第 1 章 函数、极限和连续

考研大纲要求与重点导学

1. 本章大纲考试要求

序号	考试内容与要求	适 用 科 目
1	理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系	数学一、数学二、数学三
2	了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性	数学一、数学二、数学三
3	理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念	数学一、数学二、数学三
4	掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念	数学一、数学二、数学三
5	理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系	数学一、数学二
	了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念	数学三
6	掌握极限的性质及四则运算法则	数学一、数学二
	了解极限的性质,掌握极限的四则运算法则	数学三
7	掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法	数学一、数学二
	了解极限存在的两个准则,掌握利用两个重要极限求极限的方法	数学三
8	掌握用洛必达法则求未定式极限的方法	数学一、数学二
	会用洛必达法则求极限	数学三
9	理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限	数学一、数学二
	理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系	数学三
10	理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型	数学一、数学二、数学三
11	了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性最大值、最小值定理和介值定理),并会应用这些性质	数学一、数学二、数学三

2. 本章概要与重点导学

高等数学的核心思想是“用极限的工具研究函数的连续性”，本章正是高等数学的核心思想之所在. 因此，对本章的掌握程度直接影响能否学好高等数学. 函数及其性质是基础，尤其是函数的四个性质一定要弄透；有一句话叫“得极限者得天下”，极限的概念、性质和计算是重中之重，大家要尤为重视；无穷大和无穷小的概念及性质、无穷小的相关问题是考研试卷上的常客；连续的概念、间断的判断、闭区间上连续函数的性质更是要融会贯通. 从出题分布规律可知，本章对于数学一来讲，基本每年(个别年份除外)都会有一道小题或者一道解答题，甚至两者兼有；对于数学二、数学三来讲，出题比例更加突出，希望大家引起重视.

必会基本内容

一、函数

1. 函数的概念

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个非空的实数集. 对每一个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \quad \text{或} \quad y=y(x),$$

则称 x 为自变量，y 为因变量，f 为对应法则，D 称为函数的定义域，实数集 $Z=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的值域.

魔研君点睛

在做函数概念及相关题时，函数的定义域都是首先要考虑的. 而且在求函数的定义域时，不要忘了一些实际工程背景或者现实背景，这些都是影响函数定义域的重要因素.

小试牛刀

【例 1.1】 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

解析 本题为 1988 年真题，是求解函数表达式的典型试题. 做这类题时不要忽略定义域的求解，同时要掌握复合函数的运算技巧.

由题意得 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，又 $f[\varphi(x)]=1-x$，所以 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$. 两边取对数，则$[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$，进而知道 $\varphi(x)=\pm\sqrt{\ln(1-x)}$. 因为 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 又由题意得 $1-x>0$ 且 $\ln(1-x)\geqslant 0$，故定义域为 $x\leqslant 0$.

2. 复合函数与反函数

(1) 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$定义域为 D_g，值域 $R_g\subset D_f$，则函数

$$y=f[g(x)], \quad x\in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$与函数 $y=f(u)$构成的复合函数，其中 D_g 为定义域，u 为中间变量.

（2）反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 对于每一个 $y\in R$，都存在 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立，则由此定义一个函数 $x=g(y)$. 这个函数就称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),$$

其定义域为 R，值域为 D.

3. 分段函数、隐函数及其他函数

（1）分段函数

在自变量的不同变化范围中，不能用同一个表达式表示的函数称为分段函数. 下面给出几种特殊的分段函数.

绝对值函数：$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

取整函数：$y=[x]$.

这类函数中 x 的取值是“不超过 x 的最大整数部分”，如 $\left[\dfrac{6}{7}\right]=0$，$[1.3]=1$，$[-3.7]=-4$.

（2）隐函数

如果方程 $F(x,y)=0$ 能确定 y 是 x 的函数，那么称这种方式表示的函数是隐函数. 有些隐函数可以显化，比如 $x^2+4y^2=1$，可以显化为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}$；而有些隐函数无法显化.

（3）变限积分函数：$F(x)=\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$（其中 b 为常数，此例为变上限积分函数）.

（4）参数方程定义的函数：函数 $y=y(x)$ 若以 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 的形式出现，则称之为参数方程确定的函数.

（5）幂指函数：结构形式为 $u(x)^{v(x)}$ 的函数. 见到此类函数形式，通常作如下变换：$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$.

4. 基本初等函数

以下 6 类是较为常见的基本初等函数.

（1）常数函数：$y=a$（a 为常数）.

（2）幂函数；$y=x^a$（a 为常数）.

（3）指数函数：$y=a^x$（$a>0,a\neq 1$）. 常考 $y=\mathrm{e}^x$（$\mathrm{e}=2.7182\cdots$）.

（4）对数函数：$y=\log_a x$（$a>0,a\neq 1$）. 常考自然对数 $y=\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$.

（5）三角函数：$y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$；$y=\cot x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$.

（6）反三角函数：$y=\arcsin x$；$y=\arccos x$；$y=\arctan x$；$y=\operatorname{arccot}x$.

初等函数：由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的用一个表达式表示的函数称为初等函数.

魔研君点睛

大家要清楚基本初等函数的基本性质和图像，具体对应图像已在本书最后的附录1中给出. 另外，要熟练辨别什么是初等函数，例如 $y=\sin 3x$，$u=\sin(\omega x+\varphi)$（ω,φ 是常数）都是初等函数.

5. 函数的性质

（1）有界性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使 $x\in X$ 时都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的.

魔研君点睛

① 有界函数必须既有上界又有下界.

② 有界或是无界都要首先指明区间，有界性讨论的都是某区间上的有界性，否则无从谈起.

③ 无穷小量一定有界.

④ 无穷大量必是无界量，而无界量未必是无穷大量.

举个例子：函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上，1 是它的一个上界，-1 是它的一个下界，故

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，于是可以说 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，这里的 $M=1$.

再看一个例子：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上没有上界，只有下界，因此函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上不是有界函数. 因为不存在这样的正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 上的一切 x 都成立.

上面这两个例子是说，一个函数在某区间上有界的充分必要条件是它在该区间上既有上界又有下界.

那函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(1,2)$ 上有界吗？答案是肯定的，可取 $M=1$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于一切 $x\in(1,2)$ 都成立. 这说明谈论函数是否有界，一定要在指明区间的情况下谈，同一个函数在不同区间的有界性情况也不一样.

（2）单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（单调减少）.

魔研君点睛

考研对于单调性的考查常常是用求导的方式. 当然，用定义的方式考查也很重要，在不等式的证明等题中就是如此. 注意：对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减（单调不增）.

(3) 奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．若对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；若对任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数．

魔研君点睛

① $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x+\cos x$ 非奇非偶．这几个例子是做题中特别重要的．

② $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上有定义，则 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数．

③ $f(x)$ 是连续的奇函数，则其所有原函数都是偶函数．

$f(x)$ 是连续的偶函数，则其原函数只有一个是奇函数．

④ $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数，则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数．

⑤ 奇函数图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称．

(4) 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，使得对任意 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期．通常所说的周期函数的周期是最小正周期．

魔研君点睛

① $f(x)$ 是可导的、以 T 为周期的周期函数，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期．

② 并非所有的周期函数都有最小正周期，著名的狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^{C}\end{cases}$$

就没有最小正周期．因为任何正有理数 r 都是它的周期，但不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期．

小试牛刀

【例 1.2】 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则(　　)．

(A) 若 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数

(B) 若 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数

(C) 若 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 为周期函数

(D) 若 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数

解析　本题是 1999 年的一道真题，里面的选项可以根据函数性质里备注的“魔研君点睛”来判定，也可以严格结合定义来做．大家不仅要知其然更要知其所以然，要清楚对的选项为何对，更要清楚错的选项错在哪里，而且有没有可以记得住的反例．反例对于复习考研的同学来说非常重要，因为上考场后难免会慌，很多本就不自信的知识点变得更不自信，最终会陷入自我纠结中，所以建议大家记住反例．

根据定义或者奇偶性可得(A)项正确．

(B)项举反例,如 $f(x)=\cos x$,而 $F(x)=\sin x+1$ 不是奇函数.

(C)项举反例,如 $f(x)=\cos x+1$,而 $F(x)=\sin x+x$ 非周期函数.

(D)项举反例,如 $f(x)=x$,而 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 非单调函数.

故选(A).

二、极限

1. 极限的定义

函数的极限

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义,若存在常数 A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正数 δ,使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

用 ε-δ 语言描述函数的极限,有如下 6 种情况.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $|x|>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $x>X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,当 $x<-X$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

任给 $\varepsilon>0$,存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(5) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

任给 $\varepsilon>0$,存在正数 δ,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

任给 $\varepsilon>0$,存在正数 δ,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

数列的极限

当 n 无限增大时,如果数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 无限接近于常数 a,则常数 a 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

用 ε-δ 语言描述数列的极限:任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,就有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

魔研君点睛

本部分核心知识点是要理解极限(函数、数列)的定义,搞清 ε-δ 语言.尤其要记住,ε-δ 语言中的 ε 是考点,要牢记它的两个属性:一个是 ε 要任意小,另一个是 $\varepsilon>0$.

小试牛刀

【例 1.3】 根据函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明　本题是对 ε-δ 语言的考查，用极限定义证明极限时，重要的是找到 δ.

$\forall \varepsilon>0$，有不等式 $\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，化简有 $|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon$. 因此，只要取 $\delta=\varepsilon$，那么当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$. 证毕.

2. 极限存在定理

当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^-$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 无限接近于某常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0^+$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

魔研君点睛

极限存在的充要条件是：左极限＝右极限.

3. 极限的性质

(1) 极限的唯一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限值唯一.

(2) 极限的局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 极限的保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论：如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$（或 $f(0)\leqslant0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

数列极限也符合以上三个性质.

魔研君点睛

一定要注意“局部”的概念，如果大家不理解“局部”二字，那么魔研君给你做个解释. 极限这个概念本身就是局部的性质，函数在 a 点的极限存在，那么一切关于在 a 点极限存在的性质，必然都是在 a 点的邻域范围内谈，具有局部性. 极限有界性的定义中，有一个很明显的局部特征，那就是存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，具有有界性.

小试牛刀

【例 1.4】　当 $x\to\infty$ 时，$y=\arctan x$ 的极限为(　　).

(A) $\frac{\pi}{2}$　　　　(B) $-\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{2}$或$-\frac{\pi}{2}$　　　　(D) 不存在

解析 $x\to\infty$包括两种情形，即$x\to-\infty$和$x\to+\infty$. 而这两种情形对应的函数的极限值是不一样的，即$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，所以根据极限的唯一性(或极限存在定理)可知极限不存在. 故选(D).

4. 无穷小和无穷大

(1) 无穷小

如果函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的极限为零，那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小.

(2) 无穷大

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义). 如果对于任意给定的正数M(无论它多么大)，总存在正数δ(或正数X)，只要x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)，则对应的函数值$f(x)$总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数$f(x)$是当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大.

魔研君点睛

① 在x的同一个变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

② $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\alpha(x)=0$.

③ 无穷小与x的变化过程有关. 如$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}$为无穷小，而当$x\to7$时，$\frac{1}{x}$不是无穷小.

5. 无穷小运算定理

定理 1 有限个无穷小量的和是无穷小(常用两个无穷小的和是无穷小).

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

定理 3 常数与无穷小的乘积是无穷小.

定理 4 有限个无穷小的乘积是无穷小.

6. 无穷小比阶

设在同一自变量的变化过程中，$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，且$\beta(x)\neq0$，则

(1) $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\Leftrightarrow\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小；

(2) $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty\Leftrightarrow\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小；

(3) $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=u\neq0\Leftrightarrow\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小；

(4) $\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \Leftrightarrow \alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小；

(5) $\lim \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0 \Leftrightarrow \alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

魔研君点睛

常见的等价无穷小要熟记：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x$，$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$.

小试牛刀

【例 1.5】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{5}}-1}{\cos x-1}$.

解析 本题考查的是等价无穷小替换，要充分利用常用的几个等价无穷小.

当 $x\to 0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{5}}-1\sim \dfrac{1}{5}x^2$，$\cos x-1\sim -\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{5}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{5}.$$

三、极限的计算

1. 极限的四则运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=kA\pm lB$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

魔研君点睛

四则运算对于常规极限计算是可行的，但是面对未定式的时候就要注意了. 什么是未定式呢？如果当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或者都趋于无穷大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在，也可能不存在，通常把这种极限叫做**未定式**，并分别简记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 事实上，我们常常面对 7 种未定式，分别是 $\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，$0\cdot\infty$ 型，$\infty-\infty$ 型，1^∞ 型，0^0 型，∞^0 型. 遇到未定式时一般选择洛必达法则或者泰勒公式，当然还有很多辅助工具，比如等价无穷小替换、两个重要极限等.

2. 洛必达法则

(1) $\dfrac{0}{0}$ 型

设 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=0$. 在 x 的变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在且 $g'(x)\neq 0$，$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）.

（2）$\dfrac{\infty}{\infty}$型

设 $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$. 在 x 变化过程中，$f'(x)$，$g'(x)$ 皆存在且 $g'(x)\neq 0$，$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$）.

魔研君点睛

① $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在且不是∞，并不能得出 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在且不是∞. 换言之就是"'右'存在，则'左'存在；但'右'不存在，'左'却仍可能存在".

② 数列极限不能直接用洛必达法则，要先转成函数极限再使用.

3. 泰勒公式

泰勒公式在极限计算中应用得非常广，大家要熟悉掌握（当 $x\to 0$ 时）：

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\quad \arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),\quad \arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)\text{（}\alpha\text{ 为实常数）}.$$

魔研君点睛

上式是简化形式的泰勒公式，在实际应用中，式子中的 x 仅仅代表一个变量，可替换，但要保证前后一致. 另外，上式仅展开到前两项或三项，同学们要牢记标准的泰勒公式.

4. 两个重要准则和两个重要极限

夹逼准则：设 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant \varphi(x)$，若 $\lim g(x)=a$，$\lim\varphi(x)=a$，则 $\lim f(x)=a$（这个结论同样适用于数列）.

单调有界准则：单调有界数列必有极限.

两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.