

第一章 函数与极限

第一节 函 数

一、教学基本要求

1. 掌握一元函数的概念.
2. 了解函数的特性.
3. 了解反函数的概念.

二、答疑解惑

1. 单调函数必存在反函数, 不单调的函数是否一定不存在反函数?

答 不是. 函数单调只是它存在反函数的一个充分条件, 并不是必要条件. 从映射的角度来说, 函数 f 是否存在反函数, 取决于 f 是否为其定义域 D 到值域 $f(D)$ 上的单射, 如果是的话, 那么 f 就存在反函数, 否则就不存在反函数. 不单调的函数, 也可能是 D 到

$f(D)$ 上的单射, 这时它就存在反函数. 例如 $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上并

不单调, 但它是从 $[-1, 1]$ 到 $[0, 2]$ 上的单射, 所以存在反函数 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 是定义在 $[-a, a]$ 上的任意函数, $F(x) = f(x) + f(-x)$ 一定是偶函数吗?

答 是. 因为 $F(-x) = f(-x) + f[-(-x)] = f(-x) + f(x) = F(x)$, 所以 $F(x)$ 是偶函数.

3. 如果函数 $f(x), g(x)$ 在数集 X 上都无界, 那么 $f(x) \cdot g(x)$ 也在 X 上无界吗?

答 不一定. 例如 $f(x) = \tan x, g(x) = \cot x$ 都在 $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上无界, 但是 $f(x) \cdot g(x) \equiv 1, x \in X$, 即 $f(x) \cdot g(x)$ 在 X 上是有界的.

4. 两个单调增加(或减少)的函数之积一定还是单调增加(或减少)的函数吗?

答 不一定. 如 $f(x) = e^{2x}, g(x) = -e^{-x}$ 皆为单调增加的函数, 而 $f(x) \cdot g(x) = -e^x$ 却是单调减少的函数.

5. 周期函数是否一定有最小正周期?

答 不一定. 例如函数 $f(x) = C$ (其中 C 为常数), 因为对于任意的非零实数 l , 都有 $f(x+l) = f(x) = C$, 所以它是周期函数, 但实数中是没有最小正数的, 因此周期函数 $f(x) = C$ 没有最小正周期. 再如狄利克雷函数 $D(x)$, 可以证明任何非零的有理数均为该函数的周期, 但它没有最小正周期.

三、经典例题解析

题型一 判断函数的等价性

例 1 在下列各组函数中, 找出两个函数等价 (相等) 的一组:

- (1) $y = x^0$ 与 $y = 1$; (2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$;
 (3) $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$; (4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$.

分析 当且仅当两个函数的定义域和对应法则完全相同时, 两个函数才表示同一个函数或称两个函数等价 (相等), 否则表示两个不同的函数.

解 (1) 由于 $y = x^0$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, $y = 1$ 的定义域为全体实数, 所以该组的两个函数不等价.

(2) 由于 $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$, $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为全体实数, 所以该组的两个函数不等价.

(3) 由于两个函数的定义域均为 $\{x|x \neq 0\}$, 且对应法则相同, 所以该组的两个函数等价.

(4) 由于函数 $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为 $[3, +\infty)$, 函数 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为 $(-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$, 所以该组的两个函数不等价.

题型二 有关函数的性质

例 2 判断下列各函数的奇偶性:

- (1) $f(x) = e^{x^2} \sin x$; (2) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; (3) $f(x) = x^4 \sin x - x \cos x^2 + 1$.

分析 先检验函数的定义域是否对称, 然后按定义判断函数的奇偶性.

解 (1) 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 因为 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x) = e^{x^2} \sin x$ 是奇函数.

(2) 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 因为

$$f(-x) = -x \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = -x \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 因为 $f(-x) = -x^4 \sin x + x \cos x^2 + 1$, 而 $f(-x) = f(x)$ 和 $f(-x) = -f(x)$ 都不能对所有的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立, 所以 $f(x)$ 为非奇非偶的函数.

例 3 指出下列函数是否有界:

- (1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($a \leq x \leq 1, 0 < a < 1$); (2) $f(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot \sin \frac{1}{x}, x \neq 0$;
 (3) $f(x) = \frac{[x]}{x}, x > 0$; (4) $f(x) = x \cos x$ ($-\infty < x < +\infty$).

分析 根据函数有界性的定义进行判断.

解 (1) 因为 $a \leq x \leq 1$, 所以 $a^2 \leq x^2 \leq 1$, 从而有 $1 \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{a^2}$, 这里 $\frac{1}{a^2} > 1$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 是有界函数.

(2) 因为 $|\operatorname{sgn} x| \leq 1$, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 所以 $|f(x)| \leq 1$, 从而函数 $f(x) = (\operatorname{sgn} x) \cdot \sin \frac{1}{x} (x \neq 0)$ 是有界函数.

(3) 因为当 $x > 0$ 时, $0 \leq [x] \leq x$, 所以 $0 \leq \frac{[x]}{x} \leq 1$, 从而函数 $f(x) = \frac{[x]}{x} (x > 0)$ 是有界函数.

(4) 对任意的正数 $M > 0$, 取 $x = (2[M] + 1)\pi$, 则 $\cos(2[M] + 1)\pi = -1$, 因为

$$|f(x)| = |(2[M] + 1)\pi \cos[(2[M] + 1)\pi]| = (2[M] + 1)\pi > M,$$

所以函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

例 4 函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内 ().

(A) 有上界且无下界

(B) 有下界且无上界

(C) 有界且 $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$

(D) 有界且 $|f(x)| \leq 2$

解 选 (C) 正确. 因为 $1+x^2 \geq 2|x|$, 所以 $|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$.

例 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有定义, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少, 则 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调增加, 则 $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$.

证明 (1) 不妨设 $x_1 < x_2$, 由于已知 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少, 所以 $\frac{f(x_2)}{x_2} < \frac{f(x_1)}{x_1}$, 即 $x_1 f(x_2) < x_2 f(x_1)$. 类似地, 当 $x_1 < x_2 < x_1 + x_2$ 时, 有 $\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < \frac{f(x_2)}{x_2} < \frac{f(x_1)}{x_1}$, 从而 $x_2 f(x_1 + x_2) < (x_1 + x_2) f(x_2)$ 成立, 即 $x_2 f(x_1 + x_2) < x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) < x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2)$, 所以 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

(2) 不妨设 $x_1 < x_2$, 由于 $\frac{f(x)}{x}$ 单调增加, 所以 $\frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}$, 即 $x_1 f(x_2) > x_2 f(x_1)$, 类似地, 当 $x_1 < x_2 < x_1 + x_2$ 时, $\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} > \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}$, 从而 $x_2 f(x_1 + x_2) > (x_1 + x_2) f(x_2)$ 成立, 即 $x_2 f(x_1 + x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2) > x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2)$, 所以 $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$.

例 6 设 $f(x)$ 是以正数 a 为周期的周期函数, 且已知当 $0 < x \leq a$ 时, $f(x) = x^3$, 试求周期函数 $f(x)$.

解 设 $x = \bar{x} + na$, 其中 $0 < \bar{x} \leq a$, 则 $na < x \leq (n+1)a$, $\bar{x} = x - na$, $f(\bar{x}) = \bar{x}^3$, $n =$

$0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 由已知条件 $f(x) = x^3$ ($0 < x \leq a$), 可得

$$f(\bar{x}) = f(x - na) = (x - na)^3.$$

由周期函数的定义可知, $f(x) = f(\bar{x})$, 所以 $f(x) = (x - na)^3$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

四、习题选解

1. 指出下列各函数的奇偶性:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= x^2 \cos x; & (2) \quad f(x) &= \frac{1 - \cos x}{1 + \sin^2 x}; \\ (3) \quad f(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); & (4) \quad f(x) &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}). \end{aligned}$$

解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{1 + \sin^2(-x)} = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin^2 x} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \frac{1}{2}[e^{-x} - e^{-(-x)}] = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数.

$$\begin{aligned} (4) \quad \text{因为 } f(-x) &= \ln[-x + \sqrt{1 + (-x)^2}] = \ln(-x + \sqrt{1 + x^2}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{1 + x^2})(x + \sqrt{1 + x^2})}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

2. 下列函数中哪些是有界的?

$$(1) \quad y = 2\sin(\omega x + \varphi); \quad (2) \quad y = \frac{1}{1 + x^2}; \quad (3) \quad y = \frac{1}{1 - x^2}; \quad (4) \quad y = x \cos x.$$

解 (1) 因为 $|2\sin(\omega x + \varphi)| \leq 2$, 所以函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 有界.

(2) 因为 $1 + x^2 \geq 1$, 所以 $0 < \frac{1}{1 + x^2} \leq 1$, 故函数 $y = \frac{1}{1 + x^2}$ 有界.

(3) 对任意的 $M > 1$, 当 $\sqrt{1 - \frac{1}{M}} < |x| < \sqrt{1 + \frac{1}{M}}$ 时, 有 $1 - \frac{1}{M} < x^2 < 1 + \frac{1}{M}$, 则 $|1 - x^2| < \frac{1}{M}$, 从而 $\left| \frac{1}{1 - x^2} \right| > M$, 所以函数 $y = \frac{1}{1 - x^2}$ 无界, 如图 1-1 所示.

(4) 对任意的 $M > 0$, 存在正整数 k 使得 $2k\pi > M$. 因为当 $x = 2k\pi$ 时, $|y| = |2k\pi \cos(2k\pi)| = 2k\pi > M$, 所以函数 $y = x \cos x$ 无界, 如图 1-2 所示.

$$3. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| \leq \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}, & |x| > \frac{\pi}{3}, \end{cases} \text{ 求 } f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f(0) \text{ 和 } f\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{ 并作出 } y = f(x) \text{ 的图形.}$$

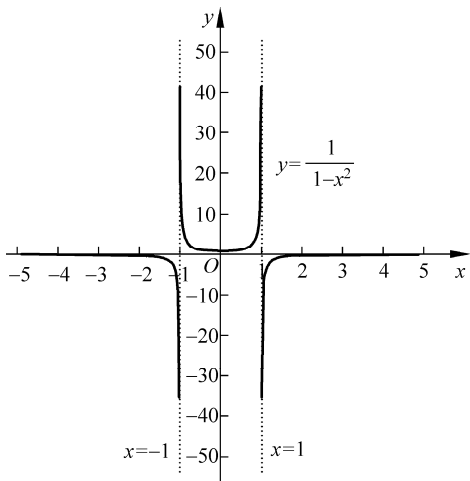


图 1-1

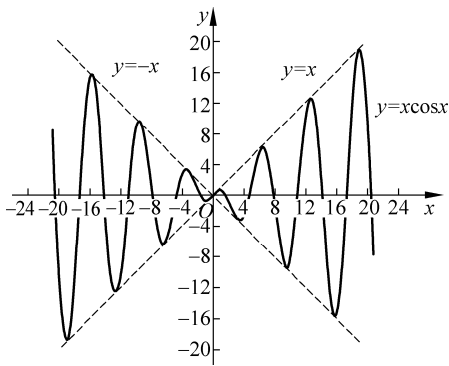


图 1-2

解 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $f(0) = |\sin 0| = 0$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$. $y = f(x)$ 的图形如图 1-3 所示.

4. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 证明 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$, $x \in X$, 即 $-M \leq f(x) \leq M$, $x \in X$, 亦即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M , 有下界 $-M$.

反之, 设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 , 有下界 K_2 , 即 $K_2 \leq f(x) \leq K_1$, $x \in X$, 取 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则有 $|f(x)| \leq M$, $x \in X$, 即 $f(x)$ 在 X 上有界.

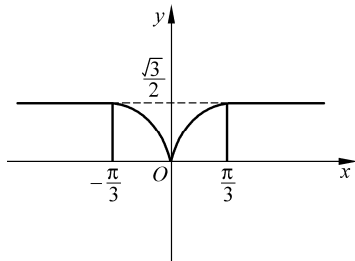


图 1-3

第二节 初等函数

一、教学基本要求

1. 掌握基本初等函数的性质.
2. 理解复合函数的概念.
3. 掌握初等函数的概念.
4. 会建立简单实际问题的函数关系.

二、答疑解惑

1. 设 $f(x)$ 为奇函数, $\varphi(x)$ 为偶函数, 且 $\varphi[f(x)]$ 有意义, 那么 $\varphi[f(x)]$ 一定是偶函数吗?

答 一定是. 因为 $\varphi[f(-x)] = \varphi[-f(x)] = \varphi[f(x)]$, 所以 $\varphi[f(x)]$ 是偶函数.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$, $\varphi(x)=1-\ln x$, 复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是什么?

答 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$, 所以对于复合函数 $f[\varphi(x)]$ 来说, 应有 $0 < \varphi(x) \leq 1$, 即 $0 < 1 - \ln x \leq 1$, 解得 $1 \leq x < e$, 因此 $f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $[1, e)$.

3. 分段函数一定不是初等函数吗?

答 不一定. 绝大多数分段函数不是初等函数, 但有些函数形式上是分段函数, 而实质上是初等函数. 例如, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -1, & x > 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ 和 $h(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ 因为在 $[0,2]$ 上, $f(x) = 1 - |x-1| = 1 - \sqrt{(x-1)^2}$, 所以 $f(x)$ 是初等函数. 又因为当 $x \neq 0$ 时, $g(x) = \frac{-|x|}{x} = \frac{-\sqrt{x^2}}{x}$, 所以 $g(x)$ 也是初等函数. 而 $h(x)$ 在其定义域内不能用一个式子表示, 所以 $h(x)$ 不是初等函数.

三、经典例题解析

题型一 求初等函数的定义域

例 1 求下列各函数 $f(x)$ 的定义域: (1) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x}$; (2) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+x^3}{1+x^4}$.

分析 求初等函数的定义域时, 一般要利用基本初等函数和复合函数的定义域来确定其定义域, 如分母不能为零, 对数的真数大于零, 反三角函数的取值范围, 被开方数的符号与开方次数有关等.

解 (1) 要使函数有意义, 须满足 $\begin{cases} \left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1, \\ 1+x \neq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} |2x| \leq |1+x|, \\ x \neq -1, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$, 所以

函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

(2) 求含有抽象函数 $f(x)$ 的定义域时, 一般先求出 $f(x)$ 的解析式. 将所给的解析式变形得

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x^2} + x^2} = \frac{x + \frac{1}{x}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2},$$

所以有 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$, 因此, 要使函数 $f(x)$ 有意义, 须 $x^2 - 2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm\sqrt{2}$. 所以函数的定义域为 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

题型二 复合函数的求法

例 2 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

分析 将函数 $y = f(u)$ 中的变量 u 看做一个整体 $u = \varphi(x)$, 代入 $y = f(u)$ 即得 $y = f[\varphi(x)]$.

解 将 $f(x)$ 中的 x 用 $f(x)$ 代替得

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0),$$

同理得

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases}$ 当 $x \leq 0$ 时, 求 $f[g(x)]$.

分析 分段函数在各开区间内要分段处理, 然后再单独讨论分段点的取值.

解 因为当 $x < 0$ 时, $g(x) = -2x > 0$, 所以 $f[g(x)] = [g(x)]^2 = (-2x)^2 = 4x^2$. 又当 $x = 0$ 时, $g(0) = 0$, 所以 $f[g(0)] = f(0) = 0$. 综上所述, 当 $x \leq 0$ 时, $f[g(x)] = 4x^2$.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \ln(1-x), & x < 0, \end{cases}$ 且 $\Delta x > 0$, 求 $\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ 和 $\frac{f(-\Delta x) - f(0)}{-\Delta x}$.

解 由于 $f(0) = 0$, 且当 $\Delta x > 0$ 时, $f(\Delta x) = \sqrt{\Delta x}$, $f(-\Delta x) = \ln(1 + \Delta x)$, 所以

$$\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}, \quad \frac{f(-\Delta x) - f(0)}{-\Delta x} = -\frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

四、习题选解

1. 求下列各函数的定义域:

(1) $y = \tan(x-2)$; (2) $y = \sqrt{x^2 - 3x - 10} + \ln(1+x)$.

解 (1) 要使函数有意义, 须使 $x-2 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k 为整数), 所以定义域为所有

$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} + 2$ 的实数构成的集合, 其中 k 为整数.

(2) 要使函数有意义, 须使 $x^2 - 3x - 10 \geq 0$, 且 $1+x > 0$, 所以定义域为 $[5, +\infty)$.

2. 指出下列各函数的复合过程:

(1) $y = \sin^2 x$; (2) $y = \sin x^2$; (3) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$; (4) $y = \ln[\ln(\ln x)]$.

解 (1) $y = u^2$, $u = \sin x$.

(2) $y = \sin u$, $u = x^2$.

(3) $y = e^v$, $u = \sqrt{v}$, $v = \sin x$.

(4) $y = \ln u$, $u = \ln v$, $v = \ln x$.

注 分解后的每个函数应为基本初等函数或常数与基本初等函数的和、差、积、商.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并分别作出它们的图形.

解 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1, \end{cases}$ 即 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0, \end{cases}$ 其图形如图 1-4 所示.

$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1, & |x| < 1, \\ e^0, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases}$ 即 $g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1, \end{cases}$ 其图形如图 1-5 所示.

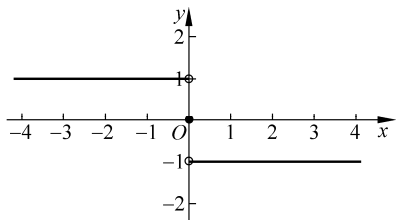


图 1-4

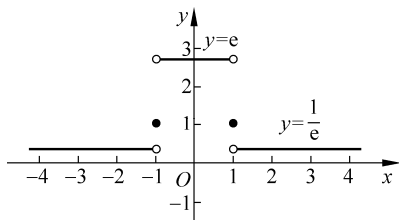


图 1-5

4. 设 $f(x)$ 满足 $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1$, 求 $f(x)$.

解 由已知条件可知 $3f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{1}{x} + 1$, 与原方程联立解得 $f(x) = \frac{3x}{5} + \frac{2}{5x} + 1$.

第三节 数列的极限

一、教学基本要求

1. 理解数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的概念.
2. 了解数列极限的几何意义.

二、答疑解惑

1. 若 n 越大, $|x_n - a|$ 越小, 则数列 $\{x_n\}$ 就以 a 为极限吗?

答 不一定. 随着 n 的增大, $|x_n - a|$ 越来越小并不意味着 $|x_n - a|$ 一定趋向于零. 例如 $x_n = \frac{1}{n}$, $a = -1$, $|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} + 1\right| = 1 + \frac{1}{n}$. 虽然当 n 越大时, $1 + \frac{1}{n}$ 越小, 但数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 并不以 -1 为极限.

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+m} = a$ (m 为正整数), 对吗?

答 对. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立. 现在要使 $|x_{n+m} - a| < \varepsilon$, 只要 $n+m > N$, 即 $n > N-m$, 于是可取 $N' = \max\{N-m, 1\}$, 则当 $n > N'$ 时, 就有 $|x_{n+m} - a| < \varepsilon$, 由数列极限的定义可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+m} = a$.

3. 在数列极限的定义中, N 与 ε 是否存在函数关系?

答 一般来说, N 与 ε 有关, 但不能说它们存在函数关系. 因为对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 如果存在一个满足定义要求的 N_0 , 那么任何大于 N_0 的正整数都可以作为满足定义要求的 N . 这就是说, N 的值并不是由 ε 所唯一确定的, 根据函数的定义, N 与 ε 不存在函数关系.

4. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ 吗?

答 不一定. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$. 如果 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. 如果 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在, 即使极限存在也未必等于 1. 例如 $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 但是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$ 不存在. 又如 $x_n = \frac{1}{2^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$.

5. 如何证明一个数列是发散的?

答 要证明数列 $\{x_n\}$ 发散, 即数列 $\{x_n\}$ 不收敛, 通常采用以下两种方法:

(1) 找出数列 $\{x_n\}$ 的一个发散的子列; (2) 找出数列 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列.

三、经典例题解析

题型一 用定义证明数列极限的存在性

例 1 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中 a 为常数, 且 $a > 1$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, 即 $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$, 亦即 $\frac{1}{n} < \log_a(\varepsilon + 1)$, 只要 $n > \frac{1}{\log_a(\varepsilon + 1)}$ 即可, 于是取 $N = \left\lceil \frac{1}{\log_a(\varepsilon + 1)} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 都有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

例 2 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+n-4} = 0$.

分析 求 N 时, 在“放大”的过程中, 有时还需要添加一定的限制条件.

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 限制 $n > 4$, 要使 $\left| \frac{2n-1}{n^2+n-4} - 0 \right| < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 即可, 于是取 $N = \max \left\{ 4, \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$, 则当 $n > N$ 时, 都有 $\left| \frac{2n-1}{n^2+n-4} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+n-4} = 0$.

题型二 求数列的极限

例 3 设数列 $x_n = (1+k)^n + (1-k)^n$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} 1+|k|, & k \neq 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$

证明 当 $k = 0$ 时, $x_n = 2$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+k)^{n+1} + (1-k)^{n+1}}{(1+k)^n + (1-k)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+k + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^n (1-k)}{1 + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^n}, \text{ 由 } \left|\frac{1-k}{1+k}\right| < 1,$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^n = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1+k$.

类似可证, 当 $k < 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1-k$.

四、习题选解

1. 填空题:

(1) 数列有界是它收敛的_____条件;

(2) 对于数列 $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$, 当 n 最小为_____时, 可使 $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < 10^{-3}$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \underline{\hspace{1cm}}$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n} = \underline{\hspace{1cm}}$; (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{n}} = \underline{\hspace{1cm}}$ (a 为任意实数).

解 (1) 应填“必要但不充分”.

(2) 应填 2000. 因为要使 $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{2}{n+1}\right| < 10^{-3}$, 只要 $n+1 > 2000$, 即 $n > 1999$, 且 n 为正整数, 所以 n 最小为 2000.

(3) 应填 1. (4) 应填 0. (5) 应填 0.

2. 根据数列极限的定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

证明 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要使 $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ 即可, 取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 都有 $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

证明 因为数列 $\{x_n\}$ 有界, 所以存在 $M > 0$, 使得对于一切 n 都有 $|x_n| \leq M$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 故对 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|y_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$, 从而有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

4. 对于数列 $\{x_n\}$, 如果 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$ 且 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.