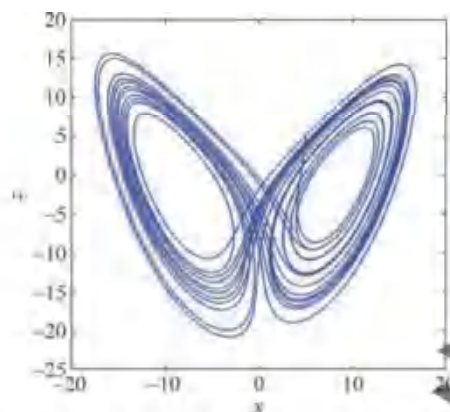


图 2.2.1 洛伦茨方程的相空间轨迹图(x - z 平面)

通过对相图的分析,可以发现洛伦茨系统的重要特性。图 2.2.2 中展示了洛伦茨方程的两条解曲线(分别为蓝色和黄色轨迹)在三维空间中演变的三个不同时段,它们对应的初始点分别为 $P_1(0,2,0)$ 和 $P_2(0.00001,2,0)$,两者只是在 x 轴坐标上相差 10^{-5} 。注意,这两条轨迹起初几乎是重合的,但随着时间的推移,轨迹分离就变得愈发明显。这反映了洛伦茨混沌系统的重要特征:方程对于初始条件具有敏感依赖性,这也预示了任何企图对混沌系统做出长期准确预测的想法都是不切实际的。

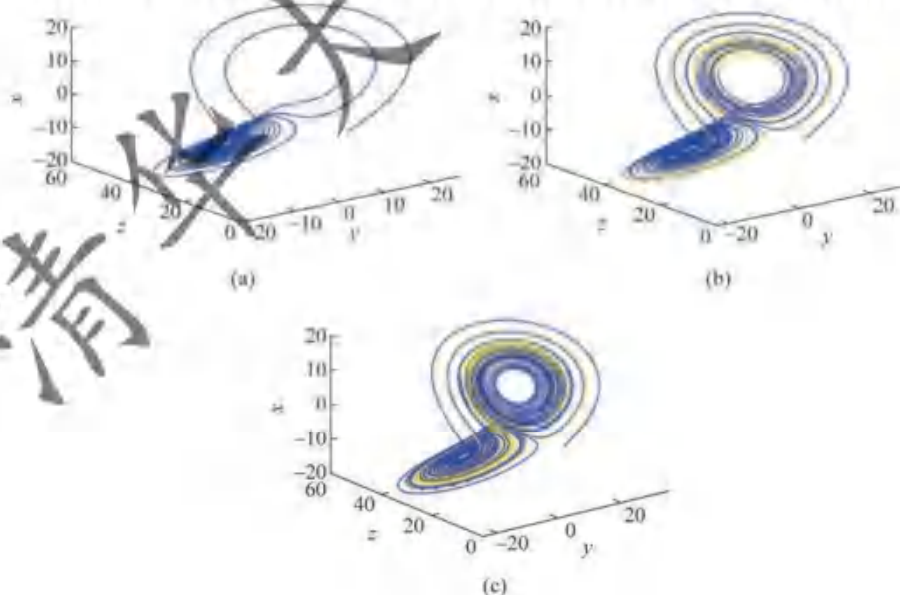


图 2.2.2 两个相邻初值条件的洛伦茨系统状态轨迹
(a) $t=25s$; (b) $t=35s$; (c) $t=50s$

2.2.3 分岔图

对混沌动力学系统而言,一般存在以下若干种状态:稳态、周期振荡状态、准周期振荡状态和混沌振荡状态。倍周期分岔道路是混沌动力学系统中一条常见的通向混沌的路径,它指的是当系统在某个参数值下出现周期性振荡时,随着参数的变化,振荡周期呈现出倍增现象(通常以2的幂指数增加),形成了一系列的周期倍增分岔现象。其具体过程可归纳为:稳态 $\rightarrow$ 周期态(周期1) $\rightarrow$ 周期2 $\rightarrow$ 周期4 $\rightarrow$... $\rightarrow$ 周期 2^n $\rightarrow$ 混沌态,该过程也被称为费根鲍姆路径(Feigenbaum, 1978)。

分岔图是一种描述非线性系统动力学行为演化的图形。分岔图的横轴代表系统控制变量(参数),纵轴代表系统状态时间序列的所有极值。当时间序列所有极值相等时,分岔图上呈现为一个点,此时对应于稳态。改变控制参数,当序列出现单个极大值和单个极小值时,分岔图上呈现为两个点,此时为单周期振荡状态;以此类推,当极大值和极小值的数量增至有限多个,系统进入多周期振荡。当极大值和极小值呈现随机分布,甚至发生交叠,则意味着混沌振荡状态。需要指出的是,仅用序列的极大值也可以绘制分岔图。

以下介绍几种典型的混沌系统及其分岔图。

1. 洛伦茨系统

洛伦茨系统是三个变量的一阶微分方程组,用于描述大气中的热对流运动(Lorenz, 1963)。

洛伦茨系统的动力学方程如式(2.1.1)所示。

图2.2.3给出了当 $\sigma=10, \rho=8/3$ 时,洛伦茨系统随参数 c 变化的分岔图。当 c 取值较小时,系统处于稳定状态,随着 c 的增大,系统逐渐趋于复杂,最终呈现出混沌状态。

2. 逻辑斯谛映射

逻辑斯谛映射是一种二次多项式映射,是Robert May在研究“虫口”和“人口”种群数量变化时提出的,因此又被称为虫口模型(May, 1976)。逻辑斯谛映射的迭代公式为

$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (2.2.2)$$

式中, $x_n \in (0, 1)$, λ 为系统的状态控制参数, $\lambda \in (0, 1)$ 。逻辑斯谛映射随 λ 变化的分岔图如图2.2.4所示。当 $0 \leq \lambda < 1$ 时,系统处于稳态,只存在不动点0;当 $1 \leq \lambda < 3$ 时,系统处于周期1状态;当 $3 \leq \lambda < 4$ 时,逻辑斯谛系统动力学行为变得越来越复杂,历经周期2状态、周期4状态、周期8状态等直至进入混沌状态。在 $\lambda = 3.836$ 时,逻辑斯谛映射出现周期3状态,而周期3往往意味着混沌态的出现(Li T Y et al., 1975)。

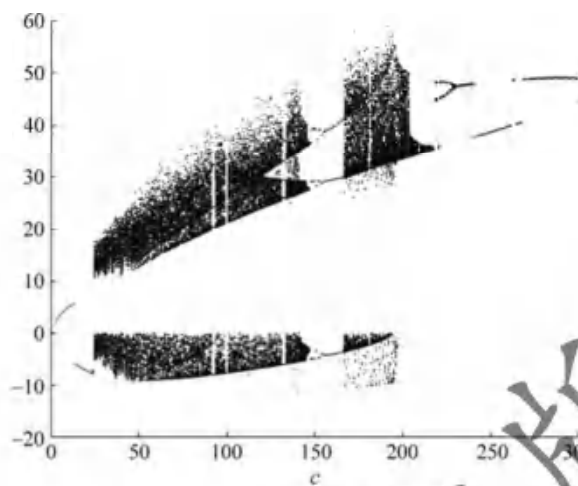


图 2.2.3 洛伦茨系统的分岔图

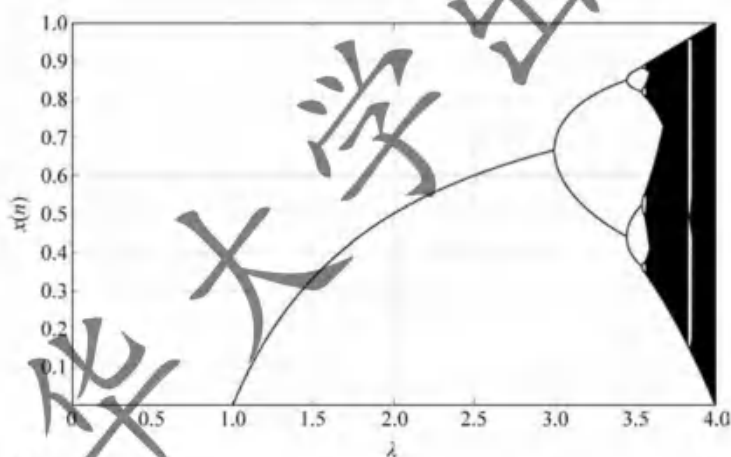


图 2.2.4 逻辑斯谛映射的分岔图

3. 帐篷映射

帐篷映射(tent map)是一种分段线性一维映射,因其函数图像类似帐篷而得名(Yoshida et al., 1983)。帐篷映射的迭代运算表达式为

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu(0.5 - |x_n - 0.5|) \quad (2.2.3)$$

式中, $x_n \in (0, 1)$, 参数 μ 控制系统的状态。图 2.2.5 为式(2.2.3)随参数 μ 变化的分岔图。取初值为 0.4, 当 $0 \leq \mu \leq 1$ 时, 系统处在稳态; 当 $1 < \mu < 2$ 时, 开始分岔直接进入混沌态。

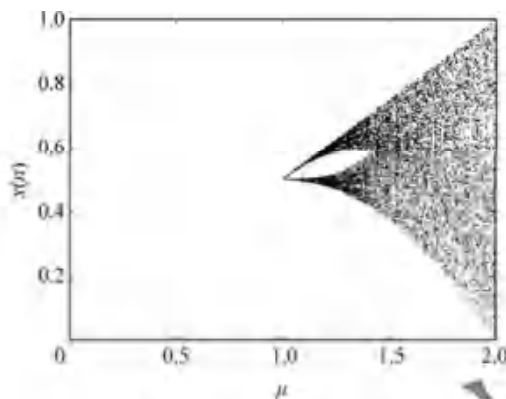


图 2.2.5 帐篷映射的分岔图

2.3 混沌信号分析方法

2.3.1 时域分析法

时域表征利用混沌信号的时序来分析混沌系统在时间域上的动态特性。常见的时域表征方法包括李雅普诺夫指数、熵、关联维数、自相关函数和相图等。通过时域分析法可以判断非线性系统是否处于混沌状态并分析其随机性(Deborah et al., 2005; Kanno et al., 2016)。

混沌信号的时序与噪声信号类似,是一种非周期的振荡,因此当观察到时序中的信号幅值随时机随机起伏变化时,可以根据这个特征来初步判断系统是否工作在混沌振荡状态。图 2.3.1 展示了洛伦茨方程中 x 的时序图,从图中可以看出混沌信号具有以下两个特征:一是其幅值始终在一定范围内变化,整体具有稳定性;二是信号呈现出非周期特性。

1. 最大李雅普诺夫指数

李雅普诺夫指数用于量化动力系统中相邻轨迹之间的分离速率,它决定了动力系统的可预测性。通常,判断一个系统是否为混沌系统的重要判据是其具有至少一个正的李雅普诺夫指数,或者最大李雅普诺夫指数(largest lyapunov exponent, LLE)大于零。李雅普诺夫指数值与系统的复杂程度有关,李雅普诺夫指数越大,混沌系统越复杂。

以一维连续自治系统为例,说明最大李雅普诺夫指数的定义。一维系统的迭代方程为

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.3.1)$$

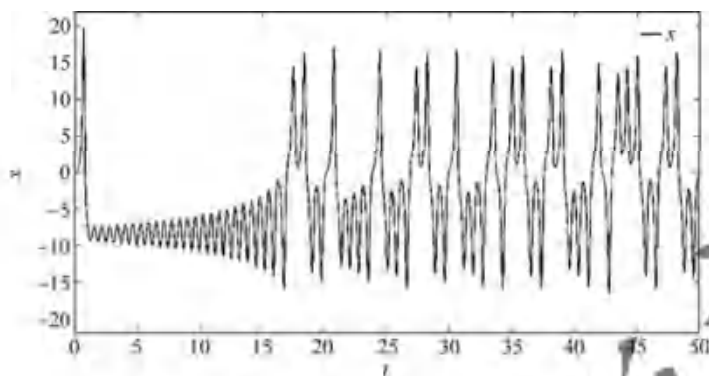


图 2.3.1 洛伦兹系统的时序图

初始位置为 x_0 , 邻近点位 $x_0 + \delta x$, 经一次迭代后, 两点之间的距离为

$$\delta x_1 = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \delta x \quad (2.3.2)$$

经 n 次迭代后, 得到下式:

$$\delta x_n = |f^n(x_0 + \delta x) - f^n(x_0)| = \frac{df^n(x_0)}{dx} \delta x = e^{\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i} \delta x \quad (2.3.3)$$

式中, $\lambda_i(x)$ 就称为李雅普诺夫指数, 变形后得

$$\lambda_i(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| \quad (2.3.4)$$

上式与初值无关, 可以进一步改写为

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \sum_{j=0}^{n-1} f'(x_j) \right| \quad (2.3.5)$$

λ_i 是一个实数, 当 λ_i 为正数时, 相邻轨迹随着时间演化分离, 长时间行为对初始条件敏感, 系统具有混沌特征; λ_i 为负数时, 相邻轨迹随时间演化靠拢, 相体积收缩, 运动稳定, 且对初始条件不敏感; 当 λ_i 等于 0 时, 随着时间演化相邻轨迹保持不变, 对应于稳定边界。因此, λ_i 大于 0, 可以作为混沌行为的判据。

对于具有明确非线性函数的动力学系统可以通过方程计算 LLE。也可以记录系统输出一段时间序列, 数值计算重构相空间内的轨道分离速度, 估算系统的 LLE (Rosenstein et al., 1992)。若时间序列含有噪声, 则在计算 LLE 之前应对时间序列进行降噪预处理。此外, 对于有时间标度的序列, LLE 的量纲为时间的倒数。图 2.3.2 为逻辑斯蒂映射随参数 λ 变化的李雅普诺夫指数图。李雅普诺夫指数大于零的参数取值范围, 系统处于混沌状态。

图 2.3.3 为帐篷映射随着 μ 变化的李雅普诺夫指数图, 当 μ 的值无限趋近于 2 时, 帐篷映射的李雅普诺夫指数随之趋近最大值 0.693。

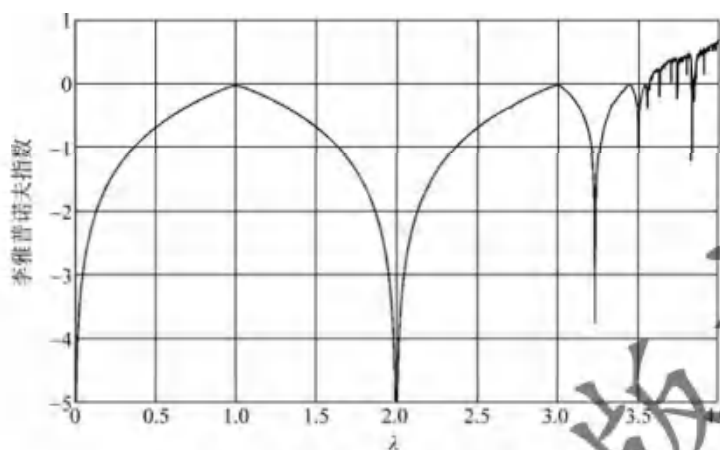


图 2.3.2 逻辑斯谛映射的李雅普诺夫指数图

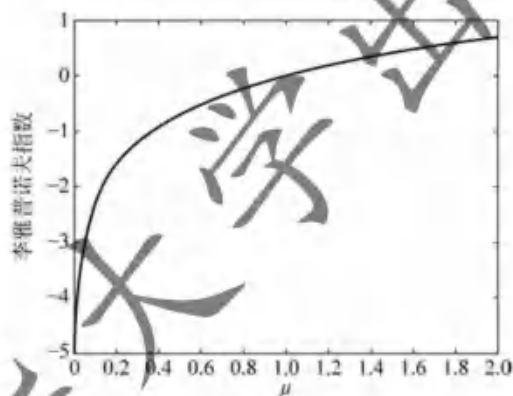


图 2.3.3 帐篷映射的李雅普诺夫指数图

2. 熵

熵是热力学中的一个物理量,表示系统的混乱程度或无序程度。熵的增加表示系统的无序程度增加,而熵的减少则表示系统的有序程度增加。在混沌系统中,微小的扰动会导致系统的演化出现极其复杂的行为,这种复杂性表现为系统的无序程度增加,因此熵也被用来描述混沌系统的演化过程、混沌程度以及系统中不可预测的行为。常见的熵评估方法主要包括香农熵、排列熵、最小熵、柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)熵或 K 熵等。

1) 香农熵

美国数学家香农(Shannon)于 1948 年将物理学中熵的概念进一步拓展,提出了信息熵来度量事件的不确定性,也叫作香农熵(Shannon, 1948)。信息中包含的

信息量与其不确定性相关,利用香农熵量化两者的关系,其定义为:如果 p 为某个事件发生的概率,则这个事件所包含的信息量为 $-\log_2 p$ 。如果一个事件中包含有 n 个概率,那么事件的信息量可以用所有子事件信息量的期望来表示,例如一个随机变量 X 的概率分布为 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$,则随机变量 X 的香农熵为

$$H = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad (2.3.6)$$

香农熵的值 H 越大,表示随机变量 X 的概率分布越不确定,当其概率分布中的每个概率值都相等,即 $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ 时,香农熵的值 H 达到最大,为 $\log_2 n$ 。反之,若 H 的值越小,则表示其概率分布越确定,当随机变量的概率分布中有一个概率为 1,其余概率都为 0 时,香农熵的值 H 达到最小,为 0。香农熵为非负值,且香农熵的值与其概率分布中概率的排列顺序无关。

2) 排列熵

2002 年, C. Bandt 等提出了排列熵(permutation entropy, PE)来衡量序列复杂程度(Bandt et al., 2002)。排列熵是一种测量非平稳时间序列不规则性的方法,其引入排列的概念,对重构数据的复杂程度进行运算。如果序列是有序的,则排列熵的值很低,若序列是无规则的、不重复的混沌序列,则排列熵值很高。排列熵具有一定的计算复杂度和鲁棒性,被广泛应用于非线性信号特征值提取(Zanin et al., 2012)。其具体算法为:若 X 为一维时间序列,且 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,首先选择合适的重构维数 m 和延迟时间 τ ,并对一维时间序列 X 中的元素 x_i ($1 \leq i \leq n - m\tau + \tau$) 进行相空间重构,得到序列的相空间矩阵 X_m 。

$$X_m = \{x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}, \dots, x_{i,m}\} \quad (2.3.7)$$

接着,对 X_m 中的元素进行升序排列, m 个元素共有 $m!$ 种排列方式,根据式(2.3.7)计算每种排列方式的概率分布 P_e ($1 \leq e \leq m!$)。式中, P_e 表示 X_m 的排列方式为 e 的概率, e 表示 $m!$ 种不同的排列方式,当 i 时刻 X_m 的排列方式为 e 时, $f(X_m)$ 为 1, 否则为 0。

$$P_e = \frac{\sum_{i=1}^{n-(m-1)\tau} f(X_m)}{n - (m-1)\tau} \quad (2.3.7)$$

最后,根据式(2.3.8)计算序列 X 的排列熵 H ,其取值范围为 $[0, 1]$,排列熵值越高表明序列复杂程度越高。当 $m!$ 种排列方式等概率出现时,序列具有良好的随机性,其排列熵可达到最大值 1。

$$H = -\frac{\sum_{e=1}^{m!} P_e \ln(P_e)}{\ln(m!)} \quad (2.3.8)$$

3) 最小熵

2012年,美国国家标准与技术研究院发布的 NIST SP 800-90B 标准中提出了最小熵的概念。最小熵作为衡量随机变量预测难度的指标,其值越大,则意味着随机信号越难预测(Barker et al., 2012; Li H et al., 2023)。若独立离散随机变量 X 的样本空间为集合 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, 对应的概率分布为 $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, \dots, k$, 此时随机变量 X 的最小熵的定义为

$$\begin{aligned} H_{\min} &= \min_{1 \leq i \leq k} (-\log_2 p_i) \\ &= -\log_2 \max_{1 \leq i \leq k} p_i \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

如果 X 具有最小熵 H , 那么随机变量 X 的样本空间中任何特定值的概率都不大于 2^{-H} 。若随机变量的样本空间包含 k 个不同值, 当随机变量具有均匀概率分布时, 即 $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$, 其最小熵取到最大值 $\log_2 k$ 。

3. 关联维数

关联维数通常被用于表征混沌序列的复杂度, 或区分混沌与噪声。计算关联维数通常采用 GP 算法(Grassberger and Procaccia, 1983), 也需对时间序列进行相空间重构。C-C 方法可为相空间重构提供时延参数评估(Kim et al., 1998)。下面简述关联维数的定义。

m 维相空间中的一对相点:

$$\begin{cases} X(t_i) = (x(t_i), x(t_{i+\tau}), \dots, x(t_{i+(m-1)\tau})) \\ X(t_j) = (x(t_j), x(t_{j+\tau}), \dots, x(t_{j+(m-1)\tau})) \end{cases} \quad (2.3.10)$$

它们之间的欧氏距离 $r_0(m)$, 相空间维数 m 的函数, 即

$$r_0(m) = \|X(t_i) - X(t_j)\| \quad (2.3.11)$$

给定一临界距离 r , 距离小于 r 的点数在所有点数中所占比例记为关联积分 $C(r, m)$:

$$C(r, m) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} H(r - \|X_i - X_j\|) \quad (2.3.12)$$

式中, N 为总相点数, $H(\cdot)$ 为赫维赛德(Heaviside)阶跃函数, 定义为

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.3.13)$$

关联维数的定义为

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln C(r, m)}{\ln r} \quad (2.3.14)$$

关联维数也是对相空间中吸引子复杂程度的度量。对于随机序列, 随着嵌入维数的升高, 关联维数不断增大; 对于混沌信号, 随着嵌入维数的升高, 关联维数

会出现饱和现象。

4. 自相关函数

自相关函数 (autocorrelation function, ACF) 是一种用于描述时间序列相关性的统计量。它可以衡量时间序列中一个时刻的值与其他时刻的值之间的关系,从而刻画时间序列的相关性结构。自相关函数可以用来判断时间序列的周期性和随机性,因为周期信号和准周期信号的自相关函数一般为周期函数,而混沌信号的自相关函数与 δ 函数类似,仅在零时刻处有峰值,随着与零时刻处距离的拉远,峰值迅速衰减至 0 附近。自相关函数计算公式可以表示为

$$C(\Delta t) = \frac{([I(t + \Delta t) - \langle I(t + \Delta t) \rangle][I(t) - \langle I(t) \rangle])}{\sqrt{(\langle [I(t + \Delta t) - \langle I(t + \Delta t) \rangle]^2 \rangle \langle [I(t) - \langle I(t) \rangle]^2 \rangle)}} \quad (2.3.15)$$

式中, $I(t)$ 表示混沌信号的时间序列, $\langle \cdot \rangle$ 表示对时间求平均, Δt 表示延迟时间。

在混沌系统中,自相关函数通常表现出快速衰减的特点。这意味着随着系统的演化,系统在时间上迅速丧失了相关性。这是混沌系统的一种重要特征,被称为“快速自相关衰减”。图 2.3.4 为洛伦茨系统中状态变量 x 的自相关函数图,从中可以发现当洛伦茨系统处于混沌状态时,其时序信号的自相关函数呈现 δ 冲激函数形状。此外,混沌系统的自相关函数还可以用于刻画系统的时间尺度。通过分析自相关函数的衰减速率或其宽度,可以推断系统内部的时间尺度或特征时间。

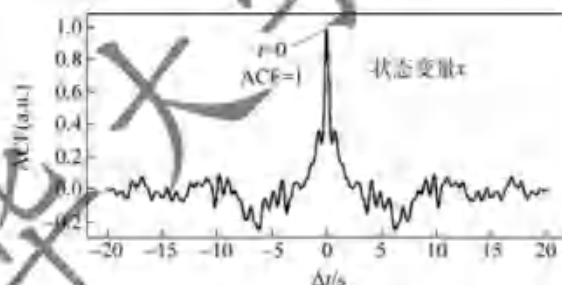


图 2.3.4 洛伦茨系统中状态变量 x 的自相关函数,系统参数为 $a=10, b=8/3, c=28$

5. 相图

相图是用于描述混沌系统状态演化的一种图形表示方式。相图通常用相空间中的轨迹来表示系统状态随时间的变化。对于一个混沌系统,可能具有多个状态变量,例如洛伦茨系统有三个状态变量 x 、 y 和 z 。因此,相图可以是一个三维空间中的轨迹图,或者是将其中两个状态变量绘制在二维平面上的相位图。对于一维时间序列 $x(t)$,可以用 $x(t)$ 与延序列 $x(t-\text{lag})$ 构建相图, lag 为延迟时间。

在相图中,每个点代表了系统在不同时间点的状态。非线性动力学系统的相图通常具有以下特征。