第 3 章　微分中值定理与导数的应用

在第 2 章中我们主要研究了已知函数的求导问题，而在实际应用中更多的是已知导数的性质，研究函数的性质，所以本章将借助导数来研究函数及其曲线的性态，解决一些常见的实际问题. 下面首先来介绍导数应用的理论基础——微分中值定理.

3.1　微分中值定理

3.1.1　罗尔定理

在第 1 章研究正弦函数时，我们发现这样一个有趣的几何现象：$y=\sin x, x\in[0,2\pi]$的图形如图 3.1.1 所示，该图形在$[0,2\pi]$上处处连续，除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，且 $\sin 0=\sin 2\pi$，则函数 $y=\sin x$ 在$[0,2\pi]$内至少有一点处的切线是水平的. 该点就是曲线的最高点或最低点. 这种现象不是偶然的，为了说明这一现象，我们先给出一个引理.

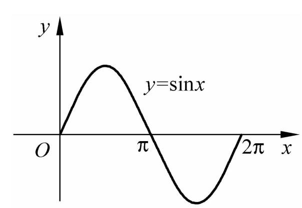

图　3.1.1

费马引理　如果函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，并且在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$内有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad（或\ f(x)\geqslant f(x_0)）$$

则

$$f'(x_0)=0$$

证　不妨设 $x\in U(x_0)$时，$f(x)\leqslant f(x_0)$. 则当 $x<x_0$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

当 $x>x_0$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

由函数极限的保号性得

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

$$f'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

再由 $f'(x_0)$存在可知 $f'_{+}(x_0)=f'_{-}(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$.

同理可得 $f(x)\geqslant f(x_0)$的情形，结论得证.

通常称导数为零的点为函数的**驻点**.

定理 3.1.1（**罗尔定理**）　设函数 $f(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

分析　若要证明结论，根据费马引理，只要至少找到一个点 $\xi\in(a,b)$，使它满足 $f(x)\leqslant f(\xi)$（或 $f(x)\geqslant f(\xi)$）即可，并且由定理第一个条件可知，连续函数在闭区间上必有最大值和最小值，所以只要证明在开区间(a,b)内能取到最大值或最小值即可.

证　由于 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，根据最大值最小值定理，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必有最大值 M 和最小值 m，这样，只有下面两种可能的情形：

(1) 当 $M=m$ 时，$f(x)\equiv M$，所以 $\forall\,\xi\in(a,b)$，都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 当 $M>m$ 时，因为 $f(a)=f(b)$，则 M 和 m 中至少有一个不是端点值，即 M 和 m 中至少有一个与 $f(a)$不相等. 不妨设 $M\neq f(a)$，则在开区间(a,b)内必有一点 ξ，使得 $f(\xi)=M$. 因此，$\forall\,x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant f(\xi)$，于是由费马引理得 $f'(\xi)=0$.

同理可证 $m\neq f(a)$的情形.

注 1　罗尔定理的几何意义是：如果光滑曲线 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$在两个端点处函数值相等，则在曲线上至少有一点处的切线是水平的，如图 3.1.2 所示.

注 2　罗尔定理条件缺一不可.

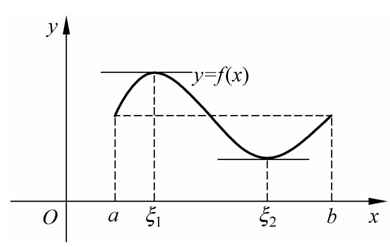

图　3.1.2

例如，$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处不连续，不满足罗尔定理的第一个条件，$f(x)$在$(0,1)$内的导数恒等于 1，不满足罗尔定理的结论；

函数 $f(x)=|x|$，$x\in[-1,1]$在 $x=0$ 处不可导，不满足罗尔定理的第二个条件，$f(x)$在$(-1,1)$内没有导数为零的点，不满足罗尔定理的结论；

函数 $f(x)=x$，$x\in[0,1]$在端点处函数值不相等，不满足罗尔定理的第三个条件，$f(x)$在$(0,1)$内的导数恒等于 1，不满足罗尔定理的结论.

注 3　罗尔定理的三个条件只是罗尔定理结论的充分条件，不是必要条件，即满足罗尔定理的结论不一定满足罗尔定理的条件.

例如,函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & -1\leqslant x\leqslant 1\\(x-3)^2, & 1<x\leqslant 5\end{cases}$ 在$[-1,5]$上不满足罗尔定理的三个条件,但是当 $x=3\in(-1,5)$时,$f'(3)=0$,满足罗尔定理的结论.

罗尔定理在讨论方程根的情况时用处较多,比如下面的例子.

例 1　证明方程 $x^3+x-1=0$ 在开区间$(0,1)$内只有一个实根.

证　(1) 证明方程有实根.

不妨假设

$$f(x)=x^3+x-1$$

则 $f(x)$在$[0,1]$连续,且 $f(0)\cdot f(1)=-1<0$. 由零点定理可知,至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f(\xi)=0$$

(2) 证明实根的唯一性.

(反证法)不妨假设函数 $f(x)$在$(0,1)$内有两个实根 $x_1=a$,$x_2=b$ 且 $a<b$.

由于 $f(x)$在$[a,b]\subset(0,1)$上连续,在(a,b)内可导,$f(a)=f(b)=0$. 利用罗尔定理可知,在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f'(\xi)=0.$$

这与 $f'(x)=3x^2+1\neq 0$ 矛盾,说明方程只能有一个实根.

3.1.2　拉格朗日中值定理

在罗尔定理中,条件 $f(a)=f(b)$很特殊,一般函数不满足这个条件. 而拉格朗日中值定理就是将这个条件去掉,即将罗尔定理的几何图形 3.1.2 旋转得到图 3.1.3,则在开区间(a,b)内至少存在一点处的切线与两端点所在的直线平行,由此得到拉格朗日中值定理的结论.

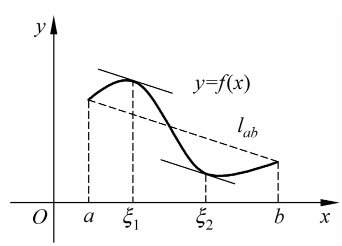

图　3.1.3

定理 3.1.2(拉格朗日中值定理)　设函数 $f(x)$满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) 在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

分析　易知拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广,所以要证明拉格朗日中值定理,很自然的想法是构造一个辅助函数使得它满足罗尔定理,借助罗尔定理来证明拉格朗日中值定理. 从图 3.1.3 中很容易发现,函数 $y=f(x)$与直线 l_{ab} 在端点$(a,f(a))$,$(b,f(b))$处的函数值相等. 同时直线 l_{ab}的方程为

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

将 $F(x)=f(x)-g(x)$ 作为辅助函数，则 $F(a)=F(b)=0$ 满足罗尔定理第三个条件.

证　作辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

因为 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，所以 $F(x)$ 满足条件：在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$F(a)=F(b)$.

由罗尔定理得，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

所以

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

注 1　该定理的辅助函数也可设为 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

注 2　$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为**拉格朗日中值公式**. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 表示函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上整体变化的平均变化率，$f'(\xi)$ 表示开区间 (a,b) 内某点 ξ 处函数的局部(瞬时)变化率. 于是，拉格朗日中值公式反映了可导函数在 $[a,b]$ 上整体平均变化率与在 (a,b) 内某点 ξ 处函数的局部(瞬时)变化率的关系. 因此，拉格朗日中值定理是联结局部与整体的纽带.

为了便于应用，拉格朗日中值公式常写成以下几种形式：

(1) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$；

(2) $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$，$0<\theta<1$；

(3) 若令 $\Delta x=b-a$，上式还可变形为

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1$$

这个公式称为**有限增量公式**. 它准确地表达出函数在一个区间上的增量与函数在该区间内某点处的导数之间的关系.

拉格朗日中值定理在微分学中占有重要地位，在某些问题中，当自变量 x 取得有限增量 Δx 而需要函数增量的准确表达式时，拉格朗日中值定理就突显出其重要价值.

注　类似于罗尔定理，拉格朗日中值定理中的两个条件同样是缺一不可，否则定理的结论可能不成立.

例如，函数 $f(x)=|x|$，$x\in[-1,1]$ 在 $x=0$ 处不可导，则该函数的图形在 $x\in$

$(-1,1)$内没有平行于连接两端点直线的切线；函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处不连续，不满足闭区间上函数连续的条件，该函数的图形在 $x\in(0,1)$内任一点处的切线都不平行于两端点的连线.

由拉格朗日中值定理还可以得到两个重要结论.

推论 3.1.1　若函数 $f(x)$在区间 I 内有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$在 I 内为常数.

证　在区间 I 上任取两点 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

由于函数 $f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上连续，在开区间(x_1,x_2)内可导，利用拉格朗日中值定理得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

由条件知 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即

$$f(x_2)=f(x_1)$$

因为 x_1,x_2 是区间 I 上的任意两点，所以 $f(x)$在区间 I 内为常数.

推论 3.1.2　若函数 $f(x)$在区间 I 内处处有 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)-g(x)=C$ (C 为任意常数).

例 2　证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证　设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$x\in[-1,1]$，则该函数在$[-1,1]$上连续，且在$(-1,1)$内有

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

由推论 3.1.1 可得 $f(x)=C$，$x\in(-1,1)$. 不妨选取 $x=0$，则

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

即 $C=\frac{\pi}{2}$，且 $f(-1)=f(1)=\frac{\pi}{2}$，所以

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

例 3　证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

分析　将$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 两端同时除以 x 得

$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$$

上式可变形为

$$\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}<1$$

可以看出，式中$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}$与拉格朗日中值定理结论形式一致.

证　设 $f(t)=\ln(1+t)$，该函数在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件，所以存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)$$

由于 $f(0)=0, f'(x)=\frac{1}{1+x}$，则

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{1+\xi}$$

即

$$\ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}x$$

因为 $0<\xi<x$，所以 $1<1+\xi<1+x$，于是

$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$$

则

$$\frac{x}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}x<x$$

故

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

3.1.3　柯西中值定理

从拉格朗日中值定理可以得到，在开区间(a,b)内至少存在一点处的切线与两端点所在的直线平行. 现假设函数 $Y=Y(X)$由参数方程

$$\begin{cases}X=F(x)\\Y=f(x)\end{cases}\quad(a\leqslant x\leqslant b)$$

表示，如图 3.1.4 所示，其中 x 为参数. 那么曲线上点(X,Y)处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

过端点直线斜率为

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

那么根据拉格朗日中值定理结论得，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

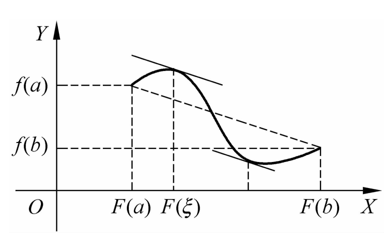

图　3.1.4

与这一事实相对应的是下述定理.

定理 3.1.3（柯西中值定理）　设函数 $f(x)$和 $F(x)$满足

（1）在闭区间$[a,b]$上连续；

（2）在开区间(a,b)内可导；

（3）$F'(x)\neq 0, x\in(a,b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

分析　要证$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$，即要证

$$[f(b)-f(a)]F'(\xi)-[F(b)-F(a)]f'(\xi)=0$$

所以我们希望构造一个辅助函数 $\varphi(x)$，使得它满足

$$\varphi'(\xi)=[f(b)-f(a)]F'(\xi)-[F(b)-F(a)]f'(\xi)$$

容易想到 $\varphi(x)=[f(b)-f(a)]F(x)-[F(b)-F(a)]f(x)$.

证　作辅助函数

$$\varphi(x)=[f(b)-f(a)]F(x)-[F(b)-F(a)]f(x)$$

由于 $f(x)$和 $F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，所以 $\varphi(x)$满足条件：在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，$\varphi(a)=\varphi(b)$.

由罗尔定理可知，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使

$$\varphi'(\xi)=[f(b)-f(a)]F'(\xi)-[F(b)-F(a)]f'(\xi)=0 \qquad (3.1.1)$$

对于函数 $F(x)$，利用拉格朗日中值定理，至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使得

$$F'(\eta)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

又由于 $F'(x)\neq 0, x\in(a,b)$，所以 $F(b)-F(a)\neq 0$，因此(3.1.1)式也可写成

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$$

注 1　定理证明中的辅助函数也可仿效拉格朗日中值定理的辅助函数进行构造，即

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)]$$

注 2　在定理中取 $F(x)=x$，结果就是拉格朗日中值定理的结论，因此拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况，柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

以上三个中值定理因其在微分学中的重要地位，通常也将它们统称为**微分中值定理**. 微分中值定理建立了函数增量、自变量增量与导数之间的联系. 函数的许多性质可用自变量增量与函数增量的关系来描述，因此可用微分中值定理来研究函数变化的性质.

例 4　证明 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

分析　原式容易变形为$\dfrac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}>1$，而

$$\frac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}=\frac{(1+x)\ln(1+x)-(1+0)\ln(1+0)}{\arctan x-\arctan 0}$$

与柯西中值定理的形式是一致的.

证　令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，$g(x)=\arctan x$，则

$$f'(x)=1+\ln(1+x),\quad g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

由于 $f(x)$，$g(x)$满足柯西中值定理的条件，则

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\frac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}=\frac{1+\ln(1+\xi)}{\dfrac{1}{1+\xi^2}}=[1+\ln(1+\xi)](1+\xi^2)$$

因为 $\xi\in(0,x)$，所以$[1+\ln(1+\xi)](1+\xi^2)>1$，故

$$\frac{(1+x)\ln(1+x)}{\arctan x}>1$$

又由 $x>0$，则

$$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$$

习题 3-1

1．验证罗尔定理对函数 $y=\ln\sin x$ 在区间$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$上的正确性.

2．验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间$[0,1]$上的正确性.

3．验证柯西中值定理对函数 $f(x)=x^3+2x^2$，$g(x)=x^2+2$ 在区间$[0,2]$上的正确性.

4．设 $f(x)=(x-2)(x+1)(x+2)(x+3)$，证明 $f'(x)=0$ 有三个实根.

5．设$\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$，证明方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在$(0,1)$内至少有一个实根.

6．设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使等式

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

成立.

7．证明下列等式：

（1）当 $x>0$ 时，$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$；

（2）当 $x\geqslant 1$ 时，$\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

8．证明下列不等式：

（1）$|\arcsin x-\arcsin y|\geqslant|x-y|$；

（2）$|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

（3）当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$；

（4）当 $a>b>0$，$n>1$ 时，$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$；

（5）当 $x>1$ 时，$e^x>e\cdot x$.

9．证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}=f'(\xi)$$

（提示：利用辅助函数 $F(x)=[f(x)-f(a)](b-x)$.）

3.2　洛必达法则

在第 1 章学习无穷小的比较时我们已经知道，当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，如果 $f(x)$，$g(x)$ 都是无穷小量或无穷大量，那么它们之比的极限可能存在，也可能不存在. 通常将这种极限称为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 求此类极限不能直接运用商的极限运算法则. 现在介绍解决这类极限问题的一种简便而重要的方法——洛必达法则. 它是以导数为工具来研究未定式极限的重要方法，而柯西中值定理是建立洛必达法则的理论依据.

3.2.1　$\dfrac{0}{0}$ 型未定式

定理 3.2.1　设 $f(x)$，$g(x)$ 满足

（1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；

（2）$f(x)$，$g(x)$ 在点 a 的某去心邻域 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大，

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上述定理给出的这种在一定条件下通过对分子、分母分别先求导,再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.

证　因为极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$是否存在与 $f(a)$与 $g(a)$的取值无关,故可补充定义

$$f(a)=g(a)=0$$

于是由条件(1)可得

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

所以函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 a 处连续.又由条件(2)可得函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 a 的某去心邻域 $\mathring{U}(a)$内连续,所以函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 a 的某一邻域内是连续的.

取 $x\in\mathring{U}(a)$,易知函数 $f(x)$与 $g(x)$在以点 a 及 x 为端点的闭区间上满足柯西中值定理的三个条件,因此存在 ξ(ξ 在 a 与 x 之间),使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

由于 ξ 在 a 与 x 之间,根据夹逼准则,$x\to a$ 时 $\xi\to a$,所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\quad(\text{或 }\infty)$$

注　若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$仍为$\dfrac{0}{0}$型,只要满足定理条件,可以继续使用洛必达法则,即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

并可以依次类推.

例 1　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$.

解　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\sin x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}$.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

对于 $x\to a^+$,$x\to a^-$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$情形的$\dfrac{0}{0}$型未定式,也有相应的洛必达法则.例如,当 $x\to\infty$时,有如下定理.

定理 3.2.2　设 $f(x)$,$g(x)$满足

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$;

(2) 对于充分大的$|x|$,$f'(x)$和 $g'(x)$都存在且 $g'(x)\neq 0$;