第 3 章

一元函数不定积分与定积分

基本概念

1. 原函数、不定积分；
2. 定积分；
3. 积分上限函数、变限积分函数。

基本结论

1. 原函数存在定理、原函数性质；
2. 不定积分性质、公式；
3. 定积分基本公式：牛顿-莱布尼茨公式；
4. 定积分性质和公式(定积分的基本性质、对称区间的定积分、周期函数的定积分、三角函数的定积分)；
5. 变限积分函数的导数。

基本方法

1. 用凑微分、变量代换、分部积分法求不定积分；
2. 求有理函数的不定积分；
3. 求无理函数的不定积分；
4. 求三角函数的不定积分；
5. 求分段函数的不定积分；
6. 用变量代换、分部积分计算定积分；
7. 计算对称区间上的定积分；
8. 计算非初等函数的定积分；
9. 用换元变换计算定积分；
10. 计算反常积分。

3.1 不定积分

一、基本概念

定义 1 原函数 如果 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**原函数**，且称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导函数。

定义 2 不定积分 $f(x)$ 的所有原函数或带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 的**不定积分**。

二、基本结论

定理 1（原函数存在定理） 连续函数一定存在原函数。

事实上，若 $f(x)$ 连续，则积分上限函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数，但要注意的是：连续仅仅是存在原函数的充分条件，并非必要。

定理 2（原函数性质）

（1）如果函数存在原函数，一定有无限多个原函数；

（2）同一个函数的任意两个原函数最多相差一个常数。

定理 3（不定积分公式）

幂函数的积分公式：

（1）$\int k\mathrm{d}x = kx + C$；

（2）$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$；

（3）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$。

二次分式的积分公式：

（4）$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$；

（5）$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$；

（6）$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$。

三角函数的积分公式：

（7）$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

（8）$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

（9）$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；

（10）$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

（11）$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

（12）$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

（13）$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$；

（14）$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

（15）$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

（16）$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$。

指数函数的积分公式：

(17) $\int e^x dx = e^x + C$；　　(18) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$。

根式下是二次多项式的积分公式：

(19) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$；　　(20) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$；

(21) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$；

(22) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$；

(23) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C$。

我们能够求的不定积分，大都是运用上述积分公式，因此在计算不定积分时，都是朝着公式形式去变化，最终将被积函数变成：幂函数、指数函数、三角函数、二次分式、根式下是二次多项式的和或差的形式，从而利用公式，计算其不定积分。

三、基本方法

题型 1　用凑微分、变量代换、分部积分法求不定积分

求函数的**不定积分**，按积分方法分类，有**三大方法**：凑微分、变量代换、分部积分。

方法 1　凑微分(凑微分，利用公式)

原理　若 $\int f(u)du = F(u) + C$，则 $\int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = F[\varphi(x)] + C$。

凑微分是积分最基本的方法，也是求不定积分最简单的方法，因此在求不定积分时，我们首先考虑能否用凑微分法，将积分变成公式的形式。要熟练掌握和运用这个方法，需要熟悉函数的凑微分。

常见函数的凑微分

1. 凑成一次函数微分：$dx = \dfrac{1}{a} d(ax+b)$。

2. 凑成 x^n 的微分：$x^{n-1}dx = \dfrac{1}{an} d(ax^n + b)$。

3. 凑成倒微分：$\dfrac{1}{x^2}dx = -d\left(\dfrac{1}{x}\right)$。

4. 凑成根微分：$\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d(\sqrt{x})$。

5. 凑成指数函数微分：$a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} d(a^x)$，$e^x dx = d(e^x)$。

6. 凑成对数函数微分：$\dfrac{1}{x}dx = d(\ln x)$。

7. 凑成三角函数微分：$\cos x dx = d\sin x$；　$\sin x dx = -d\cos x$；

$$\sec^2 x dx = \frac{1}{\cos^2 x}dx = d\tan x;\qquad \csc^2 x dx = \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d\cot x。$$

8. 凑成反三角函数微分：$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arcsin x$；　　$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\arctan x$。

9. 凑成整体或局部的微分：$f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}f(x)$。

例 3.1　用凑微分法求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{x^4}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+4\cos^2x}$；　　(6) $\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int\sin x\cos^3x\mathrm{d}x$；

(9) $\int\frac{1}{x(\ln^2x-1)}\mathrm{d}x$；　　(10) $\int\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^2}\mathrm{d}x$。

解　(1) $\mathrm{d}x$ 可以凑成一次函数的微分，当然可以凑成分母 $1-2x$ 的微分，从而有

$$\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-2x}\mathrm{d}(1-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C;$$

(2) 二次分式，将分母配方，凑微分，利用公式

$$\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)=\arctan(x+1)+C;$$

(3) $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}(\arctan x)$，利用公式

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C;$$

(4) x^4 和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 x^5 的微分，当然可以凑成 $\mathrm{d}(x^5+1)$，于是

$$\int\frac{x^4}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\frac{1}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}(x^5+1)=-\frac{1}{15}\frac{1}{(x^5+1)^3}+C;$$

(5) 被积函数是三角函数，凑微分只能是$\frac{1}{\cos^2x}$或$\frac{1}{\sin^2x}$和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}\tan x$ 或 $\mathrm{d}\cot x$，于是为了凑微分，分母提取$\cos^2x$，凑微分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x+4\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\tan^2x+4)\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{(\tan^2x+4)}=\frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2}+C;$$

(6) 显然，只能 e^x 和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}\mathrm{e}^x$，当然可以凑成 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1)$，于是

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C;$$

(7) $\frac{1}{\sqrt{x}}$和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}\sqrt{x}$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}\sqrt{x}=2\arctan\sqrt{x}+C;$$

(8) 被积函数是三角函数，用 $\sin x$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}\cos x$，从而有

$$\int\sin x\cos^3x\mathrm{d}x=-\int\cos^3x\mathrm{d}\cos x=-\frac{1}{4}\cos^4x+C;$$

(9) $\frac{1}{x}$和 $\mathrm{d}x$ 可以凑成 $\mathrm{d}\ln x$，于是

$$\int \frac{1}{x(\ln^2 x-1)}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\ln^2 x-1}\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\right|+C;$$

(10) 用分子 $\sin x-\cos x$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}(\cos x+\sin x)$，于是有

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^2}\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}\mathrm{d}(\cos x+\sin x)=\frac{1}{\cos x+\sin x}+C。$$

用凑微分法求不定积分综述

凑微分法是计算不定积分最基本、最简单方法，是经过适当的凑微分和被积函数的适当变形，将积分变成公式的形式，再利用公式，所以这一方法又称为**凑微分利用公式**。

熟练掌握这一积分方法，就要熟悉不定积分公式和凑微分公式，不然无法熟练的利用这一积分方法。

在具体应用这一积分方法时，首先观察哪部分和 $\mathrm{d}x$ 凑微分，然后考虑剩余部分和哪个积分公式更相近，最后经过适当变化，变成积分公式的形式，再利用积分公式。

方法 2 变量代换法

在变量代换中，通常有五种代换：根式代换，指数代换、对数代换、三角代换和反三角代换，其代换的目的是将被积函数化为有理函数、三角函数，或者两类不同函数积的形式。

在变量代换过程中，不仅被积函数改变，而且微元也在改变，这是不容忽视的问题。

1. 三角代换基本形式和方法

一般地，如果被积函数含有二次根式，而且根式下是二次多项式，如 $\sqrt{ax^2+bx+c}$。常常利用配方，将其化为 $\sqrt{u^2\pm p^2}$或 $\sqrt{p^2-u^2}$的形式，然后作三角代换。

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$，作变量代换 $x=a\sin t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t;$$

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$，作变量代换 $x=a\tan t,-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t,\quad \mathrm{d}x=\frac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t;$$

(3) $\sqrt{x^2-a^2}$，当 $x>a$ 时，作变量代换 $x=a\sec t,0<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,\quad \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t。$$

当 $x<-a$ 时，作负变换，令 $x=-u$，则 $u>a$，再利用 $x>a$ 时的积分结果，得到 $x<-a$ 时的不定积分。具体见例 3.2 中的(2)题。

例 3.2 求下列无理函数的不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$； (2) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x(a>0)$。

解 (1) 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}t=\int \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C。$$

（2）当 $x>a$ 时，令 $x=a\sec t, 0<t<\frac{\pi}{2}$，则 $\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t, \mathrm{d}x=a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int \frac{a\tan t \cdot a\sec t\tan t}{a^4\sec^4 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\tan^2 t}{a^2\sec^3 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int \sin^2 t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t+C=\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C。$$

当 $x<-a$ 时，令 $x=-u$，则 $u>a, \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=-\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^4}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\right)^3+C=\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C。$$

所以 $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3a^2}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)^3+C$。

2. 指数代换

如果被积函数含有指数函数，若不能用凑微分，又不适用分部积分，一般是做指数代换，将被积函数化为有理函数。

例 3.3 求下列不定积分：

（1）$\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{1+e^x}$；　　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$。

解 （1）令 $e^x=t$，则 $x=\ln t, \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{1+e^x}=\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\int \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}t-\int \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=t-\ln|1+t|+C=e^x-\ln(1+e^x)+C。$$

（2）令 $\sqrt{e^x+1}=t$，则 $e^x=t^2-1, e^x\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t, \mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}=\int \frac{2\mathrm{d}t}{t^2-1}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C。$$

注 变量代换的代换方法并非唯一的。例 3.3 的第(2)题令 $\sqrt{e^x+1}=t$，当然也可以令 $e^x=t$。变量代换的目标是把不容易求的积分经过变量代换，化为我们熟悉的**有理函数积分**或**三角函数积分**。

3. 对数代换

如果被积函数含有对数函数，若不能凑微分，又不适用分部积分，一般是做对数代换，使被积函数化为有理函数或两类不同函数积的形式，然后应用分部积分。

例 3.4 求下列不定积分：

（1）$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$。

解 令 $t=\ln x$，则 $x=e^t, \mathrm{d}x=e^t\mathrm{d}t$，于是

（1）$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int t^2e^{-t}\mathrm{d}t=-t^2e^{-t}+\int 2te^{-t}\mathrm{d}t=-t^2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}+C$$

$$=-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C。$$

(2) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\int\cos t e^t\mathrm{d}t=\cos t e^t+\int\sin t e^t\mathrm{d}t=\cos t e^t+\sin t e^t-\int\cos t e^t\mathrm{d}t$，

于是$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(\cos t e^t+\sin t e^t)+C=\dfrac{1}{2}x(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$。

注 对于被积函数是不同两类函数的积或复合函数的不定积分，即使通过变量代换一般也不会把被积函数化为单一类的函数，往往还是两类不同函数的积，但这样的被积函数有利于分部积分。

4. 反三角代换

如果被积函数含有反三角函数，若不能凑微分，又不适用分部积分，一般是做反三角函数代换，使被积函数化为有理函数、无理函数和三角函数等形式。

例 3.5 求下列不定积分：

(1) $\int\sin(\arctan x)\mathrm{d}x$； (2) $\int\dfrac{\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$。

解 (1) 令 $\arctan x=t$，则 $x=\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\sin(\arctan x)\mathrm{d}x=\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}\cos t=\frac{1}{\cos t}+C=\sqrt{1+x^2}+C。$$

(2) 令 $\arccos x=t$，则 $x=\cos t(0<t<\pi)$，$\mathrm{d}x=-\sin t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\arccos x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{t\sin t}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t=-\int\frac{t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-t\tan t+\int\tan t\mathrm{d}t\\&=-t\tan t-\ln|\cos t|+C=-\arccos x\cdot\tan(\arccos x)-\ln|x|+C。\end{aligned}$$

在变量代换中，我们给出了四种变量代换方法。事实上，还有一种常用的方法：根式代换，为了避免重复论述，我们把这个方法放到无理函数积分一节去研究，因此说变量代换共有五种代换方法，即：根式代换，指数代换，对数代换，三角代换，反三角代换。

用变量代换法求不定积分综述

(1) 若不能用凑微分法，也不具备分部积分特征(两类不同函数的积)，就要考虑变量代换。

(2) 五种代换就是我们熟悉的五种基本初等函数的代换。在某种意义上说，哪部分影响(阻碍)了积分运算，就代换那部分。

(3) 在变量代换时，究竟采用哪种代换，是由被积函数决定的。一般情况下，含有根式，根式下一次多项式或一次分式，就用根式代换；如果根式下是二次多项式，就用三角代换；如果含有对数函数、指数函数、反三角函数，就分别用对数代换、指数代换和反三角代换。这个过程需要考虑两个因素：被积函数的变化和微元的变化，确保新的积分的被积函数是我们熟悉的形式，有利于积分。

(4) 变量代换的代换方式并非唯一的，同时变量代换方法也并非是必须的，有时可以不作变量代换，用凑微分或分部积分来解决。这也无所谓，只要能够求出不定积分，至于用何种方法，何种代换并不是最重要的，求出就好，何必纠结在哪个方法更好！

方法 3 分部积分

分部积分原理 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\int u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$。

基本方法 将被积函数 $f(x)$分成两部分，一部分为 $u(x)$，另一部分为 $v'(x)$，$v'(x)$和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $\mathrm{d}v(x)$。$u(x)$更多的是选取：x^k，$\ln x$，$\arcsin x$ 等，这样等式右端的积分中的 $u'(x)$一

般是常数、幂函数、无理函数等，是有利于积分的形式，同时还要保证剩余部分 $v'(x)$ 很容易求其原函数 $v(x)$，凑成 $\mathrm{d}v(x)$。

例 3.6 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{\ln x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x$。

解 (1) 被积函数 $\frac{x\cos x}{\sin^2 x}$ 是两类不同函数的积，于是考虑分部积分。选择 x 作为 $u(x)$，剩余部分 $\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $-\mathrm{d}\,\frac{1}{\sin x}$，于是有

$$\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int x\cdot \mathrm{d}\,\frac{1}{\sin x} = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sin x} + \ln|\csc x - \cot x| + C。$$

(2) 被积函数 $\frac{\ln x}{(x+3)^2}$ 是两类不同函数的积，于是考虑分部积分。选择 $\ln x$ 作为 $u(x)$，剩余部分 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 和 $\mathrm{d}x$ 凑成 $-\mathrm{d}\,\frac{1}{x+3}$，于是有

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(x+3)^2}\mathrm{d}x &= -\int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+3}\right) = -\frac{\ln x}{x+3} + \int \frac{1}{x(x+3)}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln x}{x+3} + \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x+3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C。\end{aligned}$$

用分部积分法求不定积分综述

分部积分的基本思想是将被积函数转化为单一类函数：有理函数、无理函数或三角函数。因此，一般地，如果被积函数是两类不同函数的积，要考虑分部积分。特别是被积函数是如下形式：

$$x^k\sin x;\quad x^k\arcsin x;\quad x^k\mathrm{e}^x;\quad x^k\ln x;\quad \mathrm{e}^x\sin x,$$

只能用分部积分。

分部积分的关键是将被积函数 $f(x)$ 分成两部分，$u(x)$ 和 $v'(x)$，哪部分作为 $u(x)$ 要考虑三个因素：

(1) $u'(x)$ 更简单，有利于积分；

(2) 容易求出 $v'(x)$ 的原函数 $v(x)$；

(3) 容易计算不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$。

求不定积分，有三大方法，分别是：凑微分、变量代换和分部积分。如果按照被积函数分类，还可分为：有理函数积分、无理函数积分、三角函数积分。这是因为即使有其他函数的不定积分，大都可以通过变量代换转化为这三类函数的积分，因此如果熟练掌握这三类函数的积分，就可以从容应对各类不定积分问题。

题型 2 求有理函数的不定积分

设 $P_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式，$Q_m(x)$ 是关于 x 的 m 次多项式，则称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 是有理函数，且当 $n<m$ 时，称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为真分式；当 $n\geqslant m$ 时，称 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为假分式。

1. 基本方法

将有理函数积分表示为(转化成)可以利用公式的积分。具体来说,就是**将有理函数积分表示为整式(多项式)、一次分式以及二次分式的积分的和。**

根据代数理论:

(1) 假分式 = 整式(多项式) + 真分式;

(2) 真分式 = 若干一次分式 + 若干二次分式。

一次分式与二次分式共有六种形式,分别是:

一次分式:$\dfrac{1}{x-a},\dfrac{1}{(x-a)^n}$;

二次分式:$\dfrac{1}{x^2+px+q},\dfrac{x+b}{x^2+px+q},\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n},\dfrac{x+b}{(x^2+px+q)^n}$。

注 这里的二次分式中的 x^2+px+q 是不能再分解,即 $p^2-4q<0$。

六类一次分式和二次分式积分的基本方法:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}x=\ln|x-a|+C$;(凑微分,利用公式)

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^n}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$;(凑微分,利用公式)

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\to\int\frac{1}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$;(配方,凑微分,利用公式)

(4) $\displaystyle\int\frac{x+b}{x^2+px+q}\mathrm{d}x\to\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\int\frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$;

(用一次项 + 常数,凑成分母的微分,剩余部分与(3)的形式相同)

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\to\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\mathrm{d}u$;(配方,利用递推公式)

(6) $\displaystyle\int\frac{x+b}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x\to\int\frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+\int\frac{1}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$。

(用一次项+常数,凑成分母的微分,剩余部分与(5)的形式相同)

公式中的"→"表示原积分可以转化为这种形式的积分,各项最多相差一个常数倍。

递推公式 $\displaystyle I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$。

特别地,当 $n=2$ 时递推公式化为 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\int\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right)$。

当然,对上面公式,可以从递推公式获得,也可以用变量代换方法得到。

事实上,令 $x=\tan t$,则有

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}&=\int\frac{a\sec^2t\mathrm{d}t}{(a^2\tan^2t+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2a^3}\int(1+\cos2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin2t\right)+C。\end{aligned}$$

2. 有理函数的分解

(1) 把假分式化为真分式:假分式=多项式(整式)+真分式。例如

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1},$$

(2) 把真分式表示为若干一次分式与二次分式和的形式的具体方法：

方法 1 待定系数法：将分母分解成若干一次因式与二次因式的积的形式(二次因式不能再分解)，依据分母的一次因式和二次因式，将真分式表示为几个一次分式和二次分式和的形式。例如

$$\frac{1}{(x+a)^3\,(x^2+px+q)^2}$$
$$=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{(x+a)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}+\frac{Fx+G}{(x^2+px+q)^2},$$

其中 A,B,C,D,E,F,G 是待定常数，$p^2-4q<0$。

为方便起见，$\frac{B}{(x+a)^2}$，$\frac{C}{(x+a)^3}$ 也称为一次分式，$\frac{Fx+G}{(x^2+px+q)^2}$ 也称为二次分式。

在确定待定系数时，可以对上述等式去分母，变成两个多项式恒等，利用多项式恒等，对应项系数相等，建立含有待定系数的方程组，解方程组，从而确定待定系数值。

方法 2 "凑"的方法：

将真分式用"凑的方法"分解：

$$\frac{1}{x^3(1+x^2)}=\frac{1+x^2-x^2}{x^3(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}。$$

若用待定系数法分解，一般形式为

$$\frac{1}{x^3(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{1+x^2},$$

这样需要求五个待定系数。首先去分母，等式两边同乘以 $x^3(1+x^2)$ 得到

$$1=Ax^2(1+x^2)+Bx(1+x^2)+C(1+x^2)+(Dx+E)x^3,$$

根据多项式恒等，对应项系数相等得到

$$\begin{cases}1=C, & \text{(常数项相等)}\\ 0=B, & \text{(一次项系数相等)}\\ 0=C+A, & \text{(二次项系数相等)}\\ 0=B+E, & \text{(三次项系数相等)}\\ 0=A+D, & \text{(四次项系数相等)}\end{cases}$$

解得 $C=1,B=0,A=-1,E=0,D=1$。

通过上面例子可知：用待定系数法将真分式分解成若干一次分式与二次分式的和，计算量很大，在某种意义上说实在是无奈之举，所以通常情况下，大都是用"凑"的方法。

例 3.7 求下列有理函数的不定积分：

(1) $\int\frac{x^2+x+1}{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int\frac{x+2}{(x+1)x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x$； (4) $\int\frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(5) $\int\frac{1}{x^3+3x^2+2x}\mathrm{d}x$； (6) $\int\frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\frac{x^2}{(x-1)^5}\mathrm{d}x$； (8) $\int\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$；

(9) $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x$； (10) $\int\frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$。