

第 5 章

随机不确定系统的建模与滤波

5.1 引言

由于通信技术的飞速发展,以及日益增加的大规模信息,复杂网络化系统已成功应用在各种重要的应用领域^[2,216]。为了适应复杂大规模系统不断增长的信息计算和感知需求,有必要设计合理的通信方案,以提高物理器件和计算单元之间的通信链路的处理能力,进而提高系统的灵活性,并降低安装和维护成本^[1,2,175]。由于受到通信带宽等因素的制约,网络化系统不可避免地存在网络诱导的现象,如传输延迟、数据丢失、数据包错序、测量值缺失或衰退以及时变的采样或传输时间间隔等,这些现象通常会降低复杂网络化系统的性能^[169]。因此,研究网络引起的现象对于复杂网络化系统具有重要的意义。

第 4 章为了解决最优状态估计问题,含有传输时延和交叉相关噪声的分布式随机不确定系统被引入传感器网络。本章面向不确定的时变系统,考虑其噪声的交叉相关性以及系统的测量值通过网络传输的过程中,在接收端收到的带有随机传输延迟和数据包错序现象的数据,针对网络诱导的现象采用 ZOH 和逻辑 ZOH 信号选择方案统一建立系统模型,旨在设计一种基于线性补偿估计方法的鲁棒有限时域滤波器。

注意: 本章中的符号含义表示如下。符号 $E(\cdot)$ 代表数据期望操作,上标符号 T 表示转置。 $\mathbb{R}^r$ 代表 r 维欧几里得空间,并且 $\mathbb{R}^{r \times r}$ 代表所有 $r \times r$ 维实数集矩阵。对于实对称矩阵 $M > 0$,表示 M 是正定矩阵, M^{-1} 代表正定矩阵 M 的逆,同时 $Tr(M)$ 是矩阵 M 的迹。 δ_{k-l} 是克罗内克(Kronecker)函数。

5.2 问题阐述

5.2.1 系统描述

为了描述系统的随机不确定性,系统模型通过不确定性参数即乘性噪声^[130,141,161,213]建立。假设一个动态对象的轨迹可以被感知并测量得到,由以下不确定线性离散时间系统通过传感器的测量模型方程描述,其描述形式在文献[168, 213, 217]中有相似的研究。

$$x(k+1) = (\mathbf{A}_k + \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k \mathbf{E}_k) x(k) + \mathbf{B}_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5-1)$$

$$z(k) = (\mathbf{C}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{F}_k \mathbf{E}_k) x(k) + v_k \quad (5-2)$$

式(5-2)中, $x(k) \in \mathbb{R}^r$ 表示被估计的状态过程, $z(k) \in \mathbb{R}^m$ 是 k 时刻的测量输出。标量 F_k 代表时变的参数不确定性,用于描述乘性噪声。参量 $\mathbf{F}_k$ 、 $\mathbf{H}_k$ 和 $\mathbf{E}_k$ 是已知的时变矩阵。 $w_k \in \mathbb{R}$ 和 $v_k \in \mathbb{R}^m$ 代表过程噪声和测量噪声,它们是均值为零的白噪声,且方差分别为 $\mathbf{Q}_k$ 和 $\mathbf{R}_k$ 。系数 $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 、 $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^r$ 、 $\mathbf{C}_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$ 由实数组成,是已知的时变矩阵。初始状态 $x(0)$ 的均值为 μ_0 , 方差为 $\mathbf{P}_0$, 并且假设它和其他噪声信号是不相关的。注意,参数 F_k 满足条件 $F_k F_k^T \leq I$, 即其方差矩阵不大于单位阵。

5.2.2 基于序列重排的建模

在网络传输过程中考虑到有限的带宽,数据传输不可避免地产生网络拥塞。设计带有网络诱导现象的滤波过程由图 5-1 所示,该图分析了处理传输延迟和数据包错序的情况。

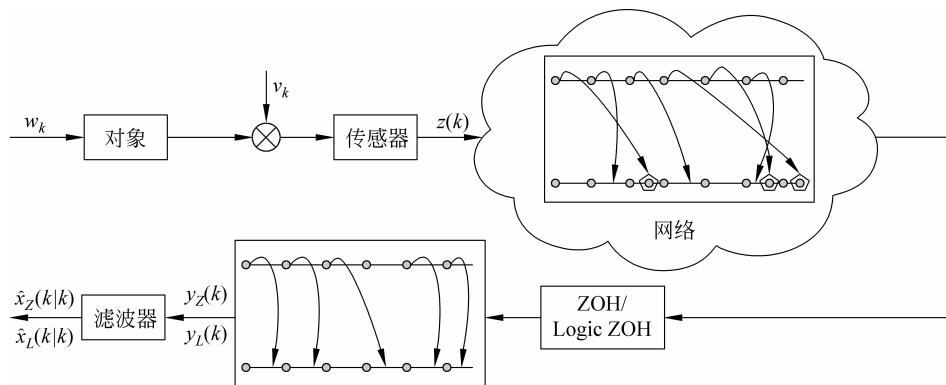


图 5-1 受传输延迟和数据包错序影响的滤波原理

在图 5-1 中, ZOH 和逻辑 ZOH 方案用于主动丢弃错序的数据包。注意, 信号采样是属于时间驱动的, 而 ZOH 和逻辑 ZOH 信号选择策略是事件驱动的。

注释 5.1: 在网络中传输前的数据包带有时间戳。ZOH 方案存储最近的数据包, 其他的带有时间戳的数据包将被丢弃。当数据包在当前时刻没有收到数据包时, 为了构建可靠的通信链路, 前一时刻的数据包将会作为补偿, 成为当前时刻接收的数据包。信号选择机制 ZOH 在文献[153, 174]中有相关研究。对于逻辑 ZOH 方案, 其设计动机是选择最新的数据包数据, 这意味着逻辑 ZOH 接收到一个新的输出值信号时, 存储的数据包将会更新。因为传输之前的最新数据包更接近于最新的被估计的实际信号, 所以针对网络诱导的数据包错序现象通过逻辑 ZOH 方案能够被主动丢弃。有关逻辑 ZOH 方案的信号选择机制的描述在文献[173-175]中有研究。

不失一般性, 系统的测量值被连续的等周期采样, 采样周期为 T , 采样时间间隔为 $t, t \in \{kT, k \in \mathbb{N}\}$ 。设置最大的延迟不超过 N 步, 且每步的延迟不超过当前时刻, 即满足 $N(k) \leq k$ 。为了进一步描述网络引起的不确定性, 包括随机传输延迟和数据包错序现象, 图 5-2 描述了一个典型的应用场景。

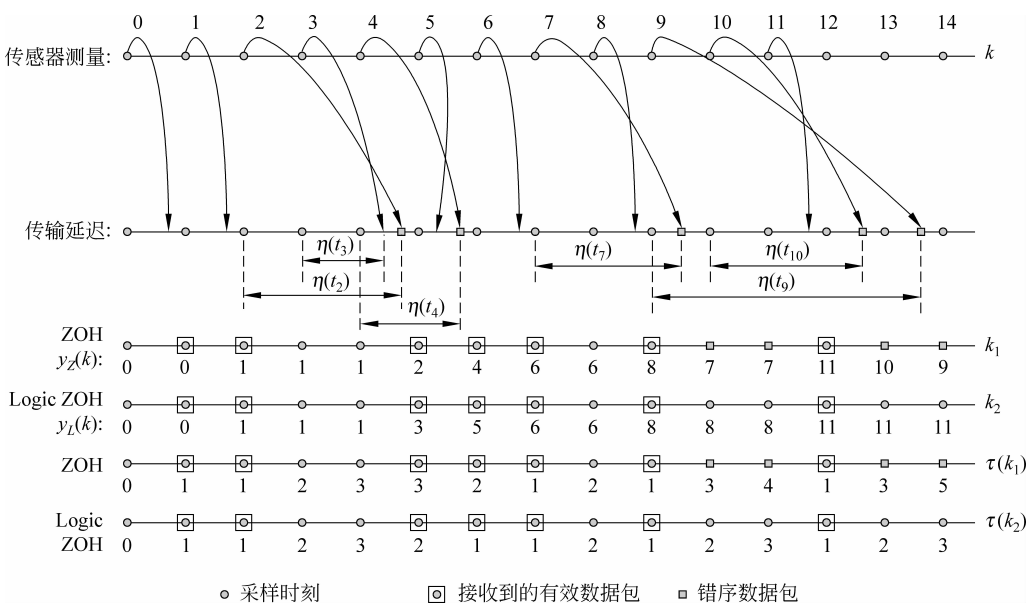


图 5-2 错序数据传输中包序列的排序过程

设置时延的上界为 $N = 5$, 其中在 k 时刻, $\eta(t_k)$ 表示网络引起的传输时延。图 5-2 分别演示了采用 ZOH 和逻辑 ZOH 方案能够接收到的有效的数据包。采样数

据包包含以下三种情况。

情况 1: 当 $t \in [2T, 5T)$ 时, 由于传输延迟分别表示为 $\eta(t_2) = 2T + \eta'(t_2)$, $\eta(t_3) = 1T + \eta'(t_3)$ 和 $\eta'(t_2) > \eta'(t_3)$, 其中 $\eta'(t_k)$ 是在一个采样周期的传输时延, 信号 $z(2)$ 和 $z(3)$ 产生了数据包错序现象。应用 ZOH 在采样时刻接收端没有接收时间戳是 $3T$ 时刻的数据包; 但是采用逻辑 ZOH 方案, 信号 $z(2)$ 被丢弃。

情况 2: 在采样时刻 $9T$ 和 $10T$ 时, 使用 ZOH 方案, 数据包错序仍然存在, 且接收到的有效数据分别是 $z(8)$ 和 $z(7)$ 。与此相反, 使用逻辑 ZOH 策略, 在第 10 个采样时刻, $z(7)$ 被丢弃, 因为只有最新的带有时间戳的数据 $z(8)$ 被存储。

情况 3: 当采样时间取 $t \in [12T, 14T)$ 时, 使用 ZOH 方案, 接收到的有效数据分别是 $z(11)$ 、 $z(10)$ 和 $z(9)$, 这些数据是传输的最近的数据包, 但是数据包错序现象依然存在。然而, 使用逻辑 ZOH, 数据 $z(10)$ 和 $z(9)$ 会被丢弃, 只存储最新的数据包 $z(11)$ 。

针对采样时间 t , 假设当前时刻为 k , 采用 ZOH 和逻辑 ZOH 方案, 可以接收的传输之前的带有时间戳的数据分别是 k_1 和 k_2 时刻的信号。根据信号选择方案, 在从传感器到处理器的传输过程中, 采用 ZOH 和逻辑 ZOH 接收到的数据, 其时延分别记为 $\eta(k_1)$ 和 $\eta(k_2)$, 且满足 $0 \leq \eta(k_2) \leq \eta(k_1) \leq N$ 。为了明确阐述时间序列, $\tau(k_1) \in \mathbb{N}$ 和 $\tau(k_2) \in \mathbb{N}$ 分别用来表示两种信号处理方案在采样时刻的传输延迟, 它们满足如下关系。

$$k = \tau(k_1) + k_1 = \tau(k_2) + k_2 \quad (5-3)$$

由于接收的最新数据包更接近真实的当前数据, 因此, 引入 $\beta(k) \geq 0$ 用于表示接收到的数据包在传输以前的采样时间序列的关系, 即 k_1 和 k_2 可以表示为

$$k_2 = k_1 + \beta(k) \quad (5-4)$$

相似的, 由式(5-3)和式(5-4)可以演化得到两种方案的传输时延之间的关系为

$$\tau(k_2) = \tau(k_1) - \beta(k) \quad (5-5)$$

进而, 当前的采样 k 以及接收到的数据包的时间戳 k_1 和 k_2 满足

$$\begin{cases} k_1 = k - \tau(k) \\ k_2 = k - \tau'(k) \end{cases} \quad (5-6)$$

其中, $\tau(k) = \tau(k_1)$ 且 $\tau'(k) = \tau(k) - \beta(k)$ 。

注释 5.2: 接收到的有效数据按照信号选择机制进行重新组织。应用 ZOH 方

案,当接收到的带有时间戳的数据包数据为 $z(k_1)$ 时,存储的信号 $y_Z(k)$ 被重组为以下形式。

$$y_Z(k) = z(k - \tau(k)) \quad (5-7)$$

同样的,采用逻辑 ZOH 方案,当接收到的到达数据包数据为 $z(k_2)$ 时,存储的信号 $y_{LZ}(k)$ 可以通过以下形式建模。

$$y_{LZ}(k) = z(k - \tau'(k)) \quad (5-8)$$

式(5-8)中,设 $\tau'(k) = \tau(k) - \beta(k)$ 。带有时间戳的数据包意味着在通信网络中,数据在从传感器设备到滤波器的传输中,滤波器能够获得数据延迟和数据包丢失的信息^[141]。

5.2.3 噪声的相关性

在实际应用中,由于网络化系统受到通信约束的影响,被测量的动态对象会受到相关噪声的影响^[161,168,213],图 5-1 体现了噪声之间的相关性。假定过程噪声 w_k 和测量噪声 v_k 在相同的采样时刻存在相关性,其统计属性满足如下关系:

$$\begin{aligned} E(w_k) &= 0, \quad E(v_k) = 0, \\ E \left[\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_l^T & (v_l)^T \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} Q_k \delta_{k,l} & S_k \delta_{k,l} \\ (S_k)^T \delta_{k,l} & R_k \delta_{k,l} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5-9)$$

其中,协方差 $Q_k = Q_k^T, R_k = R_k^T$ 且 $S_k = S_k^T$,它们是对称矩阵。

接收到的存储的测量序列 $\{y_Z(0), \dots, y_Z(k-1), y_Z(k)\}$ 和 $\{y_{LZ}(0), \dots, y_{LZ}(k-1), y_{LZ}(k)\}$ 是带有随机传输延迟和数据包错序现象的。使用 ZOH 和逻辑 ZOH 方案,设计的滤波方法将转化为采用最小误差协方差估计探测状态 $x(k)$ 的估计值 $\hat{x}_Z(k|k)$ 和 $\hat{x}_{LZ}(k|k)$, 分别通过 $\hat{x}_Z(k - \tau(k)|k - \tau(k))$ 和 $\hat{x}_{LZ}(k - \tau'(k)|k - \tau'(k))$ 进行补偿。

5.3 鲁棒有限时域滤波

本节针对随机不确定系统模型(5-1)和(5-2),考虑传输延迟、数据包错序与相关性噪声对系统的影响,研究一种鲁棒滤波方法。因此,接收到的有效数据包模型如式(5-7)至式(5-8)所描述,其采用 ZOH 和逻辑 ZOH 两种信号选择方案处理错序现象,

处理步骤总结如下。

首先,带有时间戳的数据包在从传感器到滤波器通过通信网络传输时,滤波器能够利用每一时刻数据包的传输延迟和错序的相关信息进行处理。接下来,使用最小化估计误差协方差方法,求解获得状态估计的上限。对于在当前时刻接收到的有效的数据包,提出了一种线性估计方法,用于补偿随机传输延迟。最后,介绍一种基于有限时域卡尔曼型滤波的递归方法,用于补偿丢失的数据包。

在现有文献中,带有传输延迟的状态估计或滤波问题的研究主要集中在一步预测补偿策略,它的优点是具有更准确的估计值,但增加了计算复杂度。由于提出的线性估计方法是一种近似的状态估计,因此其估计精度低于一步预测补偿方法。值得注意的是,所提出的方法具有降低计算负担并且提高估计效率的显著优势。

5.3.1 基于 ZOH 的滤波

采用 ZOH 信号选择方案,在采样时刻 k , 存储的信号 $y_Z(k)$ 表示的是最近到达的数据包,即 $z(k - \tau(k))$ 。设置变量 $t = k - \tau(k)$, 由式(5-2)和式(5-7)可以得到存储的信号重组为

$$y_Z(k) = z(t) = (C_t + H_t F_t E_t)x(t) + v_t \quad (5-10)$$

假定该滤波器具有足够的处理能力,能够根据所存储的测量数据 $\{y_Z(0), \dots, y_Z(k-1), y_Z(k)\}$ 计算得到最优的状态估计 $\hat{x}_Z(t | t)$ 。

鲁棒有限时域卡尔曼型滤波的目的是应用最小的估计误差协方差进而获得有保证的上界。引理 5.1 为进一步探讨其范围的上限提供前提。

引理 5.1: 假定矩阵 A 、 H 、 E 和 F 具有已知的维度,且满足 $FF^T \leq I$ 。不等式 $\alpha^{-1}I - EXE^T > 0$ 满足以下条件,设 X 是一个对称正定矩阵,设 $\alpha > 0$ 是一个任意的正常数。参照文献[137, 141, 218],有下列不等式成立。

$$(A + HFE)X(A + HFE)^T \leq A(X^{-1} - \alpha E^T E)^{-1}A^T + \alpha^{-1}HH^T \quad (5-11)$$

且等式 $(X^{-1} - \alpha E^T E)^{-1} = X + XE^T(\alpha^{-1}I - EXE^T)^{-1}EX$ 由矩阵逆引理得到。

引理 5.2: 对于变量取值 $0 \leq t \leq k$, 假设矩阵 X 和 Y 是对称正定矩阵,同时有关 X 和 Y 的函数 $s_t(X)$ 和 $h_t(X)$ 满足条件 $s_t(X) = s_t^T(X) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $h_t(X) = h_t^T(X) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。如果存在 $Y > X$, 进而满足 $s_t(Y) \geq s_t(X)$ 和 $h_t(Y) \geq h_t(X)$, 此时, M_t 和 N_t 的求解由下面的递推方程得到。

$$M_{t+1} = s_t(M_t), \quad N_{t+1} = h_t(N_t), \quad M_0 = N_0 > 0 \quad (5-12)$$

式(5-12)满足 $M_t \leq N_t$ 。相似的不等式推导过程可以从文献[137, 141, 218]中直接得到。

因此,借助带有时间戳的重组数据包以及射影定理,设计的状态估计器由下面的递归方法得到。

$$\begin{aligned} \hat{x}_Z(t | t) &= \text{proj}\{x(t) | y_Z(k), y_Z(k-1), \dots, y_Z(0)\} \\ &= \hat{x}_Z(t | t-1) + K_{Z,t}(z(t) - \hat{C}_{Z,t}\hat{x}_Z(t | t-1)) \end{aligned} \quad (5-13)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_Z(t+1 | t) &= \text{proj}\{x(t+1) | y_Z(k), y_Z(k-1), \dots, y_Z(0)\} \\ &= \hat{A}_{Z,t}\hat{x}_Z(t | t-1) + L_{Z,t}(z(t) - \hat{C}_{Z,t}\hat{x}_Z(t | t-1)) \end{aligned} \quad (5-14)$$

其中, t 表示传输之前的时间戳, $\hat{x}_Z(t | t)$ 代表滤波值, $\hat{x}_Z(t+1 | t)$ 是由状态 $x(t)$ 估计得到的预测值。

1. 增广状态向量

根据式(5-13)和式(5-14)描述的状态估计方法,为了求解滤波参数 $K_{Z,t}$ 、 $L_{Z,t}$ 、 $\hat{A}_{Z,t}$ 以及 $\hat{C}_{Z,t}$,需要采用最小化协方差估计方法。依据有限时域卡尔曼滤波理论,定义预测误差 $\tilde{e}_Z(t) = x(t) - \hat{x}_Z(t | t-1)$ 以及滤波误差 $e_Z(t) = x(t) - \hat{x}_Z(t | t)$,将和对应的估计值 $\hat{x}_Z(t | t-1)$ 和 $\hat{x}_Z(t | t)$ 联合,得到下面的增广向量。

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_Z(t) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_Z(t) \\ \hat{x}_Z(t | t-1) \end{bmatrix}, \\ \Psi_Z(t) = \begin{bmatrix} e_Z(t) \\ \hat{x}_Z(t | t) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Psi}_Z(t+1) = \begin{bmatrix} \tilde{e}_Z(t+1) \\ \hat{x}_Z(t+1 | t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5-15)$$

此外,已知的增广向量 $\tilde{\Psi}_Z(t)$ 用于求解其派生的增广向量 $\Psi_Z(t)$ 和 $\tilde{\Psi}_Z(t+1)$ 。结合式(5-1)和式(5-10),以及(5-13)至式(5-15),考虑到传输时滞 $\tau(k) \leq N$,且满足 $t = k - \tau(k)$,得到增广的状态向量的具体表达形式为

$$\Psi_Z(t) = (A_{Z,t1} + H_{Z,t1}F_tE_{Z,t1})\tilde{\Psi}_Z(t) + D_{Z,t1}v_t \quad (5-16)$$

$$\tilde{\Psi}_Z(t+1) = (A_{Z,t2} + H_{Z,t2}F_tE_{Z,t2})\tilde{\Psi}_Z(t) + B_{Z,t2}w_t + D_{Z,t2}v_t \quad (5-17)$$

式中的参数定义分别为

$$\begin{cases}
\mathbf{A}_{Z,t1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{K}_{Z,t}\mathbf{C}_t & \mathbf{K}_{Z,t}(\hat{\mathbf{C}}_{Z,t} - \mathbf{C}_t) \\ \mathbf{K}_{Z,t}\mathbf{C}_t & \mathbf{I} + \mathbf{K}_{Z,t}(\mathbf{C}_t - \hat{\mathbf{C}}_{Z,t}) \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_{Z,t1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{Z,t}\mathbf{H}_t \\ \mathbf{K}_{Z,t}\mathbf{H}_t \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{Z,t1} = [\mathbf{E}_t \quad \mathbf{E}_t], \mathbf{D}_{Z,t1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{Z,t} \\ \mathbf{K}_{Z,t} \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_{Z,t2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t - \mathbf{L}_{Z,t}\mathbf{C}_t & \mathbf{A}_t - \hat{\mathbf{A}}_{Z,t} + \mathbf{L}_{Z,t}(\hat{\mathbf{C}}_{Z,t} - \mathbf{C}_t) \\ \mathbf{L}_{Z,t}\mathbf{C}_t & \hat{\mathbf{A}}_{Z,t} + \mathbf{L}_{Z,t}(\mathbf{C}_t - \hat{\mathbf{C}}_{Z,t}) \end{bmatrix} \\
\mathbf{H}_{Z,t2} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t - \mathbf{L}_{Z,t}\mathbf{H}_t \\ \mathbf{L}_{Z,t}\mathbf{H}_t \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{Z,t2} = [\mathbf{E}_t \quad \mathbf{E}_t] \\
\mathbf{B}_{Z,t2} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_t \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{Z,t2} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_{Z,t} \\ \mathbf{L}_{Z,t} \end{bmatrix}
\end{cases} \quad (5-18)$$

依据式(5-16)和式(5-17),其协方差矩阵的定义基于增广的估计向量 $\tilde{\Psi}_Z(t)$ 和 $\Psi_Z(t)$ 。因此,设置 $\tilde{\Sigma}_Z(t) = E(\tilde{\Psi}_Z(t)\tilde{\Psi}_Z^T(t))$ 和 $\tilde{\Theta}_Z(t) = E(\Psi_Z(t)\Psi_Z^T(t))$, 滤波协方差矩阵由投影公式和噪声的相关性计算得到:

$$\tilde{\Sigma}_Z(t) = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_Z(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{P}(t) - \bar{\Sigma}_Z(t) \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

其中,定义 $\bar{\Sigma}_Z(t) = E(\tilde{e}_Z(t)\tilde{e}_Z^T(t))$, 且 $\mathbf{P}(t) = E(x(t)x^T(t))$ 。

因此,给定计算公式(5-16)至式(5-19),求解误差协方差矩阵由类似黎卡提方程(Riccati-like equations)演化得到,即

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_Z(t) &= (\mathbf{A}_{Z,t1} + \mathbf{H}_{Z,t1}\mathbf{F}_t\mathbf{E}_{Z,t1})\tilde{\Sigma}_Z(t)(\mathbf{A}_{Z,t1} + \mathbf{H}_{Z,t1}\mathbf{F}_t\mathbf{E}_{Z,t1})^T + \\
&\quad \mathbf{D}_{Z,t1}\mathbf{R}_t\mathbf{D}_{Z,t1}^T
\end{aligned} \quad (5-20)$$

和

$$\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_Z(t+1) &= (\mathbf{A}_{Z,t2} + \mathbf{H}_{Z,t2}\mathbf{F}_t\mathbf{E}_{Z,t2})\tilde{\Sigma}_Z(t)(\mathbf{A}_{Z,t2} + \mathbf{H}_{Z,t2}\mathbf{F}_t\mathbf{E}_{Z,t2})^T + \\
&\quad \mathbf{B}_{Z,t2}\mathbf{Q}_t\mathbf{B}_{Z,t2}^T + \mathbf{D}_{Z,t2}\mathbf{R}_t\mathbf{D}_{Z,t2}^T + \mathbf{B}_{Z,t2}\mathbf{S}_t\mathbf{D}_{Z,t2}^T + \mathbf{D}_{Z,t2}\mathbf{S}_t^T\mathbf{B}_{Z,t2}^T
\end{aligned} \quad (5-21)$$

2. 估计协方差的上界

如前面所述,选择合适的滤波协方差以及预测协方差矩阵上界可以求解滤波器的相关参数。

定理 5.1: 对于 $(\mathbf{A} + \mathbf{HFE})\mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{HFE})^T$ 的表示形式,根据引理 5.1 和引理 5.2,如果存在一个正的标量 α 和对称正定矩阵 $\mathbf{X}$, 即从式(5-20)和式(5-21)可得, α_t

是一个正的标量,且 $\Sigma_Z(t)$ 是对称正定矩阵,且满足 $\alpha_t^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{E}_{Z,t2}\Sigma_Z(t)\mathbf{E}_{Z,t2}^T > 0$,因而可以由 $\tilde{\Sigma}_Z(t)$ 推导出最小的上界 $\tilde{\Sigma}_Z(t) \leq \Sigma_Z(t)$ 和 $\tilde{\Theta}_Z(t) \leq \Theta_Z(t)$ 。因此,误差协方差的上界 $\Theta_Z(t)$ 和 $\Sigma_Z(t+1)$ 可以通过下面的等式迭代求解。

$$\begin{aligned}\Theta_Z(t) = & \mathbf{A}_{Z,t1}\Sigma_Z(t)\mathbf{A}_{Z,t1}^T + \alpha_t^{-1}\mathbf{H}_{Z,t1}\mathbf{H}_{Z,t1}^T + \mathbf{D}_{Z,t1}\mathbf{R}_t\mathbf{D}_{Z,t1}^T + \\ & \mathbf{A}_{Z,t1}\Sigma_Z(t)\mathbf{E}_{Z,t1}^T (\alpha_t^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{E}_{Z,t1}\Sigma_Z(t)\mathbf{E}_{Z,t1}^T)^{-1}\mathbf{E}_{Z,t1}\Sigma_Z(t)\mathbf{A}_{Z,t1}^T\end{aligned}\quad (5-22)$$

和

$$\begin{aligned}\Sigma_Z(t+1) = & \mathbf{A}_{Z,t2}\Sigma_Z(t)\mathbf{A}_{Z,t2}^T + \alpha_t^{-1}\mathbf{H}_{Z,t2}\mathbf{H}_{Z,t2}^T + \\ & \mathbf{A}_{Z,t2}\Sigma_Z(t)\mathbf{E}_{Z,t2}^T (\alpha_t^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{E}_{Z,t2}\Sigma_Z(t)\mathbf{E}_{Z,t2}^T)^{-1}\mathbf{E}_{Z,t2}\Sigma_Z(t)\mathbf{A}_{Z,t2}^T + \\ & \mathbf{B}_{Z,t2}\mathbf{Q}_t\mathbf{B}_{Z,t2}^T + \mathbf{D}_{Z,t2}\mathbf{R}_t\mathbf{D}_{Z,t2}^T + \mathbf{B}_{Z,t2}\mathbf{S}_t\mathbf{D}_{Z,t2}^T + \mathbf{D}_{Z,t2}\mathbf{S}_t^T\mathbf{B}_{Z,t2}^T\end{aligned}\quad (5-23)$$

证明: 定理 5.1 的证明在文献[137, 141, 218]中有相似的推导过程。

为了求解滤波参数,需要计算滤波和预测误差协方差的最小值。基于定理 5.1 以及卡尔曼型滤波方法,误差协方差矩阵的上界定义为

$$E(e_Z(t)e_Z^T(t)) = [\mathbf{I} \ 0]\tilde{\Theta}_Z(t)\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \leq [\mathbf{I} \ 0]\Theta_Z(t)\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\Theta}_Z(t) \quad (5-24)$$

和

$$\begin{aligned}E(\tilde{e}_Z(t+1)\tilde{e}_Z^T(t+1)) = & [\mathbf{I} \ 0]\tilde{\Sigma}_Z(t+1)\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \leq & [\mathbf{I} \ 0]\Sigma_Z(t+1)\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{\Sigma}_Z(t+1)\end{aligned}\quad (5-25)$$

式中的 $\Theta_Z(t)$ 和 $\Sigma_Z(t+1)$ 由式(5-22)和式(5-23)分别求解得到。

此外,定理 5.2 是用于求解 $\bar{\Theta}_Z(t)$ 和 $\bar{\Sigma}_Z(t+1)$ 的解决方案。

定理 5.2: 设 $t = k - \tau(k)$, 且 t 时刻表示接收到的传输之前的时间戳。令 $\alpha_t > 0$ 是一个正的标量序列。如果由以下的类似 Riccati 方程递归计算得到协方差矩阵

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}_Z(t) = & \bar{\Sigma}_Z(t) + \bar{\Sigma}_Z(t)\mathbf{E}_t^T\tilde{\mathbf{M}}_{Z,t}^{-1}\mathbf{E}_t\bar{\Sigma}_Z(t) - \\ & \mathbf{A}_Z(t)\bar{\Xi}_Z^{-1}(t)\mathbf{A}_Z^T(t)\end{aligned}\quad (5-26)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Sigma}_Z(t+1) = & \mathbf{A}_t\bar{\Sigma}_Z(t)(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t^T\mathbf{M}_{Z,t}^{-1}\mathbf{E}_t\bar{\Sigma}_Z(t))\mathbf{A}_t^T - \\ & \mathbf{A}_Z(t)\bar{\Xi}_Z^{-1}(t)\mathbf{A}_Z^T(t) + \mathbf{B}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{B}_t^T + \alpha_t^{-1}\mathbf{F}_t\mathbf{F}_t^T\end{aligned}\quad (5-27)$$

$$\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{A}_t(\mathbf{P}^{-1}(t) - \alpha_t\mathbf{E}_t^T\mathbf{E}_t)^{-1}\mathbf{A}_t^T + \alpha_t^{-1}\mathbf{F}_t\mathbf{F}_t^T + \mathbf{B}_t\mathbf{Q}_t\mathbf{B}_t^T \quad (5-28)$$

式中定义 $\mathbf{A}_Z(t) = (\mathbf{I} + \bar{\Sigma}_Z(t)\mathbf{E}_t^T\mathbf{M}_{Z,t}^{-1}\mathbf{E}_t)\bar{\Sigma}_Z(t)\mathbf{C}_t^T$ 和 $\mathbf{A}_Z(t) = \mathbf{A}_t\bar{\Sigma}_Z(t)(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t^T\mathbf{M}_{Z,t}^{-1}\mathbf{E}_t\bar{\Sigma}_Z(t))\mathbf{C}_t^T + \alpha_t^{-1}\mathbf{F}_t\mathbf{H}_t^T + \mathbf{B}_t\mathbf{S}_t$, 满足不等式 $\mathbf{P}^{-1}(t) - \alpha_t\mathbf{E}_t^T\mathbf{E}_t > 0$ 和 $\mathbf{M}_{Z,t} = \alpha_t^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{E}_t\bar{\Sigma}_Z(t)\mathbf{E}_t^T > 0$, 则

$\bar{\boldsymbol{\Theta}}_Z(t)$ 、 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t+1)$ 和 $\boldsymbol{P}(t+1)$ 的解是正定矩阵。因而由式(5-13)和式(5-14)可以得到卡尔曼类型的滤波参数为

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{Z,t} = \boldsymbol{C}_t (\boldsymbol{I} + \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t) \boldsymbol{E}_t^T \boldsymbol{M}_{Z,t}^{-1} \boldsymbol{E}_t) \quad (5-29)$$

$$\boldsymbol{K}_{Z,t} = \boldsymbol{A}_Z(t) \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z^{-1}(t) \quad (5-30)$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}_{Z,t} = \boldsymbol{A}_t (\boldsymbol{I} + \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t) \boldsymbol{E}_t^T \boldsymbol{M}_{Z,t}^{-1} \boldsymbol{E}_t) \quad (5-31)$$

$$\boldsymbol{L}_{Z,t} = \boldsymbol{A}_Z(t) \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z^{-1}(t) \quad (5-32)$$

式中其他标记的定义为

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t) = \boldsymbol{C}_t \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t) (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_t^T \boldsymbol{M}_{Z,t}^{-1} \boldsymbol{E}_t \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t)) \boldsymbol{C}_t^T + \alpha_t^{-1} \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{H}_t^T + \boldsymbol{R}_t$$

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_{Z,t} = \alpha_t^{-1} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_t \boldsymbol{P}(t) \boldsymbol{E}_t^T$$

证明：该定理依据最小的估计误差协方差矩阵的上界得到，其证明过程在附录 C 中有详细推导。

基于定理 5.2，鲁棒有限时域卡尔曼型滤波方法求解 $\hat{x}_Z(t|t)$ 的计算过程如算法 5-1 所描述。

算法 5-1 基于 ZOH 的鲁棒有限时域卡尔曼型滤波器的设计过程

输入：给定的输出序列 $\{y_Z(k), y_Z(k-1), \dots, y_Z(0)\}$ ，应用 ZOH 方案实现测量信号的重组。由于接收到的有效数据在传输之前是带时间戳的，因此，输出数据在传输之前，其测量值是由 t 时刻发出的，其值为 $t = k - \tau(k)$ 。

步骤 1：给定状态 $x(t)$ ，估计状态 $\hat{x}_Z(t|t-1)$ ，预测误差协方差上界 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t)$ 和正的标量值 α_t 。

步骤 2：在式(5-26)中，由 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t)$ 计算得到滤波误差协方差的上界 $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_Z(t)$ 。

步骤 3：通过式(5-29)至式(5-32)分别求解，确定滤波参数 $\hat{\boldsymbol{C}}_{Z,t}$ 、 $\boldsymbol{K}_{Z,t}$ 、 $\hat{\boldsymbol{A}}_{Z,t}$ 以及 $\boldsymbol{L}_{Z,t}$ ，它们由矩阵 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t)$ 推导得到。

步骤 4：根据式(5-13)和式(5-14)，可以分别得到滤波状态 $\hat{x}_Z(t|t)$ 和预测状态 $\hat{x}_Z(t+1|t)$ 。

步骤 5：根据式(5-27)和式(5-28)，分别替换 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t)$ 和 $\boldsymbol{P}(t)$ ，通过迭代形式计算滤波误差协方差 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_Z(t+1)$ 和 $\boldsymbol{P}(t+1)$ 。

输出：状态估计值 $\hat{x}_Z(t|t)$ 。

3. 延时补偿策略

在采样时刻 k ，由于网络诱导的传输延迟 $\tau(k)$ ，测量得到的输出值 $z(t)$ 被存储。接收到的测量输出 $y(k)$ 用于 $t + \tau(k)$ 时刻的状态估计 $\hat{x}(k|t)$ 。由于传输延迟降低了系统的性能，本章提出基于估计的线性时滞补偿方法，降低了计算复杂度，并进一步减少传输延迟对系统的负面影响。假设当前采样时刻是 k ，接收到的数据包是 $z(t)$ ，