第1章 随机事件与概率

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

(1) 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式.

(3) 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

2. 本章概要与重点导学

本章主要解决概率论的基础问题,我们首先要掌握事件的关系和运算,在此基础上去领会概率是什么,学习概率的公理化定义,特别注意条件概率和事件独立性的判定方法. 本章还将学习两个概率模型——古典概型和几何概型. 最后,将学习两个重要公式——全概率公式和贝叶斯公式. 本章是整个概率论的基石,请大家务必搞懂、学透.

必会基本内容

一、随机试验与随机事件

1. 随机试验(E)

将具有以下三个特点的试验称为随机试验:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 试验的可能结果不唯一,但能确定所有可能结果;

(3) 试验之前无法确定具体哪一个结果发生.

2. 样本空间(Ω)与样本点(ω)

随机试验所有可能结果所组成的集合称为样本空间,记为 $\Omega=\{\omega\}$.

随机试验的每一个结果称为样本点.

3. 随机事件(A,B,C)

样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称"事件".

4. 随机事件的分类

(1) 基本事件

一个样本点组成的事件称为基本事件.

(2) 复合事件

由两个或两个以上样本点组成的事件称为复合事件.

(3) 必然事件

样本空间 Ω 包含所有样本点,它是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件,记为 Ω.

(4) 不可能事件

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,但它也作为样本空间的子集,只是在每次试验中都不发生,称为不可能事件,记为 $\varnothing$.

5. 事件发生

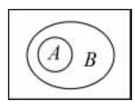
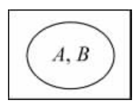
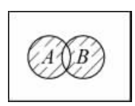
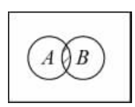
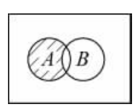
在每次试验中,事件有且仅有一个样本点出现时,称事件发生.

魔研君点睛

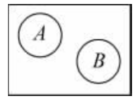
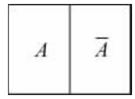
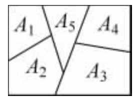
随机事件的研究,正是概率论与数理统计这门学科探究事物发生背后规律性的体现. 考生要能清晰地通过特征识别随机试验,而且要搞清楚样本空间与随机事件的关系,这对日后的学习都有好处哟.

二、随机事件的关系与运算

1. 随机事件的关系与运算

关系	符号	含义	文氏图
包含	$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	
相等	$A=B$	$A\subset B$ 且 $B\subset A$,则 $A=B$	
和(并)	$A+B$ 或 $A\cup B$	事件 A 和事件 B 至少有一个发生	
积(交)	AB 或 $A\cap B$	事件 A 和事件 B 同时发生	
差	$A-B$ 或 $A\overline{B}$	事件 A 发生且事件 B 不发生	

续表

关系	符号	含义	文氏图
互斥	$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 不同时发生	
对立	$A,\overline{A}$	$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生	
完备事件组		$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥，且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$. 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组	

2. 随机事件的运算律

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

（3）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

（4）德·摩根律（对偶律）：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

小试牛刀

【例 1.1】 设 A,B 和 C 为任意三事件，则下列选项中正确的是（　　）.

（A）若 $A+C=B+C$，则 $A=B$　　　　（B）若 $A-C=B-C$，则 $A=B$

（C）若 $AC=BC$，则 $A=B$　　　　（D）若 $AB=\varnothing$，且 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，则 $\overline{A}=B$

解析　在知识点上，本题考查的是随机事件的运算律；在解题方法上，学生要学会排除法，举出反例，证明你的判断.

（A）中：假设 $A\neq B$，但 $C=\Omega$ 是必然事件，则满足 $A+C=B+C$，这与本选项中的结论 $A=B$ 相矛盾.

（B）中：假设 $A\neq B$，但 $C=\Omega$ 是必然事件，则满足 $A-C=B-C$，这与本选项中的结论 $A=B$ 相矛盾.

（C）中：假设 $A\neq B$，但 $C=\varnothing$，则满足 $AC=BC$，这与本选项中的结论 $A=B$ 相矛盾. 故选(D).

另外，本题可以通过对偶律直接得出正确结论：由对偶律得 $\overline{\overline{A}\overline{B}}=A+B=\Omega$. 而由 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，可得出结论，A 和 B 互为对立事件，即 $\overline{A}=B$.

三、随机事件的概率 $P(A)$ 与古典概型、几何概型

魔研君点睛

引入知识 1——排列组合（日后做题经常用到）

（1）排列数 A_n^m：从 n 个不同元素中取 m 个元素，并按照一定顺序排成一列，称为排列. 所有排列的个数称为排列数.

（2）组合数 C_n^m：从 n 个不同元素中取 m 个元素，并成一组，称为组合. 所有组合的个数称为组合数.

引入知识 2——频率

频数：在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的频数.

频率：比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$.

频率性质：

(1) 非负性：$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots,n$，则有 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$.

1. 概率的公理化定义

(1) 定义

对随机试验 E 所对应的样本空间 Ω 中的每一事件 A，均赋予一个实数 $P(A)$，称其为事件 A 的概率.

集合函数 $P(A)$ 满足以下条件：

① 非负性：$P(A) \geqslant 0$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j=\varnothing, i, j=1,2,\cdots,n$，则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

魔研君点睛

概率的统计学定义：当试验次数 n 充分大时，频率将趋于稳定状态，最后会“固定”为一个值 p，即称这个 p 为概率. 考生们要清楚，频率是概率的估计，而非概率本身.

(2) 概率的性质

① 非负性：$\forall A \subseteq \Omega, 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

② 规范性：$P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$；

③ 有限可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j, A_iA_j=\varnothing, i, j=1,2,\cdots,n$，有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$；

④ 逆事件的概率：对于任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

⑤ 减法公式：设 A, B 是两个事件，则有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$（减法公式）；若 $A \subset B$，则有 $P(A) \leqslant P(B)$ 且

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

⑥ 加法公式：对于任意两随机事件 A, B，有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

魔研君点睛

3 个事件的概率加法公式：

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

小试牛刀

【例 1.2】 已知 A, B 两个随机事件满足 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$

________.

解析　利用随机事件的概率运算性质化简,由概率的加法公式,得

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)].$$

已知 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$,得 $P(A)+P(B)=1$,故 $P(B)=1-P(A)=1-p$.

2. 古典概型

(1) 定义

若某试验 E 满足:

① 有限性:样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

② 等可能性:$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$,

则称 E 为“古典概型”.

(2) 计算方法

设事件 A 中所含样本点个数为 $N(A)$,样本空间 Ω 中样本点总数为 $N(\Omega)$,则有

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

小试牛刀

【例 1.3】　一个口袋装有 6 只球,其中 4 只白球,2 只红球.从袋中取球两次,每次随机地取 1 只,取样方式为放回抽样.

问:(1) 取到的 2 只球都是白球的概率;

(2) 取到的 2 只球颜色相同的概率;

(3) 取到的 2 只球中至少有 1 只是白球的概率.

魔研君点睛

大家要分清什么是放回抽样,什么是不放回抽样.

放回抽样:第一次取 1 只球,观察其颜色后放回袋中,搅匀后再取 1 只球;不放回抽样:第一次取 1 只球不放回袋中,第二次从剩余的球中取 1 只球.

解析　令 A,B,C 分别表示事件“取到的 2 只球都是白球”、“取到的 2 只球都是红球”、“取到的 2 只球中至少有 1 只是白球”.由此可知,问题(2)中取到 2 只颜色相同的球的概率 $D=A\cup B$,且知 $C=\overline{B}$,则有

$$P(A) = \frac{4\times4}{6\times6} = \frac{4}{9},\quad P(B) = \frac{2\times2}{6\times6} = \frac{1}{9}.$$

经分析,得 $AB=\varnothing$,故有

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 0 = \frac{5}{9}, \end{aligned}$$

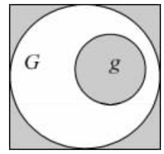
即 $P(D)=P(A\cup B)=\dfrac{5}{9}$,$P(C)=P(\overline{B})=1-P(B)=\dfrac{8}{9}$.

【思考】　本题如果改成不放回抽样,又该怎样算呢?这个“小工程”就交给广大考生自己完成吧.

3. 几何概型

(1) 定义

设在空间上有一区域 G,设区域 g 包含在区域 G 内(如右图),而区域 G 与 g 都是可以度量(可求面积)的.现随机地向 G 内投掷一点 M,假设点 M 必落在 G 中,且点 M 落在区域 G 的任何部分区域 g 内的概率只与 g 的测度(长度、面积、体积等)成正比,而与 g 的位置和形状无关.具有这种性质的随机试验,称为几何概型.



魔研君点睛

几何概型可以理解为古典概型的延伸,保持样本点的等可能性,但个数变为无穷.

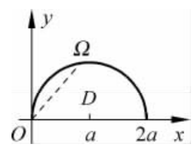
(2) 计算方法

$$P(A)=\frac{A\text{ 的测度(长度、面积或体积)}}{\Omega\text{ 的测度(长度、面积或体积)}}.$$

小试牛刀

【例 1.4】 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$(a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

解析 由题可知 $S_\Omega=\frac{1}{2}\pi a^2$(由已知可得圆的半径为 a),令 A 表示事件"原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$",如图所示,事件 A 对应图中区域 D,则有



$$P(A)=\frac{S_D}{S_\Omega}=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{a}{2}^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

魔研君点睛

计算几何概型题目的步骤:

(1) 确定样本空间,并计算其长度(或面积)m_Ω;

(2) 确定所求的事件有多少落在样本空间中,计算出它的长度(或面积)m_A;

(3) $P(A)=\frac{m_A}{m_\Omega}$.

四、条件概率

(1) 条件概率的定义

设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率称为 A 条件下 B 的条件概率,记作 $P(B|A)$,计算公式为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

(2) 条件概率的性质

① $0 \leqslant P(B|A) \leqslant 1$；

② $P(\Omega|A)=1$；

③ $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$；

④ $P\{(A_1+A_2)|B\}=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

(3) 乘法公式

$P(A)>0, P(AB)=P(B|A)P(A)$.

魔研君点睛

还可推广到 3 个事件的情形：$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$.

一般地，有下列公式：$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$.

小试牛刀

【例 1.5】 已知 $P(A)=0.4, P(B|A)=0.5, P(A|B)=0.25$，则 $P(B)=$________.

解析 由 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，得

$$P(AB)=P(B \mid A)\cdot P(A).$$

由 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$，得

$$P(AB)=P(A \mid B)\cdot P(B).$$

故有 $P(B|A)\cdot P(A)=P(A|B)\cdot P(B)$，则可得

$$P(B)=\frac{P(B \mid A)\cdot P(A)}{P(A \mid B)}=\frac{0.5\times 0.4}{0.25}=\frac{4}{5}.$$

五、全概率公式和贝叶斯公式

1. 全概率公式

若满足下列条件：

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，

(2) $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，

即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任何事件 $B\in\Omega$，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i),$$

称为全概率公式.

2. 贝叶斯公式

条件同上，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任何事件 $B\in\Omega$，有

$$P(A_j \mid B)=\frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B \mid A_i)},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

称为贝叶斯公式.

魔研君点睛

贝叶斯公式可以看作是全概率公式的逆运算，因此很多情况下我们也称其为逆概公式，同学们在学习的时候要把两个公式对比着学习哟.

小试牛刀

【例 1.6】 据美国的一份资料报导，美国人口中患肺癌的概率约为 0.1%，其中有 20% 是吸烟者，他们患肺癌的概率约为 0.4%，求不吸烟者患肺癌的概率是多少？

解析 以 C 记事件"患肺癌". 以 A 记事件"吸烟"，由题意知 $P(C)=0.001$，$P(A)=0.20$，$P(C|A)=0.004$.

现在要求条件概率 $P(C|\overline{A})$，由全概率公式得

$$P(C)=P(C\mid A)\cdot P(A)+P(C\mid \overline{A})\cdot P(\overline{A}),$$

即 $0.001=0.004\times 0.2+P(C|\overline{A})\cdot(1-0.2)$，

故得 $P(C|\overline{A})=0.00025=0.025\%$.

六、事件的独立性

1. 事件的独立性

(1) 定义

设 A,B 是两事件，若

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B 相互独立.

魔研君点睛

事件相互独立的定义表述，除上面形式外，还有 $P(B)=P(B|A)$.

(2) 性质

以下四组事件关系，有一对成立，则其他三对也成立：

① 事件 A,B 相互独立；②事件 $A,\overline{B}$ 相互独立；

③ 事件 $\overline{A},B$ 相互独立；④事件 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立.

(3) 三个事件的独立性

① 若三个事件 A,B,C 满足：

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C 两两独立.

② 若在此基础上还满足：

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

魔研君点睛

一般地，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，如果对任意 $k(1<k\leqslant n)$，任意的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，具有等式：

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

小试牛刀

【例 1.7】 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件 $A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件(　　).

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立　　(B) A_2, A_3, A_4 相互独立

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立　　(D) A_2, A_3, A_4 两两独立

魔研君点睛

本题考查三个事件两两独立与相互独立的判别，大家要掌握以下三个知识点：①古典概率计算；②三个事件两两独立与相互独立的联系与区别；③独立重复试验各事件概率的计算.

解析 由已知得

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(A_4)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_1A_4)=P(A_2A_4)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_3A_4)=0,$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_2A_3A_4)=0,$$

则 A_1, A_2, A_3 两两独立. 故选(C).

2. n 重伯努利概型及其概率计算

(1) 独立重复试验

在多次试验中，如果各次试验的事件相互独立，且同一事件在各次试验中发生的概率相同，则称这些试验是相互独立的.

(2) n 重伯努利试验

只有两个结果 $\mathbf{A}$ 和 $\bar{\mathbf{A}}$ 的试验称为伯努利试验，若将伯努利试验独立重复进行 n 次，则称这 n 次试验为 n 重伯努利试验.

(3) 二项概率公式

设每次试验中，事件 A 发生的概率均为 $p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 发生 k 次记为 A_k，其概率为

$$P(A_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n,$$

此公式称为二项概率公式.

小试牛刀

【例 1.8】 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为(　　).

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

解析 把独立重复射击看成独立重复试验,射中目标看成试验成功.第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标可以理解为:第 4 次试验成功且前三次试验中必有 1 次成功,2 次失败.

根据独立重复的伯努利试验,前 3 次试验中有 1 次成功 2 次失败.其概率为 $C_3^1p(1-p)^2$.再加上第 4 次是成功的,其概率为 p.所以,第 4 次射击为第二次命中目标的概率为 $C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2$.故选(C).

考试题型与解析

题型一:事件的关系与运算

【例 1.9】 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的互不相容事件,则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

解析 因为 $AB=\varnothing$,所以 $A-B=A$,故选(D).

若取 $\Omega=\{1,2,3\}$,又若 $A=\{1\}$,$B=\{3\}$,则 $AB=\varnothing$.但 $\overline{A}=\{2,3\}$,$\overline{B}=\{1,2\}$,所以 $\overline{A}\overline{B}=\{2\}\neq\varnothing$,则(A)应排除.又若 $A=\{1,2\}$,$B=\{3\}$,仍有 $AB=\varnothing$,但 $\overline{A}=B$,$\overline{B}=A$,所以 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,故(B)也不正确.

本题中 $P(AB)=P(\varnothing)=0$,而 $P(A)>0$,$P(B)>0$,所以 $P(A)P(B)>0$,(C)显然应排除,故选(D).

【例 1.10】 若两事件 A,B 同时出现的概率 $P(AB)=0$,则(　　).

(A) A,B 互不相容(互斥)　　(B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件　　(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

> **魔研君点睛**
>
> 同学们注意啦,不可能事件和概率为 0 的事件并非完全等价,必然事件和概率为 1 的事件也并非完全等价哟,比如大家可以算一下在数轴上取到任意一个数的概率是多少?

解析 由 $P(AB)=0$ 不能推出 $AB=\varnothing$,故可排除(A),(B).而(D)也明显不对,故选(C).

举例说明:若随机变量 X 服从(0,2)上的均匀分布,$A=\{X\leqslant1\}$,$B=\{X\geqslant1\}$,则 $P(AB)=P\{X=1\}=0$.但 $AB=\{X=1\}$不是不可能事件,即 A 和 B 不互斥,且 $P(A)=$