

本章内容提要

本章主要讲解数字滤波器的结构,包括 IIR 滤波器的结构和 FIR 滤波器的结构。数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 有各种不同的等效形式,如直接计算、分解为多个有理函数相乘、分解为多个有理函数相加等。不同的等效形式对应不同的数字滤波器结构。运算结构对数字滤波器的实现非常重要,不同结构所需的存储单元和乘法次数是不同的。前者影响系统的复杂度和实现成本,后者影响运算速度。此外,数字系统是有限字长系统,不能表示任意实数,在运算过程中必然带来一定误差。对滤波器的系数进行量化,也会带来误差。在有限精度情况下,不同运算结构的误差和稳定性也是不同的。

5.1 数字网络的信号流图

数字滤波器是一种离散线性时不变系统,其输入 $x(n)$ 与输出 $y(n)$ 之间的关系可以用常系数差分方程来描述:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (5.1)$$

其中 M, N 都是整数,且一般满足 $M \leq N$ 。与式(5.1)对应的数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (5.2)$$

由式(5.1)可知,数字滤波器的输出是当前输入、过去 M 点输入的线性组合与过去 N 点输出的线性组合之和。数字滤波器的基本运算单元包括加法器、常数乘法器和单位延时器。这些基本运算单元有两种表示方法,即方框图法和信号流图法,如图 5-1 所示。相应地,一个数字滤波器的运算结构也有两种表示方法。用方框图表示,明显直观,可以清楚地看到系统中各个运算单元的数量、乘法运算和加法运算的次数;而用信号流图表示,则更简洁,方便作图。信号流图与方框图是等效的,没有本质区别,只是符号表示上有差异。

下面以一个二阶数字滤波器为例,说明这两种表示方法。数字滤波器的差分方程为

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) \quad (5.3)$$

式(5.3)可以用图 5-2 的方框图和图 5-3 的信号流图来表示。信号流图由若干个节点及各

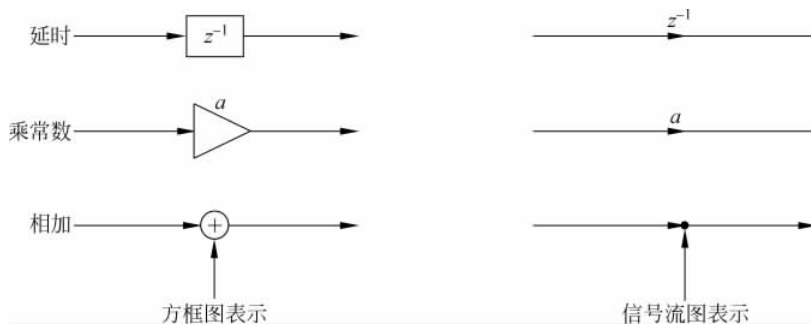


图 5-1 基本运算单元的方框图表示和信号流图表示

节点之间的有向支路组成。每个节点可能有多条输入支路和多条输出支路，节点的信号值等于所有输入支路的信号之和；节点的每个输出都等于该节点的信号变量值，即该节点的所有输入之和。输入支路的信号值等于这一支路起点处的节点信号值乘以支路上的传输系统或节点信号值的单位延时。若支路上不标传输系数值或延迟标识，则认为其传输系数为1。只有输出支路，没有输入支路的节点称为输入节点或源节点，如图5-3中的节点①；只有输入支路，没有输出支路的节点称为输出节点或阱节点，如图5-3中的节点⑨；既有输入支路，又有输出支路的节点称为混合节点，如图5-3中的节点②~⑦。本章采用信号流图来分析数字滤波器的结构。

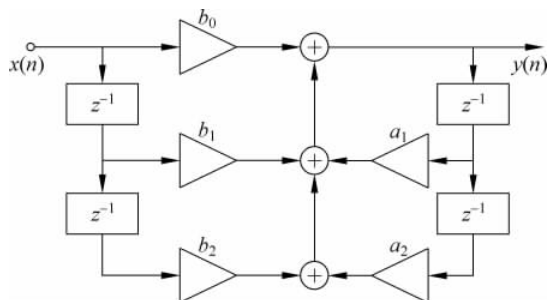


图 5-2 二阶数字滤波器的方框图结构

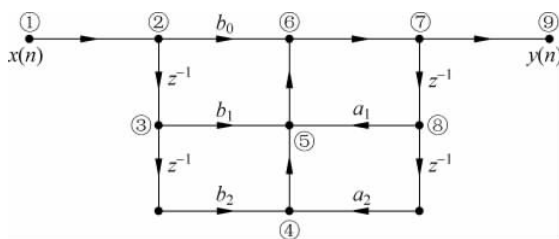


图 5-3 二阶数字滤波器的信号流图结构

信号流图的转置定理：对于只有单个输入和单个输出的系统，通过反转网络中全部支路的方向，且将其输入和输出互换，得到的流图具有与原流图同样的系统函数。

将图5-3的信号流图转置，可以得到图5-4的信号流图，这相当于将图5-3中FIR子系统和IIR子系统互换位置。图5-3和图5-4的信号流图就是式(5-3)描述的数字滤波器的

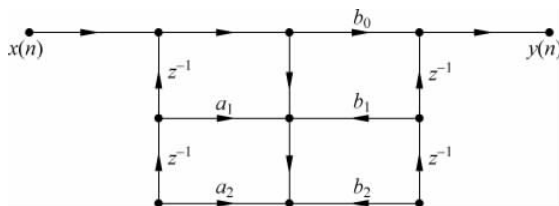


图 5-4 图 5-3 的信号流图的转置形式

两种不同结构。

5.2 IIR 滤波器的结构

IIR 滤波器的当前输出不仅与现在和以前的输入有关,而且还与以前的输出有关,在结构上存在从输出到输入的反馈,属于递归型结构。

IIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 有多种等效形式,如分解为多个子系统函数的乘积,因而有各种不同的结构形式。IIR 滤波器的基本结构包括直接 I 型、直接 II 型、级联型和并联型四种。

1. 直接 I 型

对 IIR 滤波器,在式(5.1)和式(5.2)中,至少有一个 $a_i \neq 0, i=1, 2, \dots, N$, 此时系统函数 $H(z)$ 可以分解为两个独立子系统 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的级联:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \quad (5.4)$$

其中,

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (5.5)$$

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (5.6)$$

其中, $W(z)$ 是中间变量 $w(n)$ 的 Z 变换。 $w(n)$ 是子系统 $H_1(z)$ 的输出,是子系统 $H_2(z)$ 的输入,即

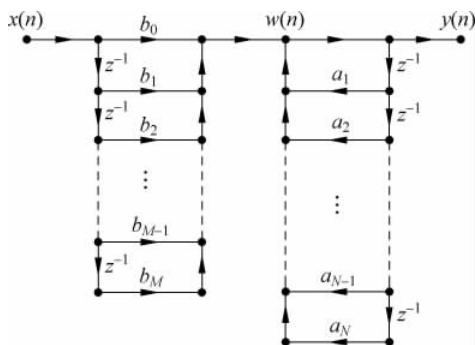
$$w(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \quad (5.7)$$

$$y(n) = w(n) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad (5.8)$$

显然, $H_1(z)$ 实现系统的零点, $H_2(z)$ 实现系统的极点。这种先用 FIR 子系统实现零点,再用全极点 IIR 子系统实现极点的数字滤波器结构称为直接 I 型,如图 5-5 所示。从图中可以看出,这种结构需要 $N+M$ 级延时单元。

2. 直接 II 型

对一个线性时不变系统,若交换其级联子系统的次序,系统函数是不变的,即总的输入输出关系不变。交换图 5-5 中子系统 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 的次序,即可得到如图 5-6 所示的结构,即让输入信号 $x(n)$ 先经过全极点反馈网络 $H_2(z)$, 输出中间变量 $u(n)$; 再将 $u(n)$ 输入


 图 5-5 实现 N 阶差分方程的直接 I 型结构

FIR 子系统 $H_1(z)$, 得到系统的最终输出 $y(n)$:

$$u(n) = x(n) + \sum_{i=1}^N a_i u(n-i) \quad (5.9)$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i u(n-i) \quad (5.10)$$

在图 5-6 中, 对中间变量 $u(n)$ 进行延时的两条延时链上的对应节点(同一水平线上的两个节点)具有相同的输入, 所以它们可以共用一组延时单元, 因而可以将这两条延时链合并, 得到如图 5-7 所示的直接 II 型结构, 也称为正准型结构或典范型结构。显然, 这种结构只需要 N 个延时单元, 比直接 I 型结构少 M 个延时单元(一般满足 $M \leq N$)。这可以节省存储单元(软件实现)或寄存器(硬件实现), 因此直接 II 型优于直接 I 型。

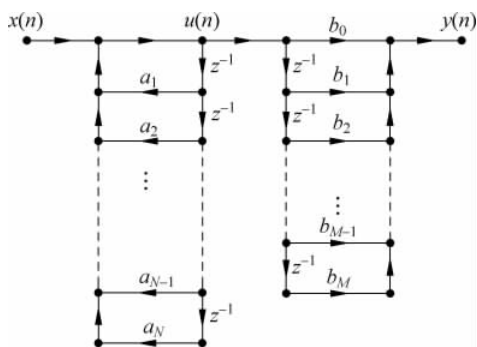


图 5-6 直接 I 型结构的变形

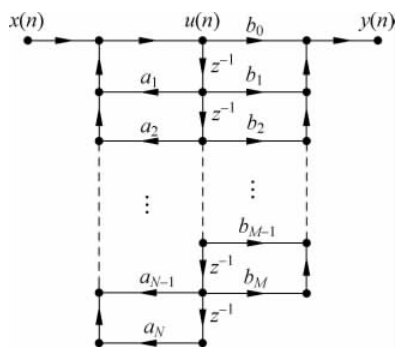


图 5-7 直接 II 型结构

在 FIR 滤波器的各种直接结构中, 系数 b_i 中一个系数的变化将会影响全部零点的分布, 系数 a_i 中一个系数的变化也会影响全部极点的分布, 因此对系数 a_i 和 b_i 的精度要求比较高, 从而对字长变化比较敏感, 容易导致系统不稳定或产生较大误差。直接结构一般只适用于低阶 IIR 系统; 对高阶 IIR 系统, 很少采用直接形式, 而是将高阶 IIR 系统变换为若干低阶(一阶或二阶)系统的级联或并联来实现。

3. 级联型

将式(5.2) $H(z)$ 的分子和分母分别按零、极点进行因式分解, 将 $H(z)$ 表示为零、极点的形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (1 - d_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - c_i z^{-1})} \quad (5.11)$$

其中, c_i 和 d_i 分别是 $H(z)$ 的极点和零点; A 是增益(实数)。因为 a_i 和 b_i 均为实系数, 所以极点 c_i 和零点 d_i 要么是实根, 要么是共轭复根。将每一对共轭因子合并, 就可以构成一个实系数的二阶因子, 从而

$$H(z) = A \frac{\prod_{i=1}^{M_1} (1 - g_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{M_2} (1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2})}{\prod_{i=1}^{N_1} (1 - p_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{N_2} (1 - a_{1i} z^{-1} - a_{2i} z^{-2})} \quad (5.12)$$

如果设 $M=N$, 即 $b_{M+1}=b_{M+2}=\dots=b_N=0$, 且将两个实系数一阶因子组合成一个实系数二阶因子, 那么 $H(z)$ 就可以完全分解为 L 级实系数二阶子网络级联的形式:

$$H(z) = A \prod_{i=1}^L H_i(z) = A \prod_{i=1}^L \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 - a_{1i} z^{-1} - a_{2i} z^{-2}} \quad (5.13)$$

其中, $L = \frac{N}{2}$ (N 为偶数) 或 $L = \frac{N+1}{2}$ (N 为奇数); 二阶子网络 $H_i(z)$ 也称为二阶节, 其一般形式为

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1i} z^{-1} + b_{2i} z^{-2}}{1 - a_{1i} z^{-1} - a_{2i} z^{-2}} \quad (5.14)$$

对每个二阶节 $H_i(z)$, 都用直接 II 型(正准型)实现。这样, 整个滤波器就是 L 级二阶节 $H_i(z)$ 的级联, 如图 5-8 所示。在级联型结构中, 分子、分母中二阶因子配合成的二阶节有 $L!$ 种, 而各个二阶节的排列次序也有 $L!$ 种, 这些排列方案都表示同一个系统函数 $H(z)$, 因此同一个系统函数有若干种级联形式。在数字系统的有限字长条件下, 每种方案产生的误差是不一样的。因此, 对二阶因子的配对和二阶节的排列次序, 就存在最优化的问题, 即寻找零、极点的最佳配对方案和二阶节的最佳排序。

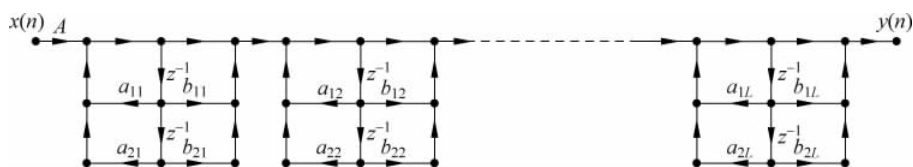


图 5-8 IIR 滤波器的级联型结构

级联型结构的优点是实现简单, 用一个二阶网络, 通过变换系数即可实现整个系统, 此外, 零极点可单独控制, 调整 a_{1i} 和 a_{2i} , 可单独调整第 i 对极点; 调整 b_{1i} 和 b_{2i} , 可单独调整第 i 对零点。级联型结构的缺点是各级相互影响, 前一级的运算误差会被累计到下一级, 影响运算精度。因此, 在二阶节的排序中, 尽量将误差小的二阶节放在前面, 将误差大的二阶节放在后面。

4. 并联型

设 $M \leq N$, 则系统函数 $H(z)$ 表示为如下部分分式展开式的形式:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} = A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{(1 - c_i z^{-1})} \quad (5.15)$$

其中, c_i 是 $H(z)$ 的第 i 个极点; A_i 是分子系数。然后, 将其中的共轭复根成对合并为二阶实系数, 得到实系数部分分式:

$$H(z) = A_0 + \sum_{i=1}^K \frac{A_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_{i=1}^L \frac{b_{0i} + b_{1i} z^{-1}}{1 - a_{1i} z^{-1} - a_{2i} z^{-2}} \quad (5.16)$$

其中, A_0 是增益。这样系统函数 $H(z)$ 就分解为 K 个一阶子网络、 L 个二阶子网络和一个增益常数的并联形式, 如图 5-9 所示。在并联型结构中, 可以单独调整每对极点的位置, 但不能像级联型结构那样单独调整零点的位置。但是, 并联型结构的各一阶子网络和二阶子网络互不影响, 总误差比级联型小, 对字长要求低。此外, 并联型结构的各个子网络可以并行计算, 运算速度比级联型快。因此, 在要求有准确的传输零点的场合下, 宜采用级联型结构; 其他情况下, 宜采用并联型结构。

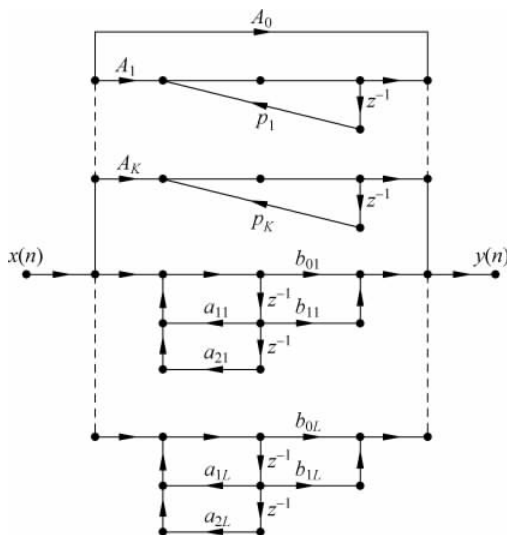


图 5-9 IIR 滤波器的并联型结构

5.3 FIR 滤波器的结构

FIR 滤波器的当前输出只与现在和以前的输入有关, 与以前的输出无关, 属于非递归型结构。设 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 是一个长度为 N 的因果序列, $0 \leq n \leq N-1$, 则滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (5.17)$$

差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) x(n-i) \quad (5.18)$$

显然, FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 只在 z 平面的原点 $z=0$ 处有 1 个 $(N-1)$ 阶极点, 在 z 平面的其他地方不存在极点; 有 $(N-1)$ 个零点, 可以分布在有限 z 平面的任何位置, 这取决于 $h(n)$ 的具体值。

1. 横截型

横截型也称为直接型或卷积型, 直接由式 (5.18) 的卷积关系得出, 即输出序列 $y(n)$ 是单位脉冲响应 $h(n)$ 与输入序列的 $x(n)$ 的线性卷积, 如图 5-10 所示。利用转置定理, 可以得到如图 5-11 所示横截型结构的等效形式, 相当于对输入先乘系数, 再延时。

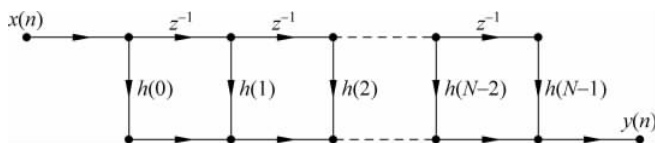


图 5-10 FIR 滤波器的横截型结构

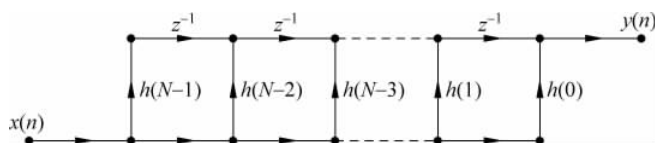


图 5-11 FIR 滤波器的横截型结构的等效形式

2. 级联型

当需要控制 FIR 滤波器的零点时, 可以将其系统函数 $H(z)$ 分解为二阶实系数因式乘积的形式:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{i=1}^L (b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}) \quad (5.19)$$

这样, 就可以用 L 个二阶网络级联构成 FIR 滤波器, 如图 5-12 所示。在级联型结构中, 每个二阶网络控制一对零点, 因而可以在需要控制零点时采用这种结构。级联型结构所需的系数比横截型多, 因此乘法运算量也比较大。

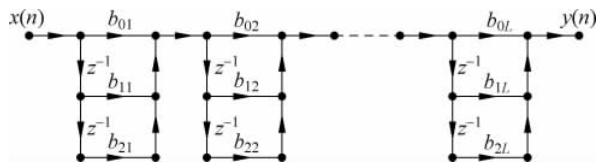


图 5-12 FIR 滤波器的级联型结构

3. 线性相位型

FIR 滤波器的一个重要特点是可以实现严格的线性相位。线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 满足偶对称条件 $h(n) = h(N-1-n)$ 或奇对称条件 $h(n) = -h(N-1-n)$ 。下面以 $h(n)$ 偶对称为例, 介绍 FIR 滤波器的线性相位型结构。

当 $h(n)$ 偶对称, N 为奇数时,

$$H(z) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] \quad (5.20)$$

式(5.20)的结构如图 5-13 所示。显然,当 N 为奇数时,线性相位型结构只需要进行 $\frac{N+1}{2}$ 次乘法,少于横截型的 N 次,计算量减少近一半。

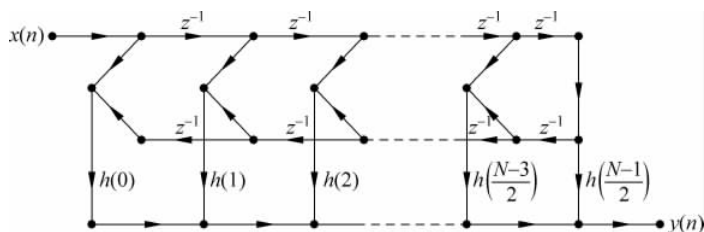


图 5-13 N 为奇数时的线性相位 FIR 滤波器结构

当 $h(n)$ 偶对称, N 为偶数时,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] \quad (5.21)$$

式(5.21)的结构如图 5-14 所示。当 N 为偶数时,线性相位型结构只需要进行 $\frac{N}{2}$ 次乘法,少于横截型的 N 次,计算量减少一半。

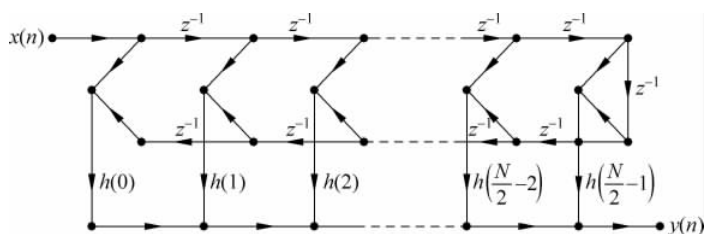


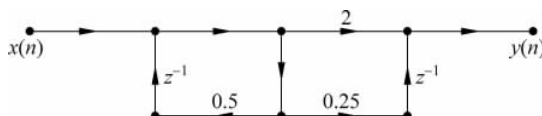
图 5-14 N 为偶数时的线性相位 FIR 滤波器结构

对第三类和第四类线性相位滤波器,因为 $h(n)$ 奇对称,即 $h(n) = -h(N-1-n)$,所以只需要在图 5-13 和图 5-14 中将 $x(N-1-n)$ 的传输系数(斜向左上方的箭头)设置为 -1 。值得注意的是,只有线性相位 FIR 滤波器才能设计为线性相位结构,非线性相位 FIR 滤波器没有线性相位结构。

FIR 滤波器还有一种含有递归子网络的频率采样型结构,有兴趣的读者可以参阅相关参考文献。

习题

5-1 如下图,写出该数字滤波器的差分方程和系统函数。



5-1 题图

5-2 用直接 I 型和直接 II 型结构实现下列系统函数：

$$H(z) = \frac{2 + 1.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-1}}$$

5-3 已知 IIR 滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{3(z + 0.5)(z^2 + 0.4z + 0.13)}{(z - 0.2)(z^2 - 0.6z + 0.25)}$$

- (1) 用级联型结构实现 $H(z)$ ；
- (2) 一共能构成多少种级联型网络？

5-4 已知 IIR 滤波器的系统函数

$$H(z) = \frac{7 + 3.8z^{-1} + 0.41z^{-2} - 0.068z^{-2}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.8z^{-1} + 0.17z^{-2})}$$

- (1) 将 $H(z)$ 分解为部分分式的形式；
- (2) 用并联型结构实现系统函数 $H(z)$ 。

5-5 已知 FIR 滤波器的系统函数

$$H(z) = \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - 4z^{-1})(1 + 3z^{-1})\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)(1 + z^{-1})$$

- (1) 求该滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ ；
- (2) 用横截型结构实现系统函数 $H(z)$ 。

5-6 已知 FIR 滤波器的单位脉冲响应

$$h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1) + \delta(n-2) - 0.75\delta(n-3)$$

- (1) 求该滤波器的系统函数 $H(z)$ ；
- (2) 用级联型结构实现系统函数 $H(z)$ 。

5-7 已知 FIR 滤波器的系统函数

$$H(z) = 0.2 + 0.7z^{-1} + 1.2z^{-2} + 1.2z^{-3} + 0.7z^{-4} + 0.2z^{-5}$$

- (1) 用线性相位结构实现系统函数 $H(z)$ ；
- (2) 求该滤波器在单位圆上 $\omega = \pi$ 处的频率响应 $H(e^{j\pi})$ 。

5-8 已知数字滤波器的单位脉冲响应

$$h(n) = 0.4^n R_8(n)$$

- (1) 求该滤波器的系统函数 $H(z)$ ；
- (2) 用级联型结构实现系统函数 $H(z)$ 。