第 7 章　向量代数与空间解析几何

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　基本要求

1. 理解向量的概念.
2. 掌握向量的线性运算.
3. 理解向量的几何表示.

7.1.2　答疑解惑

1. 向量与标量在表示方法上有什么区别？

答　在手写体中，向量的上方有箭头，而标量没有；在印刷体中，若用单个字母表示向量，则用粗体字母表示该向量，或者不用粗体但是字母上方加箭头；若用两个字母表示向量，则上方加箭头，而标量不用粗体，也不加箭头. 例如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{F}$，$\vec{a}$，$\vec{i}$，$\vec{v}$，$\vec{F}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$ 等都可表示向量.

2. 向量的起点都在坐标原点吗？

答　本书讨论的向量都是自由向量，它的起点不是固定的，不一定在坐标原点，可以根据需要移动.

3. 当 A, B 为不同点时，$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 相等吗？

答　不相等，因为向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的大小相等，但方向相反，所以它们不相等. 本书讨论的是自由向量，即只考虑向量的大小和方向，而不考虑向量的起点，因此，我们把大小相等、方向相同的向量称为相等的向量. 由于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 的方向总是不同的，所以它们不相等.

4. 向量在轴上的投影是不是向量？

答　向量在轴上的投影是一个数量，它可正可负可为零，而不是一个向量.

7.1.3　基本题型分析

题型　有关向量的运算问题

例 1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=(1-3)\boldsymbol{a}+\left(-1-\dfrac{5}{2}+1\right)\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}-\dfrac{5}{2}\boldsymbol{b}$.

例 2　已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，求一个向量 $\boldsymbol{c}$，使之平分向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

解　因为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，所以其单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 存在，且 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$. 以 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 为邻边所生成的平行四边形是一个菱形，这个菱形的对角线平分对角，于是可

取 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

例 3　在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，证明四边形 $ABCD$ 为梯形.

分析　若能利用向量关系证明四边形 $ABCD$ 中的一组对边互相平行，则可知四边形 $ABCD$ 为梯形.

证明　在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$，所以向量 $\overrightarrow{AD}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$，即四边形 $ABCD$ 中的一组对边 AD 和 BC 互相平行，于是四边形 $ABCD$ 为梯形.

7.1.4　习题全解

1. 设 A,B,C 为三角形的三个顶点，求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

解　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{0}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 4，它与轴 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 60°，求 $\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影.

解　$\boldsymbol{a}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos 60^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$.

4. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

解　如图 7-1 所示，四边形 $ABCD$ 中，令点 M 为对角线 AC 与 BD 的交点，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 中的一组对边 AB 和 DC 互相平行且相等，于是四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

7.2　空间直角坐标系与向量的坐标

7.2.1　基本要求

1. 掌握空间直角坐标系和空间点的直角坐标的概念.
2. 掌握空间两点间的距离公式.
3. 掌握向量的坐标表示法.
4. 掌握向量的模、单位向量及方向余弦的坐标表达式.

7.2.2　答疑解惑

1. 空间直角坐标系中的三个坐标轴的顺序是任意的吗？

答　空间直角坐标系中的三个坐标轴的顺序是遵循右手规则的，即以右手握住 z 轴，当右手的四指从 x 轴的正向以 $\dfrac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时，竖起大拇指的指向就是 z 轴的正向. 画坐标系的时候，一般 z 轴向上，y 轴向右，x 轴向左下方. 为直观起见，有时会旋转坐标轴.

2. 引入向量的坐标对向量的运算有什么作用？

答　引入向量的坐标以后，就可将向量的运算转化为代数运算，计算起来比较方便.

3. 向量的坐标是如何建立的？

答　在空间直角坐标系中，向量的坐标就是该向量在三个坐标轴上的投影组成的有序数组. 例如，设 $\overrightarrow{MN}$ 为空间直角坐标系中的一个向量，点 M 的坐标为 (x_1,y_1,z_1)，点 N 的坐标为 (x_2,y_2,z_2). 向量 $\overrightarrow{MN}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1，于是向量 $\overrightarrow{MN}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}^{\dagger}$.

7.2.3　基本题型分析

题型一　空间直角坐标的概念

例 1　在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，画出点 $A(0,\ 0,\ 1)$，$B(2,\ 1,\ 0)$，$C(1,\ 2,\ 3)$.

解　根据点 A 的坐标可知，A 点在 z 轴上，B 点在 xOy 坐标面上. 画点 C 时，先在 x 轴的正方向上取1个单位的点，y 轴的正方向上取 2 个单位的点，过这两点在 xOy 坐标面上分别作 y 轴与 x 轴的平行线，交于点 M，过 M 作 z 轴的平行线 MN，在直线 MN 上，点 M 的上方取3个单位便得到点 C，如图 7-1 所示.

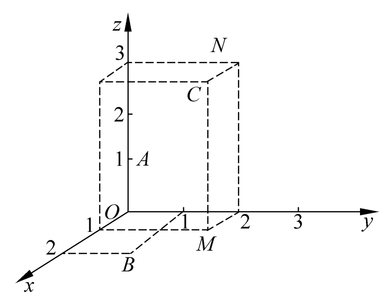

图　7-1

例 2　求点 $A(1,\ 2,\ 3)$ 分别关于下列条件对称点的坐标：（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点.

解　（1）点 $A(1,2,3)$ 关于 xOy 坐标面的对称点为 $(1,2,-3)$，关于 yOz 坐标面的对称点为 $(-1,2,3)$，关于 zOx 坐标面的对称点为 $(1,-2,3)$；（2）点 $A(1,2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $(1,-2,-3)$，关于 y 轴的对称点为 $(-1,2,-3)$；关于 z 轴的对称点为 $(-1,-2,3)$；（3）点 $A(1,2,3)$ 关于坐标原点的对称点为 $(-1,-2,-3)$.

例 3　从点 $A(2,-1,7)$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的方向取 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{38}$，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\left\{x-2,y+1,z-7\right\}$. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=\left\{3,5,-2\right\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 和向量 $\boldsymbol{s}$ 互相平行且方向一致，可得 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-7}{-2}$.

令 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-7}{-2}=k\left(k>0\right)$，则

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x-2)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z-7\right)^2}=\sqrt{\left(3k\right)^2+\left(5k\right)^2+\left(-2k\right)^2}=\sqrt{38},$$

解得 $k=1$，于是 $x=3k+2=5$，$y=5k-1=4$，$z=-2k+7=5$，所以 B 点的坐标为 $(5,4,5)$.

题型二　有关方向角和方向余弦的运算

例 4　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 3，且其方向角为 $\alpha=\gamma=60°$，$\beta=45°$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

---

† 本书沿用主教材中的花括号形式表示向量，而用圆括号形式表示点的坐标.

解　根据已知条件，可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，于是

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\boldsymbol{i}+|\boldsymbol{a}|\cos\beta\boldsymbol{j}+|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\boldsymbol{k}=\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{3}{2}\boldsymbol{k}.$$

例5　已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　由 M_1 和 M_2 两点的坐标可知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{-1,-\sqrt{2},1\right\}$，于是 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$，与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同方向的单位向量为 $\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|}=\left\{-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right\}$，所以方向余弦 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$，方向角 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

7.2.4　习题全解

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限:

$$A(2,-3,1)\text{，}\quad B(7,-1,-2)\text{，}\quad C(-2,-3,\ -1)\text{，}\quad D(-1,2,-3).$$

解　$A(2,-3,1)$ 在第Ⅳ卦限，$B(7,-1,-2)$ 在第Ⅷ卦限，$C(-2,-3,-1)$ 在第Ⅶ卦限，$D(-1,2,-3)$ 在第Ⅵ卦限.

2. 指出下列各点所在的坐标面或坐标轴：$A(-1,2,0)$，$B(0,-2,3)$，$C(1,0,0)$，$D(0,-1,0)$.

解　$A(-1,2,0)$ 在 xOy 坐标面上，$B(0,-2,3)$ 在 yOz 坐标面上，$C(1,0,0)$ 在 x 轴上，$D(0,-1,0)$ 在 y 轴上.

3. 求点 $(-2,3,-5)$ 分别关于下列各条件的对称点的坐标：

（1）xOy 坐标面；（2）y 轴；（3）坐标原点.

解　（1）点 $(-2,3,-5)$ 关于 xOy 坐标面对称点的坐标为 $(-2,3,5)$；（2）点 $(-2,3,-5)$ 关于 y 轴对称点的坐标为 $(2,3,5)$；（3）点 $(-2,3,-5)$ 关于坐标原点对称点的坐标为 $(2,-3,5)$.

4. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$、z 轴及 zOx 坐标面的距离.

解　点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$；点 $A(4,-3,5)$ 到 z 轴的距离为 $\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$；点 $A(4,-3,5)$ 到 zOx 坐标面的距离为 3.

5. 在 yOz 坐标面上，求与 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点等距离的点.

解　因为所求点在 yOz 坐标面上，所以可设它的坐标为 $M(0,y,z)$. 又因为该点到 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点的距离相等，所以 $|AM|=|CM|$，$|BM|=|CM|$，即

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2}\text{，}$$

$$\sqrt{(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2}\text{，}$$

由以上两等式解得 $y=1,z=-2$，于是所求点的坐标为 $(0,1,-2)$.

6. 已知点 $A(1,0,2)$，$B(4,5,10)$，$C(0,3,1)$，$D(2,-1,6)$ 和 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求：（1）向量 $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}$ 在三个坐标轴上的投影及分向量；（2）$\boldsymbol{a}$ 的模；（3）$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦；（4）与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量.

解 （1）由已知，得 $\overrightarrow{AB}=\{3,5,8\},\overrightarrow{CD}=\{2,-4,5\}$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}=4\{3,5,8\}+3\{2,-4,5\}-\{5,1,-4\}=\{13,7,51\},$$

可得向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $a_x=13,a_y=7,a_z=51$；向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分向量分别为 $a_x\boldsymbol{i}=13\boldsymbol{i}$，$a_y\boldsymbol{j}=7\boldsymbol{j}$，$a_z\boldsymbol{k}=51\boldsymbol{k}$.

（2）向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{13^2+7^2+51^2}=\sqrt{2819}$.

（3）向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\ a_x=\frac{13}{\sqrt{2819}},\ \cos\beta=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\ a_y=\frac{7}{\sqrt{2819}},\ \cos\gamma=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\ a_z=\frac{51}{\sqrt{2819}}.$$

（4）与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量为 $\boldsymbol{a}^0=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2819}}\{13,7,51\}$.

7. 设向量的方向余弦分别满足（1）$\cos\alpha=0$；（2）$\cos\beta=1$；（3）$\cos\beta=\cos\gamma=0$. 则这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解 （1）由 $\cos\alpha=0$ 可知，该向量与 x 轴夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，即垂直于 x 轴，并且平行于 yOz 坐标面；

（2）由 $\cos\beta=1$ 可知，该向量与 y 轴夹角为 0，于是该向量的指向与 y 轴正向一致，并且垂直于 xOz 坐标面；

（3）由 $\cos\beta=\cos\gamma=0$ 可知，该向量与 y 轴和 z 轴夹角均为 $\dfrac{\pi}{2}$，于是该向量平行于 x 轴，并且垂直于 yOz 坐标面.

8. 已知 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$，线段 AB 交 xOy 坐标面于点 P，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，求 λ 的值.

解 由于点 P 在 xOy 坐标面上，可设点 P 的坐标为 $(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=\{x-2,y+1,-7\}$，$\overrightarrow{PB}=\{4-x,5-y,-2\}$，又因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，即 $\dfrac{x-2}{4-x}=\dfrac{y+1}{5-y}=\dfrac{-7}{-2}=\lambda$，于是 $\lambda=\dfrac{7}{2}$.

9. 一个向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，且其在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求这个向量的起点 A 的坐标.

解 设此向量的起点 A 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{i}}\overrightarrow{AB}=2-x=4$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{j}}\overrightarrow{AB}=-1-y=-4$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{k}}\overrightarrow{AB}=7-z=7$，由这三个等式解得 $x=-2$，$y=3$，$z=0$，所以 A 点的坐标为 $(-2,3,0)$.

10. 从点 $A(2,4,7)$ 沿着 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 方向取 $|\overrightarrow{AB}|=34$，求点 B 的坐标.

解 设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\{x-2,y-4,z-7\}$，又 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{8,9,-12\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 和向量 $\boldsymbol{s}$ 互相平行，可得 $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-4}{9}=\dfrac{z-7}{-12}$，令 $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-4}{9}=\dfrac{z-7}{-12}=k$，则

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(8k)^2+(9k)^2+(12k)^2}=34,$$

解得 $k=2$，于是 $x=8k+2=18$， $y=9k+4=22$， $z=-12k+7=-17$，所以点 B 的坐标为 $(18,22,-17)$.

7.3　向量的数量积　向量积

7.3.1　基本要求

1. 熟练掌握用坐标表达式进行向量的数量积与向量积的运算.
2. 掌握两个向量夹角的求法.
3. 熟练掌握两个向量互相垂直和平行的条件.

7.3.2　答疑解惑

1. 给出向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如何求以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积？

答　以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，这也是向量积的模的几何意义；同时可知，以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积为 $\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

2. 向量的数量积是两个向量的模相乘再乘以这两个向量夹角的余弦，向量的向量积是两个向量的模相乘再乘以这两个向量夹角的正弦，这两种说法正确吗？

答　第一种说法是正确的；第二种说法是不正确的. 因为向量的向量积的结果是一个向量，这个向量的模是两个向量的模相乘再乘以这两个向量夹角的正弦，其方向与这两个向量符合右手法则，且与这两个向量都垂直.

3. 在空间直角坐标系中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量，它们的坐标表示式分别为 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$，$\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$，为什么 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$？

答　两种乘法的意义不一样. 因为 $|\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\sin 0=0$，所以 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}$，同理 $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$；而 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\cos 0=|\boldsymbol{i}|^2=1$，同理 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

4. 向量的乘法有几种？

答　向量的乘法主要有如下三种：

（1）向量与数的乘法.

（2）向量与向量的数量积，两个向量的数量积是一个数，满足交换律和结合律.

（3）向量与向量的向量积，两个向量的向量积仍然是一个向量，满足结合律但不满足交换律.

注意，向量没有除法运算！

5.（1）若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

（2）若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

（3）若向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$， $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，能否由此推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，为什么？

答　（1）不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由已知条件 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，这里的向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定是零向量.

例如，当 $\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}, \boldsymbol{b}=\{0,1,0\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{0,0,1\}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，但是 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

（2）不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为，当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由已知条件 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，可得 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 即 $\boldsymbol{a}//(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，这里的向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 不一定是零向量.

例如，当 $\boldsymbol{a}=\{1,0,0\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{2,1,0\}$ 时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\{0,0,1\}$，但是 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

（3）可以推得 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 又因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 这样，$\boldsymbol{a}$ 既垂直于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，又平行于 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，只有 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 成立.

由（1）和（2）可知，向量的数量积和向量积运算不同于数的运算，不满足消去律.

7.3.3 基本题型分析

题型 有关向量的数量积与向量积的运算

例 1 设向量 $\boldsymbol{a}=\{3,2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\left\{2,\dfrac{4}{3},k\right\}$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $k=$______；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则 $k=$_______.

解 应分别填 $-\dfrac{26}{3}$ 和 $\dfrac{2}{3}$. 因为若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $3\cdot 2+2\cdot\dfrac{4}{3}+1\cdot k=0$，从而解得 $k=-\dfrac{26}{3}$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则对应坐标成比例，即 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{k}$，从而解得 $k=\dfrac{2}{3}$.

例 2 求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 上的投影.

解 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\times1+1\times(-2)+2\times2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$.

例 3 求向量 $\boldsymbol{b}$，使得它与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$.

解 设向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\{x,y,z\}$，由已知可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x-y+2z=-18$. 又因为向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以令 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}=k$，则 $x=2k,\ y=-k,\ z=2k$，将它们代入到 $2x-y+2z=-18$ 中，得到 $k=-2$. 于是 $x=-4,\ y=2,\ z=-4$，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\{-4,2,-4\}$.

例 4 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求向量 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模和它与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解 由 $|\boldsymbol{d}|^2=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=14$，可得 $|\boldsymbol{d}|=\sqrt{14}$. 又因为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{14}\times2}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

所以 $\theta=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

例 5 已知两点 $A(1,0,0)$ 和 $B(0,2,1)$，试在 z 轴上求一点 C，使得三角形 ABC 的面积最小.

解 设 z 轴上的一个点 $C(0,0,z)$，则 $\overrightarrow{AB}=\{-1,2,1\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-1,0,z\}$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix}=\{2z,z-1,2\},$$

于是三角形 ABC 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(z-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{24}{5}},$$

当 $z=\dfrac{1}{5}$ 时，S 最小，故所求点为 $C\left(0,0,\dfrac{1}{5}\right)$.

7.3.4　习题全解

1. 求向量 $\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$ 上的投影.

解　向量 $\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4\times2+(-3)\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2.$

2. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；（2）$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

解　（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k};$$

（2）$(-2\boldsymbol{a})\cdot3\boldsymbol{b}=(-6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})=(-6)\times3+2\times6+4\times(-3)=-18$，

$$\boldsymbol{a}\times2\boldsymbol{b}=(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k};$$

（3）$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦为 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}.$

3. 已知 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求三角形 OAB 的面积.

解法一　根据向量积的定义可知，三角形 OAB 的面积为

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|.$$

又因为 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

解法二　在三角形 OAB 中，$\overrightarrow{OA}=\{1,0,3\}$ 与 $\overrightarrow{OB}=\{0,1,3\}$ 的夹角余弦为

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}=\frac{1\times0+0\times1+3\times3}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}\times\sqrt{0^2+1^2+3^2}}=\frac{9}{10},$$

于是 $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{\sqrt{19}}{10}$，所以三角形 OAB 的面积为

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+0^2+3^2}\times\sqrt{0^2+1^2+3^2}\times\frac{\sqrt{19}}{10}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

4. 试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明 如图 7-2 所示，给定一个圆 O，$\angle AMB$ 是直径 AB 所对的圆周角. 又

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)\\&=\left(-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)\\&=-\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=0,\end{aligned}$$

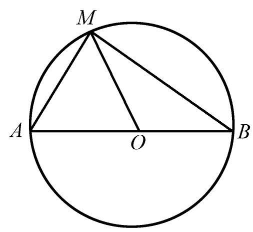

图 7-2

所以 $\angle AMB$ 是直角.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,-3,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,3\}$，$\boldsymbol{c}=\{1,-2,0\}$，计算下列各式：

（1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$；（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；（3）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；（4）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

解 （1）$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=(2\times1+(-3)\times(-1)+1\times3)\boldsymbol{c}-(2\times1+(-3)\times(-2)+1\times0)\boldsymbol{b}$

$$=8(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=8\times\{0,-1,-3\}=\{0,-8,-24\};$$

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\{3,-4,4\}\times\{2,-3,3\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-4&4\\2&-3&3\end{vmatrix}$

$$=\left\{\begin{vmatrix}-4&4\\-3&3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&-4\\2&-3\end{vmatrix}\right\}=\{0,-1,-1\};$$

（3）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&3\\-2&0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&-2\end{vmatrix}=2$；

（4）$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\{2,-3,1\}\times\{1,-1,3\})\times\{1,-2,0\}=\left\{\begin{vmatrix}-3&1\\-1&3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}\right\}\times\{1,-2,0\}$

$$=\{-8,-5,1\}\times\{1,-2,0\}=\left\{\begin{vmatrix}-5&1\\-2&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-8&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-8&-5\\1&-2\end{vmatrix}\right\}=\{2,1,21\}.$$

6. 已知 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-6|\boldsymbol{b}|^2=0$. 又 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，从而 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2$，因此 $|\boldsymbol{a}|^2=7|\boldsymbol{b}|^2$，于是 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{\sqrt{7}|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\arccos\frac{\sqrt{7}}{7}$.

7. 已知三个点 $M_1(1,-1,2)$， $M_2(3,3,1)$ 和 $M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$， $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解　由题意可知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,-1\}$，$\overrightarrow{M_2M_3}=\{0,-2,2\}$，于是与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$， $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的向量为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\left\{\begin{vmatrix}4 & -1\\ -2 & 2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}\right\}=\{6,-4,-4\}$，因此与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$， $\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6^2+(-4)^2+(-4)^2}}\{6,-4,-4\}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\{3,-2,-2\}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}).$$

7.4　空间平面及其方程

7.4.1　基本要求

1. 熟练掌握平面的方程.
2. 会讨论平面之间的位置关系.

7.4.2　答疑解惑

1. 在平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，如何通过 A, B, C, D 的取值判断平面的特殊位置？

答　若 $D=0$，则平面过原点；若 A, B, C 中有一个为零，则平面平行于相应的坐标轴，若再加上 $D=0$，则平面过相应的坐标轴. 例如， $A=0$ 表示平面平行于 x 轴， $A=D=0$ 表示平面过 x 轴；若 A, B, C 中有两个为零，则平面平行于相应的坐标面，若再加上 $D=0$，则平面与相应的坐标面重合. 例如，$A=B=0$ 表示平面平行于 xOy 坐标面，$A=B=D=0$ 表示平面与 xOy 坐标面重合.

2. 求平面的方程主要有几种方法？

答　求平面的方程主要有如下四种方法：

（1）利用平面的点法式方程. 找出平面上的一个点 (x_0,y_0,z_0) 和平面的一个法向量 $\{A,B,C\}$，则平面的点法式方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，这是求平面方程的基本方法.

（2）利用平面的一般方程. 假设平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，再根据已知条件确定方程中的未知量 A, B, C, D，从而得到平面的一般方程.

（3）利用平面的截距式方程. 找出平面在三个坐标轴上的截距，假设分别为 $a,b,c(abc\neq0)$，则平面的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

（4）也可利用过直线的平面束方程（在 7.5 节中将具体介绍）.

3. 建立平面的一般方程需要几个条件？

答　在平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中， A,B,C,D 四个常数只有三个是相互独