第 1 章 行列式

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲及考试要求

序号	考试内容与要求	适用科目
1	了解行列式的概念,掌握行列式的性质	数学一、二、三
2	会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式	数学一、二、三

2. 本章概要与重点导学

在复习考研线性代数这门学科时,行列式是最先接触到的一个概念.对于 n 阶矩阵,n 这个量就包含着巨大的信息,它可以帮助我们判断矩阵是否可逆、矩阵的行(列)向量是否线性无关.准确理解行列式的概念和性质是第 1 章复习的重中之重.

在考研中,行列式的考查形式千变万化,但是归根结底需要掌握的是行列式的具体算法,即:(1)利用行列式各种性质计算数值型行列式;(2)与矩阵性质相结合,计算抽象型行列式;(3)掌握行列式展开定理,解决余子式相关问题.

必会基本内容

一、n 阶行列式基本定义

1. 排列和逆序

排列:把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的(全)排列.

逆序数:对于一个排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$,考虑元素 p_i,如果 p_i 前面的元素中比 p_i 大的有 t_i 个,则 p_i 这个元素的逆序数是 t_i,全体元素的逆序数和 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$ 即是这个排列的逆序数.

奇排列和偶排列:如果一个排列的逆序数为奇数,则称这个排列为奇排列,否则为偶排列.

小试牛刀

【例 1.1】 求排列 1423 的逆序数.

解析 元素 1 前面没有元素,逆序数为 0.

元素 4 前面没有比它大的元素,逆序数为 0.

元素 2 前面有一个 4 比它大,逆序数为 1.

元素 3 前面有一个 4 比它大,逆序数为 1.

所以,1423 的逆序数为 0+0+1+1=2.

2. n 阶行列式的定义式

n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

这里 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 是选取的不同行不同列的 n 个元素,共 n^2 组,t 是 $p_1p_2\cdots p_n$ 这个排列的逆序数.从而可以推出二阶和三阶行列式的公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^0a_{11}a_{22}+(-1)^1a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^2a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2a_{13}a_{21}a_{32}+\\ &\quad(-1)^1a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^3a_{13}a_{22}a_{31}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

魔研君点睛

用 n 阶行列式的定义式可以写出任意阶行列式的值,但是超过三阶之后,公式就会变得极为复杂.因此,高阶行列式化简就显得极为关键,此时要用到行列式的完全展开式.

二、行列式的完全展开式

在 n 阶行列式中,将 a_{ij} 所在的行和列划去,剩下的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 叫做 a_{ij} 的代数余子式.

例如,对于行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$,元素 2 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=36-42=-6$,而它的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=6$.

行列式的完全展开式

定理 1.1 行列式的值等于行列式任意一行(列)的元素与它对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

定理 1.2 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

小试牛刀

【例 1.2】 求$\begin{vmatrix}1&3&2\\2&5&6\\0&2&4\end{vmatrix}$.

解析　方法 1　按第 1 行展开,得

$$1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\2&4\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&6\\0&4\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&5\\0&2\end{vmatrix}$$
$$=8-24+8=-8.$$

方法 2　按第一列展开,得

$$1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\2&4\end{vmatrix}+2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&2\\2&4\end{vmatrix}$$
$$=8-16=-8.$$

三、行列式的性质

1. 行列式与它的转置行列式相等.

2. 对行列式某行(列)可以做分解.例如,若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}$都是三维列向量,则$|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}|+|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\gamma}|$.

魔研君点睛

矩阵以及向量相加减,是将每一个分量各自相加减,而行列式的相加减,只是对单行(列)的运算,并且需要其余行(列)完全相同才能相加减.

3. 对换行列式的两行(列),则行列式变号.

推论　行列式有两行(列)完全相同,则行列式等于 0.

证明　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行相同,则对调那两行得到$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$,则$|\boldsymbol{A}|=0$.证毕.

4. 将行列式某一行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+kc&b+kd\\c&d\end{vmatrix}.$$

5. 行列式每一行(列)的公因子可以提到行列式记号外面.

$$\begin{vmatrix}ka&kb\\c&d\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}.$$

需要注意的是$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$,因为

$$\left|k\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}ka_{11}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&&\vdots\\ka_{n1}&\cdots&ka_{nn}\end{vmatrix}=k^n\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

魔研君点睛

常数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘,得到的结果是 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素相乘.而 k 与行列式相乘,就是纯粹的两数相乘,这一点大家一定不能混淆.

推论 行列式若有某两行(列)成比例,则行列式等于0.

魔研君点睛

在计算行列式的时候,要熟练运用行列式的性质将其化简,再用行列式的完全展开式来计算.这个计算功底一定要在复习行列式的时候就打牢,因为在后面的复习中,无论是矩阵的初等变换还是求解线性方程组,都需要强大的计算功底做支撑.

小试牛刀

【例1.3】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}.$$

解析 (1) 保留a_{33},将第3列的-2倍加至第1列,再将第3列加至第4列,化简可以得到

$$D=\begin{vmatrix}5&1&-1&1\\-11&1&3&-1\\0&0&1&0\\-5&-5&3&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第3行}}(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}.$$

(2) 再将$\begin{vmatrix}5&1&1\\-11&1&-1\\-5&-5&0\end{vmatrix}$的第1行加至第2行,得

$$D=\begin{vmatrix}5&1&1\\-6&2&0\\-5&-5&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第3列}}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-6&2\\-5&-5\end{vmatrix}=40.$$

四、几种特殊行列式

1. 上、下三角形行列式及对角型行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\cdots\cdot a_{nn}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&\iddots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&\\\vdots&\iddots&&\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&\\&\iddots&&\\a_{n1}&&&\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}\cdot a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}.$$

魔研君点睛

(1) 对于上、下三角形行列式及对角型行列式，我们只能挑出一组不含 0 的不同行不同列的元素，即 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$，因而根据 n 阶行列式的定义式，$|\boldsymbol{A}|=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，对于 $123\cdots n$ 这个排列，它的逆序数为 0，则 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(2) 同样地，对副对角线行列式，我们也只能挑出一组不含 0 的不同行不同列的元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$，而对排列 $n(n-1)\cdots 1$ 来说，它的逆序数 $t=1+2+\cdots+n-1=\frac{1}{2}n(n-1)$，所以 $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

3. 范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

考试题型与解析

题型一：数值型行列式的计算

方法一：行列式展开公式求解

【例 1.4】 求下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}$.

解析 本题是考研真题，考查的是约简行列式后展开计算的能力. 一般遇到这种题目，解题策略是将行列式化简出尽可能多的 0 后再展开.

(1) 将原式按第 4 列展开，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\lambda+1)(-1)^{4+4}\cdot\lambda^3+(-1)\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\4&3&2\end{vmatrix}\\&=\lambda^3(\lambda+1)+\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\4&3&2\end{vmatrix}\\&=\lambda^4+\lambda^3+\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1\\3&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1\\4&2\end{vmatrix}\\&=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.\end{aligned}$$

(2) 将原式按第 1 列展开,得

$$\text{原式}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}$$
$$=1-a^4.$$

方法二:利用行列式性质

【例 1.5】 记 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$,则 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

解析 这道题目考的就是行列式的化简,需要利用行列式的一系列性质将 $f(x)$ 的表达式写出来.

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{-C_1+C_3\\-C_1+C_4}]{-C_1+C_2}\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-3\\4x&-3&x-7&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_2+C_4}\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2&-2\\x-7&-3\end{vmatrix}$$

$$=5x(x-1)=0,$$

则 $x=0$ 或 1. 故选(B).

【例 1.6】 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$(　　).

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

解析 这是 2014 年数学一的真题,考查的是用分块矩阵求行列式的知识.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (cb - ad)(ad - cb) = -(ad - bc)^2.$$

故本题选(B).

魔研君点睛

分块矩阵行列式计算.

若 $\boldsymbol{A}_n$,$\boldsymbol{B}_m$ 分别为 n 阶,m 阶方阵,则

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{C}_{n\times m} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}_{m\times n} & \boldsymbol{B}_m \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{B}_m|$;

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{C}_{m\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{A}_n \\ \boldsymbol{B}_m & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}_n||\boldsymbol{B}_m|$;

(3) 注意,$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} \neq |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}| - |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|$.

【注】 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}$ 的形式非常复杂,考研中不会作要求,感兴趣的同学可翻阅相关文献自行学习.

【例 1.7】 计算 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & & \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & & & \\ & -1 & 1-b_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-b_{n-1} & b_n \\ & & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$.

解析 此题考查的是顺次相加化简计算行列式的方法.

先将第 1 行加至第 2 行,再将第 2 行加至第 3 行,……,得

$$原式 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & & \\ 0 & 1 & b_2 & & & \\ & -1 & 1-b_2 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1-b_n & b_n \\ & & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & & & \\ & 1 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & b_n \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

方法三:提取公因子

【例 1.8】 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

解析 观察发现,行列式每一列元素的加和都是 $a+(n-1)b$,又联系到行列式同一行(列)可以提取公因子.

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{减去第 1 列}]{\text{第 } 2\sim n \text{ 列依次}} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & & & \\ b & a-b & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b & & & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【例 1.9】 $D=\begin{vmatrix} 1+n & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+n & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+n & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+n \end{vmatrix}=$________.

解析

$$D=\begin{vmatrix} 10+n & 2 & 3 & 4 \\ 10+n & 2+n & 3 & 4 \\ 10+n & 2 & 3+n & 4 \\ 10+n & 2 & 3 & 4+n \end{vmatrix}$$

$$=(10+n)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+n & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+n & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+n \end{vmatrix}$$

$$=(10+n)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}=(10+n)\cdot n^3.$$

【例 1.10】 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$________.

解析

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\cdot x^3\cdot(-1)^{\frac{1}{2}\times 4\times 3}$$

$$=x^4.$$

【例 1.11】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解析 (1) 将第 $2\sim n$ 行加至第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

(2) 将第 n 列～第 2 列依次减去前 1 列，得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ \vdots & 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \iddots & 1-n & 1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}.$$

(3) 将第 $2\sim n-1$ 行加至第 1 行，得

$$D_n=\frac{n(n-1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1\\ 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 1 & \iddots & \iddots & & \vdots\\ 1-n & 1 & \cdots & \cdots & 1\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & \cdots & \cdots & 1\\ & & -n & \\ & \iddots & & \\ -n & & & \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-1)^{n-1}\cdot n^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n+1}{2}n^{n-1}.$$

方法四：初等变化化为三角行列式求解

魔研君点睛

求值任意一个数值行列式，用初等变换将其化为上、下三角形行列式都是一个万能方法，这里以一个四阶行列式$\begin{vmatrix}1&0&2&3\\2&1&2&0\\3&0&7&6\\4&2&3&1\end{vmatrix}$为例，具体操作步骤如下：

（1）第1步，分别将2，3，4行减去特定倍数的第1行，目的是将2，3，4行第1列元素消为0，得到$\begin{vmatrix}1&0&2&3\\0&1&-2&-6\\0&0&1&-3\\0&2&-5&-11\end{vmatrix}$；

（2）第2步，将3，4行减去特定倍数的第2行，目的是将3，4行的第2列元素消为0，得到$\begin{vmatrix}1&0&2&3\\0&1&-2&-6\\0&0&1&-3\\0&0&-1&1\end{vmatrix}$；

（3）第3步，用第4行减去特定倍数第3行，目的是将第4行第3列元素消为0，得到$\begin{vmatrix}1&0&2&3\\0&1&-2&-6\\0&0&1&-3\\0&0&0&-2\end{vmatrix}$. 到这里，原行列式就化为了一个上三角形行列式，它的值为-2.

【例 1.12】 求 n 阶行列式$\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}$，其中 $\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.