第5章 布尔代数

计算机和其他电子设备中的电路都有输入和输出，输入的是 0 和 1，输出的也是 0 和 1。电路可以用任何具有两种不同状态的基本元件来构造。1854 年英国数学家乔治·布尔(George Boole，1815—1864)出版了他的不朽名著《思维规律的研究》，第一次给出了逻辑的基本规则。1938 年克劳德·香农(Claude Elwood Shannon，1916—2001)创立了开关函数的代数，揭示怎样用逻辑的基本规则来设计电路，这些规则形成了布尔代数的基础。随着半导体器件制造工艺的发展，各种具有良好开关性能的微电子器件不断涌现，因而布尔代数已成为分析和设计现代电子逻辑电路不可缺少的数学工具。

5.1 布尔函数

5.1.1 布尔函数和布尔表达式

布尔代数或称逻辑代数。它虽然和普通代数一样也用字母表示变量，但变量的值只有“1”和“0”两种。所谓逻辑“1”和逻辑“0”，代表两种相反的逻辑状态。在布尔代数中只有布尔积(“与”运算)、布尔和(“或”运算)和布尔补(“非”运算)3 种运算。

1. 布尔和

表达式：$F=A+B$。

运算规则：$0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=1$。

2. 布尔积

表达式：$F=A\cdot B$(在不引起混淆的情况下，可以删去运算符，就像写代数积一样)。

运算规则：$0\cdot 0=0$，$0\cdot 1=0$，$1\cdot 0=0$，$1\cdot 1=1$。

3. 布尔补

表达式：$F=\overline{A}$(布尔补运算符用上画线表示)。

运算规则：$\overline{0}=1$，$\overline{1}=0$。

它们运算的优先级从高到低依次为布尔补、布尔积和布尔和。

例 5.1 计算$(0+1)\cdot\overline{0\cdot 1}$的值。

解：根据布尔和、布尔积和布尔补的运算规则，得

$$(0+1)\cdot\overline{0\cdot 1}=1\cdot\overline{0}=1\cdot 1=1$$

布尔和、布尔积和布尔补分别对应于第2章中的逻辑算子∨、∧和¬。有关布尔代数的结果可以直接翻译成有关命题的结果，同样，有关命题的结果也可以翻译成关于布尔代数的命题。

设 $B=\{0,1\}$，如果变量 x 只取 B 中的值，则称 x 为一个布尔变量。

定义 5.1 如果 $n\in Z^{+}$，则 $B^{n}=\{(b_1,b_2,\cdots,b_i,\cdots,b_n)\mid b_i\in B,1\leqslant i\leqslant n\}$，函数 $f:B^{n}\to B$ 称为具有 n 个变量的(或 n 度的)布尔函数。布尔函数也称开关函数。

通过写成 $f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ 的形式来强调这 n 个变量，其中每一个变量 x_i，都是一个布尔变量。

布尔函数也可以用由布尔变量和布尔运算构成的表达式来表示。关于布尔变量 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$ 的布尔表达式可以递归地定义如下。

定义 5.2 (1) $0,1,x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$ 是布尔表达式。

(2) 如果 E_1 和 E_2 是布尔表达式，则 $\overline{E}_1$，$(E_1\ E_2)$ 和 (E_1+E_2) 是布尔表达式。

每个布尔表达式都表示一个布尔函数，此函数的值是通过在表达式中用0和1替换布尔变量得到的。

例 5.2 令 $f:B^{3}\to B$，其中 $f(x,y,z)=xy+z$，按如下规则确定这个布尔函数：对变量 x,y,z 的8组可能赋值分别计算函数 f 的值，如表5.1所示。

表 5.1 对变量 x,y,z 的 8 组赋值分别计算得到的函数 f 的值

x	y	z	xy	$f(x,y,z)=xy+z$	x	y	z	xy	$f(x,y,z)=xy+z$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1

定义 5.3 令 $f,g:B^{n}\to B$ 是两个分别具有 n 个布尔变量 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$ 的布尔函数，称 f 和 g 是相等的，若对于 n 个布尔变量 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$ 的 2^{n} 组可能的赋值，其中每一个布尔变量或者赋值为0或者赋值为1，都有 $f(b_1,b_2,\cdots,b_i,\cdots,b_n)=g(b_1,b_2,\cdots,b_i,\cdots,b_n)$，记为 $f=g$。

表示同一函数的布尔表达式称为等价的。如布尔表达式 $x+y$ 和 $\overline{\overline{x}\cdot\overline{y}}$ 是等价的。

2度布尔函数是从一个有4个元素的集合到 B 的函数，这4个元素是 $B=\{0,1\}$ 中元素构成的元素对。B 是一个有2个元素的集合，因而有16个不同的2度布尔函数，如表5.2所示。

表 5.2 2 度布尔函数

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

例 5.3 有多少个不同的 n 度布尔函数？

解：由计数的乘法规则知有 2^n 个由 0 和 1 构成的不同的 n 元组。因为布尔函数就是对这些 2^n 个 n 元组中的每一个数进行取值，根据乘法规则表明了有 2^{2^n} 个不同的 n 度布尔函数。

当 $n=1$ 时，有 4 个不同的 1 度布尔函数；

当 $n=2$ 时，有 16 个不同的 2 度布尔函数；

当 $n=3$ 时，有 256 个不同的 3 度布尔函数；

当 $n=4$ 时，有 65 536 个不同的 4 度布尔函数；

当 $n=5$ 时，有 4 294 967 296 个不同的 5 度布尔函数；

当 $n=6$ 时，有 18 446 744 073 709 551 616 个不同的 6 度布尔函数。

随着 n 的增长，n 度布尔函数的数量显爆炸式增长。

5.1.2 布尔代数中的恒等式

对于 n 元的布尔表达式，按照它的定义应该有无穷多种不同形式，其中有许多是等值的，可以把其中最重要的恒等式列出，作为布尔代数的基本定律，如表 5.3 所示。

表 5.3 布尔恒等式

恒 等 式	定律名称	恒 等 式	定律名称
$\overline{\overline{x}}=x$	双重补律	$x+y=y+x$ $xy=yx$	交换律
$x+x=x$ $x\cdot x=x$	幂等律	$x+(y+z)=(x+y)+z$ $x(yz)=(xy)z$	结合律
$x+0=x$ $x\cdot 1=x$	同一律	$x+yz=(x+y)(x+z)$ $x(y+z)=xy+xz$	分配律
$x+1=1$ $x\cdot 0=0$	支配律	$x(x+y)=x$ $x+xy=x$	吸收律
$x+\overline{x}=1$ $x\cdot\overline{x}=0$	互补律	$\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y}$ $\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$	德摩根律

表 5.3 中的恒等式都可以用列表的方法进行证明。例 5.4 就以这种方法证明了一个分配律，其余的恒等式证明读者可以自己练习。

例 5.4 证明分配律 $x+yz=(x+y)(x+z)$是正确的。

解：表 5.4 表示了此恒等式的验证。因为此表的最后两列完全相同。

表 5.4 分配律恒等式的验证

x	y	z	yz	$x+y$	$x+z$	$x+yz$	$(x+y)(x+z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1

续表

x	y	z	yz	$x+y$	$x+z$	$x+yz$	$(x+y)(x+z)$
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

可以利用布尔代数中的一些恒等式来证明另一个恒等式。

例 5.5 用布尔代数的恒等式证明吸收律 $x(x+y)=x$。

解：$x(x+y)=(x+0)(x+y)$ 布尔和的同一律

$=x+(0\cdot y)$ 布尔和对布尔积的分配律

$=x+(y\cdot 0)$ 布尔积的交换律

$=x+0$ 布尔积的支配律

$=x$ 布尔和的同一律

利用这些恒等式可用于电路设计的化简。

例 5.6 若一个逻辑电路对应的输出表达式为 $x(yz+\bar{y}\bar{z})+x(\bar{y}z+y\bar{z})$，请化简。

解： $x(yz+\bar{y}\bar{z})+x(\bar{y}z+y\bar{z})$

$=xyz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+xy\bar{z}$ 分配律

$=xyz+xy\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z$ 交换律

$=xy(z+\bar{z})+x\bar{y}(\bar{z}+z)$ 分配律

$=xy\cdot 1+x\bar{y}\cdot 1$ 互补律

$=xy+x\bar{y}$ 支配律

$=x(y+\bar{y})$ 分配律

$=x\cdot 1$ 互补律

$=x$ 支配律

表 5.3 中的恒等式(除双重补律之外)都是成对出现的。为解释这种情形，给出对偶式的概念。

定义 5.4 将一个布尔表达式中的布尔和与布尔积互换，0 与 1 互换得到的式子称为该布尔表达式的对偶式。

如：$x+y$ 与 xy 对偶，$\bar{x}+(yz)$ 与 $\bar{x}(y+z)$ 对偶，$x\cdot 0$ 与 $x+1$ 对偶。

例 5.7 求 $x(y+0)$ 和 $\bar{x}\cdot 1+(\bar{y}+z)$ 的对偶式。

解：在这两个表达式中交换符号“$\cdot$”和“$+$”以及 0 和 1 就产生了它们的对偶式。这两个表达式的对偶分别为 $x+y\cdot 1$ 和 $(\bar{x}+0)\bar{y}z$。

布尔表达式所表示的布尔函数 F 的对偶是由这个表达式的对偶所表示的函数，这个对偶函数记为 F^d，它不依赖于表示 F 的那个特定的布尔表达式。对于由布尔表达式表示的函数的恒等式，当取恒等式两边的函数的对偶时，等式仍然成立。此结果叫作对偶性定理，它对于获得新的恒等式十分有用。

例 5.8 通过取对偶的方法，由恒等式 $x+yz=(x+y)(x+z)$ 构造另一个恒等式。

解：取此恒等式两边的对偶，得到恒等式 $x(y+z)=xy+xz$，该恒等式称为布尔积对布尔和的分配律。而原恒等式称为布尔和对布尔积的分配律。

5.2 布尔函数的表示

本节讨论两个问题。第一,有没有标准的布尔表达式来表示布尔函数?这个问题将通过如下结论来解决:任何一个布尔函数都可由布尔变量及其补的布尔积的布尔和来表示。这个问题的答案还说明了任何布尔函数可以由{—,·,+}3个布尔算子来表示。第二,有没有更小的算子集合来表示所有的布尔函数?通过讨论将得出:所有的布尔函数都可以用一个算子来表示。这两个问题在逻辑电路设计中都有特殊的重要性。

5.2.1 布尔函数的主析取范式

例 5.9 给定3个布尔变量 x,y,z,找到满足表5.5的列中所给出值的函数 f,g,h:$B^3\to B$ 的布尔表达式。

表 5.5 函数 f,g,h:$B^3\to B$ 的值

x	y	z	f	g	h	x	y	z	f	g	h
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0

解:对于 f 下面的列,要得到一个函数,其中的值1只出现在 $x=y=0$ 且 $z=1$ 的情况下,函数 $f(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}z$ 就是这样的一个函数。同理,函数 $g(x,y,z)=x\bar{y}\bar{z}$ 在 $x=1$ 且 $y=z=0$ 的情况下得到值1,其他情况下都为0。因为 f 和 g 都是只有在一种情况下具有值1,并且这两种情况彼此不同,所以它们的和 $f+g$ 恰好在这两种情况下具有值1,所以 $h(x,y,z)=f(x,y,z)+g(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}z+x\bar{y}\bar{z}$ 就对应于 h 下面的列中给定的值。

由这个例子可以得到如下定义。

定义 5.5 对于所有 $n\in Z^+$,如果 f 是具有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n$ 的一个布尔函数,则称

(1) 对于 $1\leqslant i\leqslant n$,每一项 x_i 或者它的补 $\bar{x}_i$ 为一个文字。

(2) 具有 $y_1y_2\cdots y_i\cdots y_n$ 形式的项,其中对于 $1\leqslant i\leqslant n$ 有每个 $y_i=x_i$ 或者 $y_i=\bar{x}_i$,为一个基本合取式(又称为一个极小项)。

(3) 作为若干个基本合取式(极小项)之和的 f 的表示形式,为 f 的**主析取范式**。

对于定义5.5(2)中定义的极小项,每一个布尔变量或它的补都出现且仅出现一次。如3个布尔变量 x,y,z 的极小项有 $2^3=8$ 个,即 $\bar{x}\bar{y}\bar{z},\bar{x}\bar{y}z,\bar{x}y\bar{z},\bar{x}yz,x\bar{y}\bar{z},x\bar{y}z,xy\bar{z},xyz$。一般情况下,$n$ 个变量的极小项有 2^n 个。

极小项通常用 m_i 来表示,下标 i 即极小项编号,用十进制表示。将极小项中原变量用1表示,补变量用0表示,即可得到极小项的编号,以 $\bar{x}yz$ 为例,因为它与011对应,所以就称 $\bar{x}yz$ 是和变量取值011相对应的极小项,而011相当于十进制数3,所以把 $\bar{x}yz$ 记为 m_3。按此原则,3个变量的极小项代表符号如表5.6所示。

表 5.6 3 个变量的极小项

极小项	x	y	z	二进制编号	表示符号	极小项	x	y	z	二进制编号	表示符号
$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	0	0	0	000(=0)	m_0	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	1	0	0	100(=4)	m_4
$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	0	0	1	001(=1)	m_1	$x\,\bar{y}\,z$	1	0	1	101(=5)	m_5
$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	0	1	0	010(=2)	m_2	$xy\,\bar{z}$	1	1	0	110(=6)	m_6
$\bar{x}\,yz$	0	1	1	011(=3)	m_3	xyz	1	1	1	111(=7)	m_7

例 5.10 求布尔函数 $f(x,y,z)=xy+\bar{x}z$ 的主析取范式。

解：虽然布尔表达式 $xy+\bar{x}z$ 已经是积之和的形式，但其中的项还不是极小项，必须在非极小项中找回缺失的布尔变量。

$$\begin{aligned} xy+\bar{x}z &= xy\cdot 1+\bar{x}z\cdot 1 = xy\cdot(\bar{z}+z)+\bar{x}z\cdot(\bar{y}+y) = xy\,\bar{z}+xyz+\bar{x}\,\bar{y}z+\bar{x}yz \\ &= m_6+m_7+m_1+m_3 = \sum m(1,3,6,7) \end{aligned}$$

一般地，利用布尔代数的恒等式，可以把任意一个布尔函数转化为它的主析取范式。

例 5.11 求布尔函数 $f(x,y,z)=\overline{(xy+\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z})\overline{xy}}$ 的主析取范式。

解：可经下列几步。

(1) 多次利用德摩根律去掉补号，直到最后得到一个只在单个布尔变量上有补号的布尔表达式。

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \overline{(xy+\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z})\,\overline{xy}} \\ &= \overline{(xy+\bar{x}\,\bar{y}+\bar{z})}+xy \\ &= \overline{xy}\cdot(x+y)\cdot z+xy \\ &= (\bar{x}+\bar{y})\cdot(x+y)z+xy \end{aligned}$$

(2) 利用分配律消去括号，直到得到一个积之和形式的布尔表达式。

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (\bar{x}+\bar{y})\cdot(x+y)z+xy \\ &= \bar{x}xz+\bar{x}yz+x\,\bar{y}z+y\,\bar{y}z+xy \\ &= \bar{x}yz+x\,\bar{y}z+xy \end{aligned}$$

(3) 所得式子中若有非极小项，则找回缺失的布尔变量，变为极小项。

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x}yz+x\,\bar{y}z+xy \\ &= \bar{x}yz+x\,\bar{y}z+xy\cdot 1 \\ &= \bar{x}yz+x\,\bar{y}z+xy\cdot(\bar{z}+z) \\ &= \bar{x}yz+x\,\bar{y}z+xy\,\bar{z}+xyz \\ &= m_3+m_5+m_6+m_7 = \sum m(3,5,6,7) \end{aligned}$$

5.2.2 函数完备性

每个布尔函数都存在主析取范式，表明每一个布尔函数都可以用布尔算子－，·和＋来表示。若每个布尔函数都可以由布尔运算表示，则称集合{－，·，＋}是函数完备的。还有没有更小的函数完备运算集合呢？如果这三个运算中的某一个能够用其余两个表示，则就还有。用德摩根律可以做到这一点。使用恒等式

$$x+y=\overline{\bar{x}\,\bar{y}}$$

可以消去所有的布尔和，这意味着集合{—，·}是函数完备的。

同理，使用恒等式

$$xy=\overline{\bar{x}+\bar{y}}$$

可以消去所有的布尔积，意味着集合{—，+}也是函数完备的。

而集合{·，+}不是函数完备的，因为用这两个运算不可能表示布尔函数 $f(x)=\bar{x}$。

我们已经找到一些含有两个运算的函数完备集合，还能不能找到更小的集合，即只含一个运算的集合，它仍然是函数完备的？这样的集合是存在的。

定义运算“↑”或“NAND”（读作“与非”）如下：

$$0\uparrow 0=0\uparrow 1=1\uparrow 0=1,\quad 1\uparrow 1=0$$

定义运算“↓”或“NOR”（读作“或非”）如下：

$$0\downarrow 0=1,\quad 0\downarrow 1=1\downarrow 0=1\downarrow 1=0$$

集合{↑}和{↓}是函数完备的。因为已知集合{—，·，+}是函数完备的，且有

$$\bar{x}=x\uparrow x$$
$$xy=(x\uparrow y)\uparrow(x\uparrow y)$$
$$x+y=(x\uparrow x)\uparrow(y\uparrow y)$$

故集合{↑}是函数完备的。集合{↓}的函数完备性证明留做习题。

5.3 布尔代数的应用

5.3.1 门电路

布尔代数被用来作为电子装置的电路模型，这样装置的输入和输出都可以是集合 $B=\{0,1\}$中的元素。计算机或其他电子装置就是由许多电路构成的，电路可以根据布尔代数的规则设计，这些已经在前两节讨论过。电路的基本元件是所谓的门，每种类型的门实现一种布尔运算。

图 5.1 中表示的分别是实现布尔积、布尔和及布尔补运算的逻辑门电路，分别称为与门、或门和非门。与门和或门允许有多个输入。

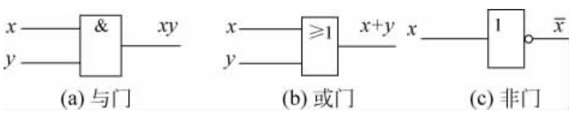

图 5.1 逻辑门符号

使用与门、或门和非门的组合可以构造组合电路。例如图 5.2 描述了输出 $xy+\bar{x}y$ 的电路。

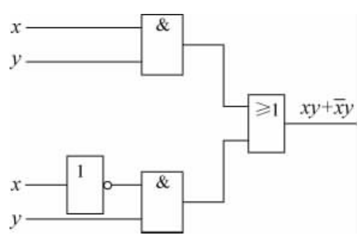

图 5.2 组合电路

5.2.2 节定义的运算“↑”和运算“↓”对应的门电路分别称为与非门和或非门，其逻辑门符号如图 5.3 所示。由于集合{↑}和{↓}都是函数完备的，所以所有的电路都可以只用一种“与非门”或只用一种“或非门”构成。与非门和或非门也允许有多个输入。

下面给出一个具有实际功能的电路。

例 5.12 某个组织的一切事务都由一个三人委员会决定,每个委员对提出的建议可以投赞成票或反对票。一个建议如果得到至少两张赞成票就获得通过。设计一个电路来确定建议是否获得通过。

解:如果第一个委员投赞成票,则令 $x=1$;如果这个委员投反对票,则令 $x=0$。如果第二个委员投赞成票,则令 $y=1$;如果这个委员投反对票,则令 $y=0$。如果第三个委员投赞成票,则令 $z=1$;如果这个委员投反对票,则令 $z=0$。必须设计一个电路使得对于输入的 x,y 和 z,如果其中至少有两个为 1,则此电路产生输出 1。具有这样输出值的一个布尔函数表示是 $xy+yz+xz$,实现这个函数的电路如图 5.4 所示。

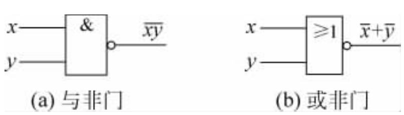

图 5.3 与非门和或非门

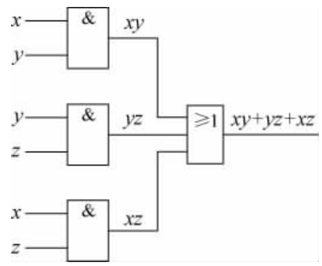

图 5.4 函数 $xy+yz+xz$ 的电路

5.3.2 卡诺图

组合电路的有效性依赖于门的个数及安排。在组合电路的设计过程中,首先构造一个表,对于输入可能取的每种值有对应的输出值。对于任何电路,总可以用主析取范式找到一组门电路来实现这个电路。但是,主析取范式中可能包含一些可以合并的项,例如,考虑这样的电路,它输出 1 当且仅当 $x=y=z=1$,或 $x=z=1$ 且 $y=0$,此电路的主析取范式为 $xyz+x\bar{y}z$。在这个式子中,只有一个变量以不同的形式出现,即 y。它们可以做如下合并:

$$xyz+x\bar{y}z=xz(y+\bar{y})=xz\cdot 1=xz$$

这样,xz 也是一个表示这个电路的布尔表达式,但包含更少的运算,实现这个表达式只用一个与门,而实现表达式 $xyz+x\bar{y}z$ 需要一个非门、两个与门和一个或门。

对于表示电路的一个布尔表达式,为了减少其中项的个数,有必要去发现可以合并的项。如果布尔函数所包含的变量相对较少,可以用一种图形法来发现能被合并的项。此法称为卡诺图,它是由摩里斯·卡诺(Maurice Karnaugh)在 1953 年发现的。

n 变量的卡诺图是一种有 2^n 个方格构成的图形,每一个方格表示布尔函数的一个极小项,所有的极小项巧妙地排列成一种能清楚地反映它们相邻关系的方格阵列。

因为任何一个布尔函数都可以表示成"极小项之和"的形式,所以一个函数可用图形中的若干方格构成的区域来表示。

图 5.5 中分别列出 2 变量、3 变量和 4 变量各极小项在卡诺图中方格的位置。

注意:如果一些方格所表示的极小项只在 1 个变量处不一样,则称这些方格是相邻的。如在 4 变量卡诺图中,m_5 与 m_1、m_4、m_7、m_{13}是相邻的,m_0与 m_1、m_2、m_4、m_8是相邻的。

用卡诺图表示布尔函数的步骤如下。

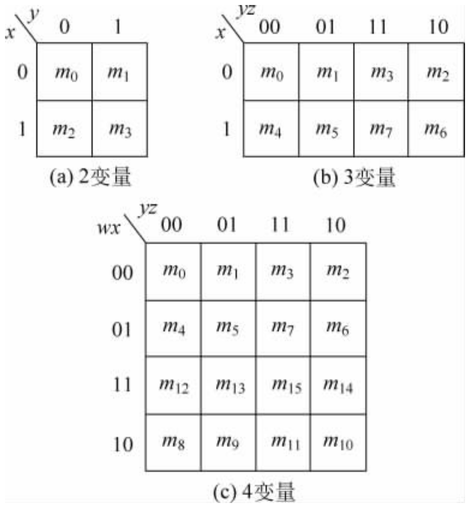

图 5.5　2 变量、3 变量和 4 变量各极小项在卡诺图中方格的位置

(1) 把已知布尔函数式化为极小项之和形式。

(2) 将函数式中包含的极小项在卡诺图对应的方格中填 1,其余方格不填。

例 5.13　画出下列布尔函数的卡诺图。

(1) $\bar{x}y+x\bar{y}$。

(2) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z$。

(3) $\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}+w\bar{x}\bar{y}\bar{z}+w\bar{x}y\bar{z}+w\bar{x}yz+wx\bar{y}\bar{z}$。

解:这 3 个布尔函数的卡诺图分别为图 5.6 中的(a),(b),(c)所示。

用卡诺图化简布尔函数的方法如下。

(1) 化简依据:利用公式 $x\bar{y}+xy=x$,将两个极小项合并消去表现形式不同的变量。

(2) 化简方法:用圈 1 的方法画圈,消去表现形式不同的变量,保留相同的变量。

2 个相邻的极小项结合,可以消去 1 个取值不同的变量而合并为 1 项。

4 个相邻的极小项结合,可以消去 2 个取值不同的变量而合并为 1 项。

8 个相邻的极小项结合,可以消去 3 个取值不同的变量而合并为 1 项。

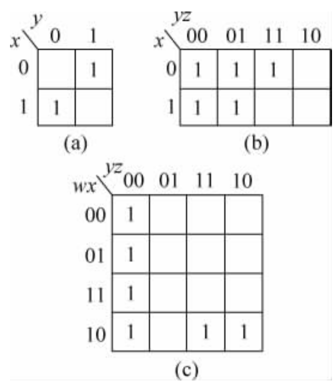

图 5.6　3 个布尔函数的卡诺图

(3) 画圈的原则:

- 尽量画大圈,但每个圈内只能含有 2^n($n=1,2,3,\cdots$)个相邻项。要特别注意对边相邻性和四角相邻性。
- 圈的个数尽量少。
- 卡诺图中所有取值为 1 的方格均要被圈过,即不能漏下取值为 1 的最小项。
- 在新画的包围圈中至少要含有 1 个未被圈过的 1 方格,否则该包围圈是多余的。

(4) 写出化简后的表达式。每一个圈写一个最简布尔积,然后将所有最简布尔积进行布尔和运算,即得到最简的积之和形式的表达式。

例 5.14 利用卡诺图化简下列布尔函数。

(1) $\bar{x}\bar{y}+\bar{x}y$。 (2) $\bar{x}y+x\bar{y}+xy$。

解:在卡诺图上画圈如图 5.7 所示。

化简后得到的表达式为:

(1) $\bar{x}$。 (2) $x+y$。

例 5.15 利用卡诺图化简下列布尔函数。

(1) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}+xy\bar{z}$。

(2) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z$。

解:在卡诺图上画圈,如图 5.8 所示。

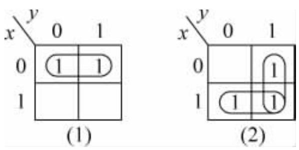

图 5.7 例 5.14 中在卡诺图上画圈

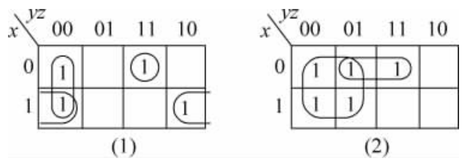

图 5.8 例 5.15 中在卡诺图上画圈

化简后得到的表达式为:

(1) $\bar{y}\bar{z}+x\bar{z}+\bar{x}yz$。 (2) $\bar{y}+\bar{x}z$。

例 5.16 利用卡诺图化简下列布尔函数。

(1) $\bar{w}\bar{x}yz+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}+\bar{w}x\bar{y}z+\bar{w}xyz+wx\bar{y}z+wxyz+w\bar{x}yz$。

(2) $\bar{w}\bar{x}\bar{y}z+\bar{w}\bar{x}yz+\bar{w}x\bar{y}\bar{z}+\bar{w}x\bar{y}z+\bar{w}xyz+wx\bar{y}z+wxyz+w\bar{x}\bar{y}\bar{z}+w\bar{x}\bar{y}z+w\bar{x}yz+w\bar{x}y\bar{z}$。

解:在卡诺图上画圈,如图 5.9 所示。

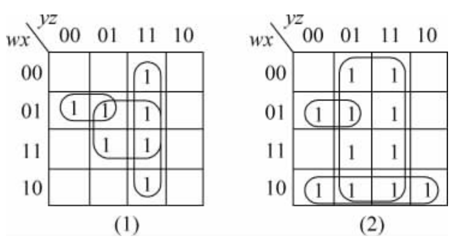

图 5.9 例 5.16 中在卡诺图上画圈

化简后得到的表达式为:

(1) $yz+xz+\bar{w}x\bar{y}$。 (2) $z+w\bar{x}+\bar{w}x\bar{y}$。

习题 5

1. 计算下列表达式的值。

(1) $1\cdot 0$。 (2) $1+\bar{1}$。 (3) $\bar{0}\cdot 0$。 (4) $\overline{(1+0)}$。

2. 证明 $x\bar{y}+y\bar{z}+z\bar{x}=\bar{x}y+\bar{y}z+\bar{z}x$。

3. 验证结合律。

4. 求下列布尔表达式的对偶。

(1) $x+\bar{y}$。　　(2) $\bar{x}\bar{y}$。

(3) $xyz+\bar{x}\bar{y}\bar{z}$。　　(4) $x\bar{z}+x\cdot 0+\bar{x}\cdot 1$。

5. 求布尔变量 x,y,z 或其补的布尔积，使得它具有值为 1 当且仅当以下条件成立。

(1) $x=y=0,z=1$。　　(2) $x=0,y=1,z=0$。

(3) $x=0,y=z=1$。　　(4) $x=y=z=0$。

6. 求下列布尔函数的主析取范式。

(1) $f(x,y,z)=x+y+z$。

(2) $f(x,y,z)=(x+z)y$。

(3) $f(x,y,z)=\overline{\bar{x}(y+\bar{z})}$。

7. 证明：

(1) $\bar{x}=x\uparrow x$。　　(2) $xy=(x\uparrow y)\uparrow(x\uparrow y)$。　　(3) $x+y=(x\uparrow x)\uparrow(y\uparrow y)$。

8. 证明：

(1) $\bar{x}=x\downarrow x$。　　(2) $xy=(x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y)$。　　(3) $x+y=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y)$。

9. 证明：集合$\{\downarrow\}$是函数完备集。

10. 构造产生下列输出的电路。

(1) $(x+y)\bar{x}$。　　(2) $\bar{x}\overline{(y+\bar{z})}$。　　(3) $(x+y+z)\bar{x}\bar{y}\bar{z}$。

11. 有时候灯具需要有多个开关来控制，因此有必要设计这样的电路：当灯是关闭时，敲击任何一个开关都可以打开此灯；反之，当灯是打开时，敲击任何一个开关都可以关闭此灯。在有两个或三个开关的情况下，设计电路来完成这个任务。

12. 利用与门、或门和非门构造与非门和或非门。

13. 利用与非门和或非门构造与门、或门和非门。

14. 利用卡诺图化简下列 3 变量布尔函数。

(1) $\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}yz+x\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}z+xy\bar{z}$。

(2) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}\bar{y}z+\bar{x}yz+xy\bar{z}+xyz$。

15. 利用卡诺图化简下列 4 变量布尔函数。

(1) $f(w,x,y,z)=\sum m(2,3,4,5,7,8,12,13)$。

(2) $f(w,x,y,z)=\sum m(0,5,6,8,9,10,11,13,15)$。