第3章

连续控制系统的时域和频域分析方法

3.1 引言

在分析和设计控制系统的过程中，首要工作是要了解控制系统各环节的动态特性和静态特性，即建立系统各环节的数学模型，然后采用多种方法分析控制系统的动态性能和稳态性能，并在此基础上对系统进行综合设计和校正。

对于大多数控制系统，人们关心的是，当系统输入参数（给定作用或干扰作用）变化后，系统输出参数（被控制变量）随时间变化的特性即时间响应特性是否满足设计要求。控制系统的时间响应通常分为两部分，即瞬态响应和稳态响应。所谓瞬态响应，是指系统输出参数从初始平衡状态变化到新的平衡状态的过渡过程；稳态响应则是指时间 $t\to\infty$ 时系统的输出状态。因此，时间响应 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = y_t(t) + y_s(t) \tag{3-1}$$

式中，$y_t(t)$ 为瞬态响应；$y_s(t)=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)$ 为稳态响应。

由于瞬态响应是系统动态特性的一个重要部分，所以在到达稳态之前，必须观察或检测输出参数的瞬态变化是否满足设计规定的性能指标要求。稳态响应同样十分重要，因为当把稳态响应与给定输入作用相比较时，可得知系统的控制精度是否符合设计规定。若输出的稳态响应与输入稳态值不完全一致，则系统是有静态误差的。

时域分析法就是通过研究控制系统对一个特定输入信号的时间响应来评价系统性能的方法。这种方法所采用的手段是直接求解描述系统特性的微分方程或状态方程，因此对低阶系统是一种比较准确的分析方法。由于许多高阶系统的时间响应常可近似为一个二阶系统的时间响应，因而时域分析法对研究高阶系统的性能也具有重要意义。

对于一个二阶系统，求解特征方程式的根并不困难，但对三阶以上的高阶控制系统，基于手工求解特征方程式的根通常不是一件容易的事情。特别是在研究系统中某个参数的变化对系统动态性能的影响时，需要进行很复杂的计算。

伊文思于1948年首先提出了一种求解系统特征方程式根的简便图解法，称为根轨迹法，在过程控制中获得广泛应用。所谓根轨迹是指系统某一参数从零变化到无穷大时，闭环系统特征根在复平面上的相应轨迹。在根轨迹中主要研究的是以系统开环增益为参变量的根轨迹，之后又推广到随其他参数变化的广义根轨迹。根轨迹法包括两个部分：首先是求取或绘制根轨迹，其次是利用根轨迹图进行分析和设计。本章将介绍已知开环传递函数的极点和零点如何绘制根轨迹图的方法，以及调整开环传递函数的极点和零点使闭环传递函数的极点符合规定的性能指标的途径。

频率特性法（或频率法）是系统对正弦输入信号的稳态响应，它是以频率特性或频率响应为基础对系统进行分析研究的方法。这种方法具有如下显著特点。

（1）频率特性具有明确的物理意义。许多系统和环节的频率特性都可以用实验的方法测定，这对于机理复杂或机理不明确而难以列写动态方程的系统和环节是很有实际意义的。

（2）可以采用较为简单的图解分析法，使高阶系统的分析和设计工作大大简化。

（3）可以从系统的开环频率特性判断闭环系统的性能，并能根据时域和频域性能指标之间的关系，分析系统参数对系统过渡过程性能指标的影响，从而进一步指出改善系统工作性能的途径。

（4）在任何一种系统中总是存在着影响系统整个性能的噪声，应用频率特性法，可以设计出能够抑制这些噪声的系统。

（5）频率特性法不仅适用于线性单输入单输出系统，还可以应用于多输入多输出系统，也可以有条件地推广应用到某些非线性控制系统。

本章着重讲述连续控制系统的时域分析法、连续控制系统的根轨迹分析法以及连续控制系统的频域分析法，最后介绍如何应用 MATLAB 工具进行控制系统的时域和频域分析。

3.2　连续控制系统的时域分析法

3.2.1　典型输入信号

在实际控制系统中，输入信号有时是不确定的。在许多情况下，实际输入可以随时间作随机变化。为了便于分析和设计，同时也为了对各种控制系统的性能进行评价和比较，有必要假定一些有代表性的基本输入函数形式，即典型的输入信号。适当规定系统的输入信号为某些基本类型的函数形式，不仅简化了数学处理方法，而且还可以由此推知其他更为复杂的输入情况下的系统性能。

在用实验法测取和分析系统或对象的动态性能时，这些典型输入信号也是经常采用的基本测试信号。在实际应用中，究竟采用哪一种典型输入信号，取决于系统的常见工作状态和数学分析的方便程度。例如，为了使随动系统对位置、速度和加速度等输入信号具有良好的跟随性能，在分析随动控制系统时，给定作用（参考输入）可分别取阶跃、斜坡和抛物线函数信号。对于过程控制中的定值控制系统，为了使系统具有良好的抗干扰能力，通常选取阶

跃函数作为典型信号。这是因为阶跃干扰被认为是最不利的或者说最严重的情况，若系统在这种输入信号作用下的动态和稳态响应能够满足控制性能的要求，那么，在实际干扰作用下的时间响应将能满足工艺过程所提的要求。

1. 阶跃函数

在控制系统的分析和设计中，阶跃输入通常取单位阶跃函数形式。单位阶跃函数 $u(t)$ 的数学表达式为

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{3-2}$$

其拉氏变换为

$$\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s} \tag{3-3}$$

系统或环节在阶跃输入作用下，其输入与输出的关系曲线如图 3-1 所示。系统在单位阶跃输入作用下的输出称为单位阶跃响应，常用 $h(t)$表示。

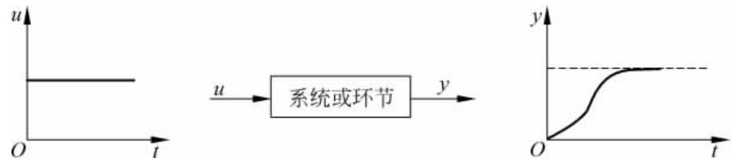

图 3-1 系统或环节的阶跃响应

用阶跃函数输入信号测取系统或对象动态特性的方法，就是将系统或对象的输入突然作一阶跃变化，随即记录输出参数随时间变化的过渡过程。这种测试方法称为阶跃法，又称反应曲线法。这种方法不需特殊仪器设备，测试工作量不大，是经常采用的一种简单易行的测试方法。但是，由于过渡过程时间较长，测试过程中易受其他干扰因素影响，而且时间响应的终值要偏离正常操作条件，对产品的质量和产量有不同程度的影响，严重时甚至可能破坏了系统或对象的正常运行状态，所以，阶跃的幅值不能过大。然而若阶跃幅值过小，输出参数变化也很小，则测量仪表的误差及其他随机干扰的影响就相对增大。在测试时应根据具体工作条件和精度要求统筹兼顾。

2. 脉冲函数

脉冲输入通常取单位脉冲函数 $\delta(t)$，其数学表达式为

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0<t<\varepsilon\\ 0, & t>\varepsilon\end{cases} \tag{3-4}$$

单位脉冲函数的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=1 \tag{3-5}$$

系统在单位脉冲函数输入作用下的输出，称为单位脉冲响应，常计作 $g(t)$。显然，如果把单位阶跃函数对时间取导数，就成为单位脉冲函数；把单位脉冲函数对时间积分，就成为单位阶跃函数。亦即二者之间存在下列关系：

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t) \tag{3-6}$$

$$\int_0^t \delta(t)\mathrm{d}t=u(t) \tag{3-7}$$

在时间响应 $h(t)$和 $g(t)$之间也存在着导数与积分的关系，知道其中一个，即可求得另一个，即有

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=g(t) \tag{3-8}$$

$$\int_0^t g(t)\mathrm{d}t=h(t) \tag{3-9}$$

因为单位脉冲函数 $\delta(t)$的拉氏变换等于 1，所以系统单位脉冲响应 $g(t)$的拉氏变换就是系统的闭环传递函数 $W(s)$，这一点在实际分析工作中是很有实用意义的。当系统或环节在脉冲输入作用下，其输入与输出的关系曲线如图 3-2 所示。

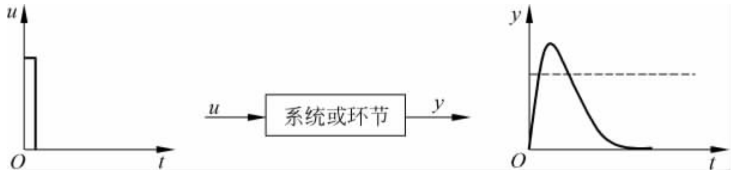

图 3-2　系统或环节的脉冲响应

用脉冲信号测试动态特性时，由于理想的单位脉冲不易获得，通常采用矩形脉冲作信号源。将系统或对象的输入参数突然作一个矩形脉冲变化，随即记录输出参数随时间变化的过渡过程。这种方法称脉冲法，又称矩形脉冲反应曲线法。脉冲信号测试法也是现场经常采用的方法。这种方法也不需附加特殊设备，输出参数偏离原来稳态值的程度比阶跃法小，且终值可以自动复原，但实验数据处理较阶跃法复杂一些。

3. 斜坡函数

斜坡函数又称速度函数，其数学表达式为

$$f(t)=At \tag{3-10}$$

斜坡函数输入通常取单位斜坡函数 $r(t)$。$r(t)$的数学表达式为

$$r(t)=t \tag{3-11}$$

其拉氏变换为

$$\mathcal{L}[r(t)]=\frac{1}{s^2} \tag{3-12}$$

单位斜坡函数又称等速函数或单位递增函数，它等于单位阶跃函数对时间的积分，而它对时间的导数就是单位阶跃函数，即

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}=u(t) \tag{3-13}$$

$$\int_0^t u(t)\mathrm{d}t=r(t) \tag{3-14}$$

在单位斜坡响应与单位阶跃响应之间同样存在着导数或积分关系。系统或环节在斜坡

输入作用下,其输入与输出的关系曲线如图 3-3 所示。单位斜坡函数用于测试系统对斜坡输入信号的跟踪能力。

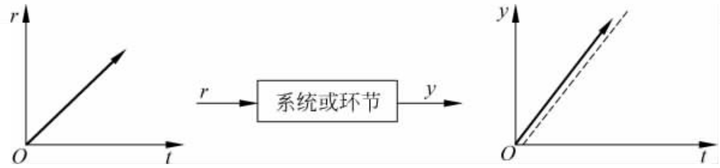

图 3-3 系统或环节的斜坡响应

4. 加速度函数

加速度函数又称单位抛物线函数,其数学表达式为

$$r_a(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t) \tag{3-15}$$

其拉氏变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)\right] = \frac{1}{s^3} \tag{3-16}$$

当系统或环节在抛物线函数输入作用下,其输入与输出的关系曲线如图 3-4 所示。抛物线函数用于测试系统对输入信号的跟踪能力。

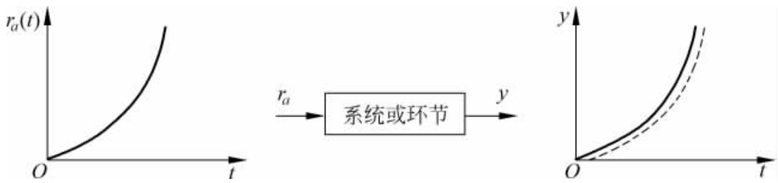

图 3-4 系统或环节的抛物线响应

5. 正弦函数

用正弦函数作为输入信号,可以求得系统对不同频率的正弦函数输入的稳态响应,这种响应称为频率响应。正弦函数的数学表达式为

$$f(t) = A\sin\omega t \tag{3-17}$$

其拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{3-18}$$

当系统或环节在正弦函数输入作用下,其输入与输出的关系曲线如图 3-5 所示。

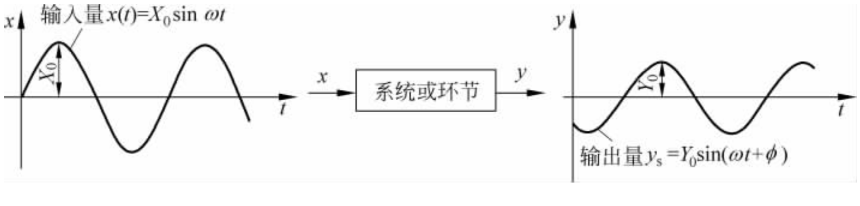

图 3-5 系统或环节的频率响应

3.2.2　控制系统的瞬态响应及性能指标

1. 一阶系统的瞬态响应

尽管真正的一阶系统在实际生产过程中较为少见，但对一阶系统的分析有助于理解分析和设计方法的基本原理。

一阶系统的框图如图 3-6 所示。系统的闭环传递函数为

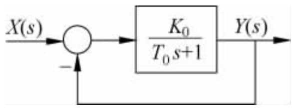

图 3-6　一阶系统框图

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\dfrac{K_0}{T_0 s+1}}{1+\dfrac{K_0}{T_0 s+1}}=\frac{K_0}{T_0 s+1+K_0}=\frac{\dfrac{K_0}{1+K_0}}{\dfrac{T_0}{1+K_0}s+1}$$

或

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K}{Ts+1} \tag{3-19}$$

式中

$$K=\frac{K_0}{1+K_0},\quad T=\frac{T_0}{1+K_0}$$

上式表明，由一阶惯性环节构成的单位反馈控制系统，仍具有一阶特性。式中的 T 为系统的时间常数，K 为系统的放大系数。下面来分析当 $K=1$ 时系统的瞬态响应。

（1）一阶系统的单位阶跃响应

在单位阶跃输入 $X(s)=\mathcal{L}[u(t)]=1/s$ 下，系统的输出为

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}X(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{T}{Ts+1}$$

由拉氏反变换可以得到系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=y(t)=\mathcal{L}[Y(s)]=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \tag{3-20}$$

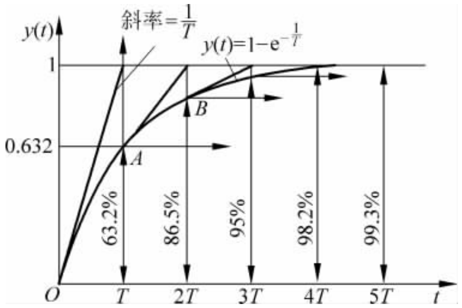

图 3-7　一阶系统的单位阶跃响应

由上式可以看出，一阶系统的单位阶跃响应是一条指数曲线，如图 3-7 所示。在 $t=0$ 处曲线的斜率最大，等于 $1/T$。经过 T 时间，响应上升到稳态值的 63.2%，经过 $3T$ 或 $4T$ 时，响应将分别达到 95%或 98.2%。显然，时间 T 反映了系统的响应速度。时间常数 T 越小，响应越迅速。

（2）一阶系统的单位脉冲响应

在单位脉冲输入 $X(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ 作用下，系统的输出为

$$Y(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

相应的系统单位脉冲响应为

$$g(t)=y(t)=\mathcal{L}[Y(s)]=\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \tag{3-21}$$

单位脉冲响应曲线如图 3-8 所示。从式(3-20)和式(3-21)可以明显看出，$h(t)$和 $g(t)$之间存在着导数和积分关系。

(3) 一阶系统的单位斜坡响应

在单位斜坡输入 $X(s)=\mathcal{L}[r(t)]=1/s^2$ 作用下,系统的输出为

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(Ts+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T^2}{Ts+1}$$

相应的系统单位斜坡响应为

$$y(t)=\mathcal{L}[Y(s)]=t-T+T\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}=y_t(t)+y_s(t) \tag{3-22}$$

式中,$y_t(t)=T\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}$ 为瞬态响应分量;$y_s(t)=\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=t-T$ 为稳态响应分量。

单位斜坡响应曲线示于图 3-9。

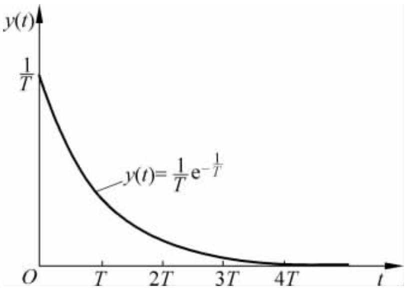

图 3-8 一阶系统的单位脉冲响应

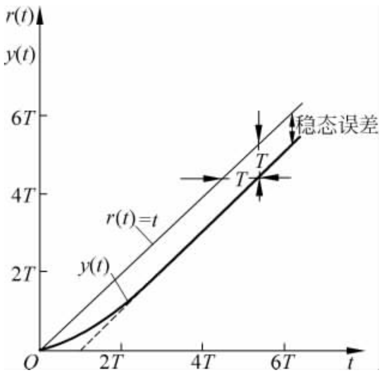

图 3-9 一阶系统的单位斜坡响应

一阶系统单位斜坡响应的稳态分量,是与单位斜坡输入函数斜率相同而时间延迟了一个时间常数 T 的斜坡函数。在过渡过程结束后,系统的稳态输出与单位斜坡输入之间存在着跟踪误差,其大小正好等于时间常数 T。

2. 二阶系统的瞬态响应

在分析或设计控制系统时,二阶系统的特性被视为一种基准。虽然在实际过程中真正的二阶系统也不多见,而大多是三阶或更高阶的系统,但是它们有可能用二阶系统去近似。因此,下面将对二阶系统的响应作重点讨论。

(1) 二阶系统的标准形式

与第 2 章中推得的二阶对象或环节的数学模型一样,二阶线性控制系统的数学模型也可以表示为一般形式的二阶线性常系数微分方程式

$$a_1\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_2\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_3y(t)=Kx(t) \tag{3-23}$$

若 $a_3\neq 0$,上式可写成

$$T^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y(t)=K_\mathrm{p}x(t)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\omega_\mathrm{n}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_\mathrm{n}^2y(t)=K_\mathrm{p}\omega_\mathrm{n}^2x(t) \tag{3-24}$$

式中,$T^2=a_1/a_3$,$2\zeta T=a_2/a_3$,$K_\mathrm{p}=K/a_3$,而 $T=1/\omega_\mathrm{n}$。在式(3-24)中,令 $K_\mathrm{p}=1$,可以得到通常研究二阶特性使用的数学模型,即二阶系统数学模型的标准形式:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t) \tag{3-25}$$

其中,ω_n 称为自然频率或无阻尼振荡频率;ζ 称为阻尼系数或阻尼比。

式(3-25)所表示的标准形式二阶系统的框图如图 3-10 所示。

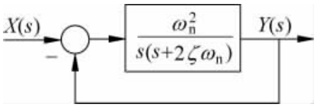

图 3-10　标准形式二阶系统框图

系统的闭环传递函数为

$$W(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2} \tag{3-26}$$

由式(3-26)可求得二阶系统的特征方程为

$$s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2=0$$

或

$$(s+s_1)(s+s_2)=0$$

可见,二阶系统的时间响应取决于 ω_n 和 ζ 这两个参量。

从式(3-26)不难求出闭环系统的特征根(闭环极点)

$$-s_1,-s_2=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \tag{3-27}$$

显然,当阻尼系数 ζ 具有不同值时,特征根将可能是两个相异实根、两个相等实根、一对共轭复根或一对纯虚根。

下面分别讨论不同情况下的二阶系统阶跃响应。

(2) 二阶系统的单位阶跃响应

① $\zeta>1$,过阻尼情况。因 $\zeta>1$,二阶系统有两个不相等的负实根 $-s_1$ 和 $-s_2$,即

$$-s_1=-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$
$$-s_2=-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

因此,系统单位阶跃响应的像函数可写成

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+s_1)(s+s_2)}$$

令 $s_1=\frac{1}{T_1}$,$s_2=\frac{1}{T_2}$,代入上式,并注意到 $s_1s_2=\omega_n^2$,整理可得

$$Y(s)=\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

对上式求拉氏反变换,可求得系统的单位阶跃响应:

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=1-\frac{1}{T_1-T_2}(T_1e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2e^{-\frac{t}{T_2}}) \tag{3-28}$$

上式表明,输出瞬态响应由两个单调衰减的指数项组成,这是一个不振荡的衰减过程。当阻尼系数 $\zeta\gg1$ 时,$T_1\gg T_2$,式(3-28)右边两个指数项中后一项衰减得快,若将后一项忽略不计,则系统的输出响应与一阶系统的响应相同。若 $T_2\approx0$,则式(3-28)近似为

$$h(t)=1-e^{-\frac{t}{T_1}}$$

这时系统由二阶系统变为一阶系统。

闭环特征根(闭环极点)$-s_1=-1/T_1$ 和 $-s_2=-1/T_2$ 与过渡过程的定量关系,虽然可以从式(3-28)清楚地看出,但是很不直观。为此可用图 3-11 所示的极点分布和对应的响应曲线加以说明。图中实线是式(3-28)表示的响应曲线,虚线为两个极点 $-s_1$ 和 $-s_2$ 对应的响应曲线。

仔细观察两个特征根的位置及响应曲线的形状，可以看到，对于只有一个负实数极点的情况，极点离原点越远，如图 3-11 中极点 2 所示，过渡过程进行得越迅速；极点离原点越近，如图中的极点 1，过渡过程的变化速度越缓慢，需经过较长时间才能到达稳态值。

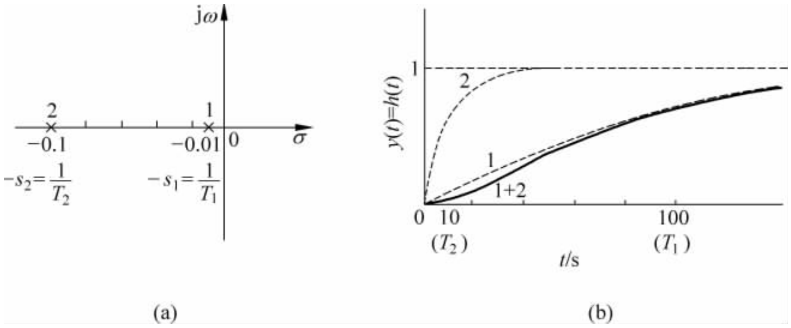

图 3-11 负实数极点及对应的时间响应 $h(t)$

对于两个负实数极点的情况即图 3-11(b)中实线所示的响应曲线，与具有一个极点的情况相比，由于增加了一个极点，过程变慢，且过渡过程曲线存在拐点。总的过渡过程可以看成是由两个分量组成的，而起主导作用的是靠近原点的那个极点(极点 1)所对应的分量。离原点较远的极点(极点 2)所对应的分量对总的过渡过程影响较小，而且离得越远(时间常数 T_2 越小)影响越小。

上面的比较可以推广到高阶系统，若系统全部都是负实数极点，过渡过程总是由一个或几个相对位置最靠近原点的极点决定的。离原点较远的那些极点虽然会对过渡过程有些影响，但是影响都较小，往往可以忽略不计。

② $\zeta=1$，临界阻尼情况。$\zeta=1$ 时系统有两个相等的负实根，即

$$-s_1=-s_2=-\omega_n$$

系统单位阶跃响应的像函数为

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}$$

对上式求拉氏反变换，可得系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=1-e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \tag{3-29}$$

显然，当阻尼系数 $\zeta=1$ 时，二阶系统的单位阶跃响应仍是一个不振荡的衰减过程。

③ $0<\zeta<1$，欠阻尼情况。在这种情况下，系统有一对共轭复根，即

$$-s_1=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-s_2=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

若令 $\sigma=\zeta\omega_n$，$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$，则系统的一对共轭复根可写为

$$-s_1,-s_2=-\sigma\pm j\omega_d$$

式中 σ 称为衰减系数，ω_d 称为阻尼振荡频率。如把这一对闭环极点标在复平面上，可得到图 3-12 所示的极点分布图。

因此，可求得系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi) \tag{3-30}$$

式中

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

或

$$\phi = \arccos \zeta$$

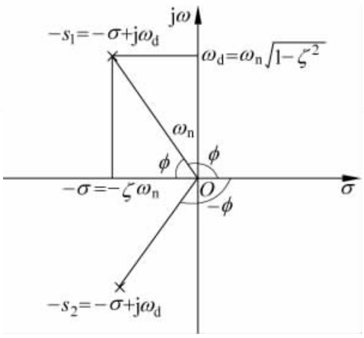

图 3-12　一对共轭复根

由式(3-30)可见,欠阻尼二阶系统单位阶跃响应的瞬态分量是振幅随时间按指数函数规律衰减的周期函数。振荡频率为 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$,其数值与阻尼系数 ζ 有关,故称阻尼振荡频率。由于瞬态分量衰减的快慢程度取决于包络线

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

的收敛频率,而当阻尼系数 ζ 一定时,包络线收敛速率又取决于指数函数 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 的幂,所以 $\sigma=\zeta\omega_n$ 称为衰减系数。

④ $\zeta=0$,无阻尼情况。此时,系统有一对纯虚根

$$-s_1, -s_2 = \pm j\omega_n$$

像函数为

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+\omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

所以系统的单位阶跃响应为

$$h(t) = \mathcal{L}[Y(s)] = 1 - \cos \omega_n t \tag{3-31}$$

也就是说,此时系统的响应为无阻尼等幅振荡,故振荡频率 ω_n 称为无阻尼振荡频率。

⑤ $\zeta<0$,负阻尼情况。由于 $\zeta<0$,所以系统特征根

$$-s_1, -s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

将具有正的实部($-\zeta\omega_n>0$)。由于系统时间响应关系式中含有正指数,所以单位阶跃响应 $h(t)$ 是一发散的响应过程,就是说系统的输出参数不能达到稳定状态,而是随着时间的推移发散到无穷大。过渡过程发散的系统是不稳定系统。$\zeta=0$ 时的等幅振荡情况介于稳定和不稳定之间,通常将其划为不稳定的范围。图 3-13 所示为不同 ζ 值时的各种根分布情况及对应的单位阶跃响应曲线。

图 3-14 中画出了阻尼系数 ζ 不同时由式(3-23)~式(3-25)描述的二阶系统单位阶跃响应对无量纲时间 $\omega_n t$ 的关系曲线。

从图 3-14 可以看出,随着 ζ 值的减小,振荡加剧。当 $\zeta\geqslant 1$ 时,阶跃响应虽没有振荡超调,但响应迟缓。所以,临界阻尼和过阻尼系统虽然稳定性很好,但快速性较差,不如某些 ζ 值范围的欠阻尼情况可以更快地达到稳定值。对控制系统性能的总的要求是稳定、快速、准确。仔细观察图 3-14 中的全部响应曲线可以发现,阻尼系数以 0.4~0.8 之间为佳,此时系统具有较快的响应速度,而且超调量相对较小。

图 3-14 所示响应曲线称为二阶标准响应曲线。有了这一族曲线,任何二阶系统不需求解微分方程式,就可以根据系统的 ζ 和 ω_n 值画出阶跃响应曲线的图形,从而了解系统过渡过程的特性。