第3章

留数及其应用

留数是复变函数中特有的概念，它在复变函数论和其他实际问题中都有重要应用.

3.1 留数与留数定理

定义 3.1 设 z_0 是 $f(z)$的孤立奇点，即 $f(z)$在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 内解析，$f(z)$在此邻域内的洛朗展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n. \tag{3.1}$$

设 L 是 $0<|z-z_0|<\delta$ 内包含 z_0 的任意一条简单闭曲线，对式(3.1)两边积分，得

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}C_{-1},$$

称

$$C_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L f(z)\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$在 z_0 的留数(也称为残数)，记为 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$或 $\mathrm{Res}(f,z_0)$.

从上述定义可以知道，如果 z_0 是 $f(z)$的可去奇点，那么 $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$.

定理 3.1(留数定理) 设 D 是在复平面上的一个有界区域，其边界是一条或有限条简单闭曲线 C. 设 $f(z)$在 D 内除去有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外，在每一点都解析，并且它在 C 上每一点都解析，那么有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k), \tag{3.2}$$

这里沿 C 的积分按关于区域 D 的正向取.

证明 以 D 内每一个孤立奇点 z_k 为心，作圆 γ_k，使以它为边界的闭圆盘上每一点都在 D 内，并且使任意两个这样的闭圆盘彼此无公共点. 从 D 中除去以这些 γ_k 为边界的闭圆盘的一个区域 G，其边界是 C 以及 γ_k，在 G 及其边界所组成的闭区域 $\overline{G}$ 上，$f(z)$解析. 因此根

据柯西定理，有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z,$$

这里沿 C 的积分是按关于区域 D 的正向取的，沿 γ_k 的积分是按反时针方向取的. 根据留数的定义，定理的结论成立.

3.2 留数的计算

3.2.1 一级极点的情形

方法1 设 z_0 是 $f(z)$的一个一级极点. 因此在去掉中心 z_0 的某一圆盘内($z\neq z_0$)，

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$在这个圆盘内包括 $z=z_0$ 解析，其泰勒级数展开式是

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n\,(z-z_0)^n, \tag{3.3}$$

而且 $C_0=\varphi(z_0)\neq 0$. 显然，在 $f(z)$的洛朗级数中，$\dfrac{1}{z-z_0}$的系数等于 $\varphi(z_0)$，因此

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z), \tag{3.4}$$

如果容易求出 $\varphi(z)$的泰勒级数展开式(3.3)，那么由此可得 $\mathrm{Res}(f,z_0)=C_0$.

方法2 如果在上述去掉中心 z_0 的圆盘内($z\neq z_0$)，有

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

其中 $P(z)$及 $Q(z)$在这圆盘内包括在 $z=z_0$ 解析，$P(z_0)\neq 0$，z_0 是 $Q(z)$的一级零点，并且 $Q(z)$在这圆盘内没有其他零点，那么 z_0 是 $f(z)$的一级极点，因而

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)-Q(z_0)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \tag{3.5}$$

例3.1 函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}$有两个一级极点 $z=\pm\mathrm{i}$. 这时

$$\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{1}{2z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},$$

因此 $\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=-\dfrac{\mathrm{i}}{2\mathrm{e}}$，$\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}$.

3.2.2 高级极点的情形

方法1 设 z_0 是 $f(z)$的一个 k 级极点($k>1$). 这就是说，在去掉中心 z_0 的某一圆盘内($z\neq z_0$)，

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$在这个圆盘内包括 $z=z_0$ 解析，而且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 在这个圆盘内，$\varphi(z)$的泰勒级数展开式是

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\,(z-z_0)^n,$$

由此可见

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=C_{k-1}. \tag{3.6}$$

因此问题转化为求 $\varphi(z)$ 的泰勒级数展开式的系数.如果容易求出 $\varphi(z)$ 的泰勒级数展开式,那么用式(3.6)即可.

方法 2　从上面的讨论可知

$$C_{k-1}=\frac{\varphi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!},$$

因此,还可根据下列公式计算 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]$:

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{k-1}[(z-z_0)^k f(z)]}{\mathrm{d}z^{k-1}}. \tag{3.7}$$

例 3.2　函数 $f(z)=\dfrac{\sec z}{z^3}$ 在 $z=0$ 有三级极点,则

$$\varphi(z)=\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\cdots,$$

因此 $\mathrm{Res}(f,0)=\dfrac{1}{2}$.

由公式(3.7)也可得

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(z^3\cdot\frac{\sec z}{z^3}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 3.3　函数 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z\,(z^2+1)^2}$ 在 $z=\mathrm{i}$ 有二级极点.这时

$$\varphi(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z\,(z+\mathrm{i})^2}.$$

令 $z=\mathrm{i}+t$,那么在

$$h(t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\mathrm{i})}}{(\mathrm{i}+t)\,(2\mathrm{i}+t)^2}$$

的泰勒展开式中,t 的系数就是 $f(z)$ 在 i 的留数.写出 $h(t)$ 中每个因子到 t 的一次项,当 $|t|<1$ 时,有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{-1}(1+\mathrm{i}t+\cdots),\qquad \frac{1}{\mathrm{i}+t}=\frac{-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}t}=-\mathrm{i}(1+\mathrm{i}t+\cdots),$$

$$\frac{1}{(2\mathrm{i}+t)^2}=-\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mathrm{i}t}{2}\right)^2}=-\frac{1}{4}(1+\mathrm{i}t+\cdots),$$

因此当 $|t|<1$ 时,$h(t)=\dfrac{\mathrm{i}}{4\mathrm{e}}(1+3\mathrm{i}t+\cdots)$,于是 $\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=-\dfrac{3}{4\mathrm{e}}$.

由公式(3.7)也可得

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z+\mathrm{i})^2}\right]=-\frac{3}{4\mathrm{e}}.$$

3.3 无穷远点处的留数

设 $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$的去心邻域 $R<|z|<+\infty$内解析，L 为 $R<|z|<+\infty$的一条逆时针方向的简单闭曲线，则 $f(z)$在 $z=\infty$处的留数定义为

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L^-} f(z)\mathrm{d}z=-C_{-1},$$

其中 C_{-1} 为 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内洛朗展开式 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}C_n z^n$ 中 z^{-1} 的系数.

定理 3.2(**扩充复平面上的留数定理**) 如果函数 $f(z)$在 z 平面只有有限多个孤立奇点(包括无穷远点)，记为 $z_1,z_2,\cdots,z_n,\infty$，则 $f(z)$在所有孤立奇点处的留数和为零.

证明 以原点为中心做圆周 L，使 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 皆含于L 的内部，则由留数定理有

$$\int_L f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k),$$

两边除以 $2\pi i$，并移项得

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

亦即

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)+\operatorname{Res}(f,\infty)=0. \tag{3.8}$$

必须注意，虽然 $f(z)$它在的有限可去奇点 z_0 处，必有 $\operatorname{Res}(f,z_0)=0$，但是如果无穷远点$z=\infty$为 $f(z)$的可去奇点(或解析点)，则 $\operatorname{Res}(f,\infty)$可以不为零. 例如 $f(z)=2+\dfrac{1}{z}$以 $z=\infty$为可去奇点，但 $\operatorname{Res}(f,\infty)=-1\neq0$.

下面是 $\operatorname{Res}(f,\infty)$的另一计算公式.

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$$

证明 令 $\xi=\dfrac{1}{z}$，于是 $\varphi(\xi)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)=f(z)$，且无穷远的去心邻域 $R<|z|<+\infty$变成原点的去心邻域 $0<\xi<\dfrac{1}{R}$；圆周 L：$|z|=\rho>R$(参数方程为 $z=\rho e^{i\theta}$)变成圆周 C：$|\xi|=\lambda=\dfrac{1}{\rho}<\dfrac{1}{R}$(参数方程为 $\xi=\dfrac{1}{\lambda}e^{i\alpha}$，$\alpha=-\theta$). 于是

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty]&=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi}f(\rho e^{i\theta})i\rho e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{\lambda}e^{-i\alpha}\right)i\,\frac{1}{\lambda}e^{-i\alpha}\mathrm{d}(-\alpha)=-\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{\lambda}e^{-i\alpha}\right)i\,\frac{1}{\lambda^2}e^{-2i\alpha}\mathrm{d}(\lambda e^{i\alpha})\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_L f\left(\frac{1}{\xi}\right)\frac{1}{\xi^2}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

所以

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right]. \tag{3.9}$$

例 3.4 求下列函数在无穷远处的留数：

(1) $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$；　　　　(2) $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$.

解　(1) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$存在且有界，$z=\infty$为可去奇点，

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{3+2z}{1+2z},0\right]=0.$$

(2) **方法 1**　因为当 $1<|z|<+\infty$时，

$$f(z)=\frac{z}{1-z}=\frac{-1}{1-\dfrac{1}{z}}=-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right),$$

所以 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=1$.

方法 2

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{\dfrac{1}{z}}{1-\dfrac{1}{z}}\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-1)z^2},0\right]=1.$$

例 3.5　求 $f(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}$的所有奇点及对应的留数.

解　**方法 1**　因为

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\frac{1}{n!}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{n-4},$$

所以 $z=0$ 是 $f(z)$的三级极点，且

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=C_{-1}=-\frac{4}{3}.$$

方法 2　因为 0 是分子的一级零点，是分母的四级零点，所以 0 是 $f(z)$的三级极点，取 $m=3$，应用公式(3.7)，得

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(z^3\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}\right)''=-\frac{4}{3},$$

于是 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\dfrac{4}{3}$.

下面举几个用 Maple 软件计算留数的例子.

例 1　计算复变函数 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$在各孤立奇点处的留数.

解　Maple 工作过程如下：

```
> readlib(residue):
> z := 'z':
> f := (3·z + 2)/(z^2·(z + 2));
f := (3z + 2)/(z^2 (z + 2))
> solve(denom(f));
```

```
0,0,-2
> residue(f,z=0);residue(f,z=-2);
1; -1.
```

例 2 求复变函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$的孤立奇点和各孤立奇点处的留数.

解

> readlib(residue):

> z := 'z':

> f := $\dfrac{1}{(z^4+1)}$;

f := $\dfrac{1}{z^4+1}$

> a := abs(-1);b := argument(-1);

a := 1, b := π

>for i from 0 to 3 do k[i] := $a^{\left(\frac{1}{4}\right)}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{(2\cdot Pi\cdot i+b)}{4}\right)+I\cdot\sin\left(\dfrac{(2\cdot Pi\cdot i+b)}{4}\right)\right)$;r[i] := residue (f,z=k[i]);end do

$k_0 := \dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}I\sqrt{2}, r_0 := \dfrac{1}{-2\sqrt{2}+2I\sqrt{2}}$;

$k_1 := -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}I\sqrt{2}, r_1 := \dfrac{1}{2\sqrt{2}+2I\sqrt{2}}$;

$k_2 := -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}I\sqrt{2}, r_2 := -\dfrac{1}{-2\sqrt{2}+2I\sqrt{2}}$;

$k_3 := \dfrac{1}{2}\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}I\sqrt{2}, r_3 := -\dfrac{1}{2\sqrt{2}+2I\sqrt{2}}$.

例 3 求复变函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin^5 z}$在孤立奇点 $z=0$ 处的留数.

解 $f(z)$在 $z=0$ 处的留数等于函数在 $z=0$ 的某个去心邻域洛朗展开式中 z^{-1}项的系数 C_{-1},于是先求其洛朗展开式:

> g := sin(z):

> series$\left(\dfrac{z^2}{g^5}, z=0\right)$;

$z^{-3}+\dfrac{5}{6}z^{-1}+\dfrac{3}{8}z+\dfrac{367}{3024}z^3+O(z^5)$

从而知 $\mathrm{Res}[f(z),0]=\dfrac{5}{6}$.

3.4 留数在定积分计算中的应用

留数定理可以用来计算某些类型的实函数积分.应用留数定理计算实变函数定积分的方法称为围道积分方法.所谓围道积分方法,概括起来说,就是将实函数的积分化为复变函数沿围线的积分,然后应用留数定理,使沿围线的积分计算归结为留数计算.要使用留数计算,需要两个条件:一是被积函数与某个解析函数有关;其次,定积分可化为某个沿闭路的

积分.现就几个特殊类型举例说明.

3.4.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分

这里 $R(\cos\theta,\sin\theta)$ 是 $\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数,作为 θ 的函数,在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 上连续.

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则 $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$,且

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},\quad \cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

当 θ 经历变程 $[0,2\pi]$ 时,对应的 z 正好沿单位圆 $|z|=1$ 的正向绕行一周,于是 $f(z)=\frac{1}{\mathrm{i}z}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)$ 在积分闭路 $|z|=1$ 上无奇点,因此

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta&=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\&=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].\end{aligned}\tag{3.10}$$

例 3.6 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a+\sin t}$,其中常数 $a>1$.

解 令 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=z$,那么 $\sin t=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)$,$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$,而且当 t 从 0 增加到 2π 时,z 按逆时针方向绕圆 $C:|z|=1$ 一周.因此

$$I=\int_C\frac{2\mathrm{d}z}{z^2+2\mathrm{i}az-1},$$

于是应用留数定理,只需计算 $\frac{2}{z^2+2\mathrm{i}az-1}$ 在 $|z|<1$ 内极点处的留数,就可求出 I.

上面的被积函数有两个极点:$z_1=-\mathrm{i}a+\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$ 及 $z_2=-\mathrm{i}a-\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}$.显然 $|z_1|<1$,$|z_2|>1$.因此被积函数在 $|z|<1$ 内只有一个极点 z_1,而它在这点的留数是

$$\mathrm{Res}(f,z_1)=\frac{2}{2z_1+2\mathrm{i}a}=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}}.$$

于是求得

$$I=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

例 3.7 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}$.

解 令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos\theta}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{\mathrm{i}(3z^2+10z+3)}\mathrm{d}z\\&=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{1}{(3z+1)(z+3)}\mathrm{d}z\\&=\frac{2}{\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例 3.8 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$.

解 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}=\oint_{|z|=1}\dfrac{2}{\left(2+\sqrt{3}\cdot\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$

$$=\frac{4}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z}{(4z+\sqrt{3}z^2+\sqrt{3})^2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{3\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{\left(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)^2}.$$

由于分母有两个根 $z_1=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,$z_2=-\sqrt{3}$,其中$|z_1|<1$,$|z_2|>1$,因此

$$I=\frac{4}{3\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\left(z^2+\frac{4}{\sqrt{3}}z+1\right)^2},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=4\pi.$$

例 3.9 求$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2}$的值,其中 $0<p<1$.

解 令 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=z$,则

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2}=\frac{-1}{\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{pz^2-(p^2+1)z+p}=\frac{-1}{\mathrm{i}p}\int_C\frac{\mathrm{d}z}{\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}.$$

由于 $0<p<1$,故在$|z|\leqslant 1$ 内,被积函数只有一个极点 $z=p$,于是

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2}=\frac{-1}{\mathrm{i}p}\cdot 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)},p\right]$$

$$=\frac{-2\pi}{p}\lim_{z\to p}\left[(z-p)\frac{1}{\left(z-\frac{1}{p}\right)(z-p)}\right]=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

3.4.2 形如$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\mathrm{d}x$ 的积分

先给出一个引理.

引理 3.1 设 C 的方程为 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,函数 $f(z)$在 C 上连续,且$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$,则

$$\lim_{|z|=R\to\infty}\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

证 因为$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=0$,故对任给的 $\varepsilon>0$,当$|z|=R$ 充分大时,有

$$|zf(z)|=|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|<\varepsilon,$$

于是

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{\pi}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta\right|\leqslant\int_0^{\pi}|f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\mathrm{d}\theta<\pi\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{|z|=R\to\infty}\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$.

定理 3.3 设 $R(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}=\dfrac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}(m-n\geqslant 2)$,并且满足:

(1) $Q(z)$比 $P(z)$至少高两次;

(2) $Q(z)$在实轴上无零点；

(3) $R(z)$在上半平面 $\mathrm{Im}z>0$ 内的极点为 $z_k(k=1,2,\cdots,l)$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Res}[R(z),z_k]. \tag{3.11}$$

证　作以 O 为心、r 为半径的圆盘。考虑这一圆盘在上半平面的部分，设其边界为 C_r。C_r 和实线段$[-r,r]$组成封闭曲线 C 作为积分曲线(参见图 3.1)其中 r 要充分大使得 $R(z)$ 在上半平面内所有极点都包含在 C 内部。

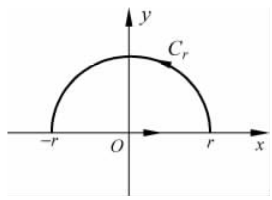

图　3.1

根据留数定理得

$$\oint_C R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Res}[R(z),z_k],$$

即 $\displaystyle\int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$.

由于 $Q(z)$比 $P(z)$的次数至少高两次，所以

$$\lim_{z\to\infty} zR(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{zP(z)}{Q(z)} = 0.$$

由引理 3.1，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z = 0$. 所以$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$.

例 3.10　计算 $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$.

解　取 $f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}=\dfrac{z^2}{(z^2-z+1)(z^2+z+1)}$，孤立奇点为 $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_4=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，其中落在上半平面的为 z_1,z_2，因此

$$I = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[f(z),z_k] = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

例 3.11　计算 $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x(z>0)$.

解　取 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$，它在上半平面只有一个二级极点 $a\mathrm{i}$，因此

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2},a\mathrm{i}\right]= 2\pi\mathrm{i}\cdot\left[\frac{z^2}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]'\Bigg|_{z=a\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2a}.$$

3.4.3　形如$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$ 的积分

引理 3.2(若尔当引理)　设函数 $g(z)$在半圆周 Γ_R：$z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$R$ 充分大)上连续，且$\displaystyle\lim_{R\to+\infty} g(z)=0$ 在 Γ_R 上一致成立，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z = 0,\quad m>0. \tag{3.12}$$

证明　$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,R_0(\varepsilon)>0$，使当 $R>R_0(\varepsilon)$时，有$|g(z)|<\varepsilon$，$z\in\Gamma_R$，于是

$$\left|\int_{\Gamma_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant R\varepsilon\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{3.13}$$

这里利用了$|g(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|<\varepsilon$，$|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}|=R$ 以及$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}mR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}|=|\mathrm{e}^{-mR\sin\theta+\mathrm{i}mR\cos\theta}|=\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}$.

于是由若尔当不等式$\frac{2\theta}{\pi}\leqslant\sin\theta\leqslant\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$将式(3.13)化为

$$\left|\int_{\Gamma_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z\right| \leqslant 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-mR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant 2R\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2mR\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta$$

$$= 2R\varepsilon\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2mR}{\pi}\theta}}{\frac{2mR}{\pi}}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{m}(1-\mathrm{e}^{-mR}) < \frac{\pi\varepsilon}{m},$$

即$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z = 0$.

定理 3.4 设$g(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$,其中$P(z)$和$Q(z)$是互质多项式,并且满足条件:

(1) $Q(z)$的次数比$P(z)$的次数高;

(2) 在实轴上$Q(z)\neq0$;

(3) $m>0$.

则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}a_k>0}\mathrm{Res}[g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k]. \tag{3.14}$$

特别地,将式(3.14)分开实部、虚部,就可以得到形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,\mathrm{d}x$$

的积分.

证 因为$Q(z)$比$P(z)$次数高,所以$\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=0$.由引理3.2,有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\mathrm{d}z = 0.$$

从而$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{\mathrm{Im}a_k>0}\mathrm{Res}[g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k]$,或者

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos mx\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin mx\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}a_k>0}\mathrm{Res}[g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},a_k].$$

所以要计算积分$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$或$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$,只需求出$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$的实部或虚部即可。

例 3.12 计算$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$.

解 不难验证,函数$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-2z+10}$满足若尔当引理条件.这里$m=1$,$g(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}$,函数有两个一级极点$z=1+3\mathrm{i}$及$z=1-3\mathrm{i}$,

$$\mathrm{Res}[f(z),1+3\mathrm{i}] = \left.\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2-2z+10)'}\right|_{z=1+3\mathrm{i}} = \frac{(1+3\mathrm{i})\mathrm{e}^{-3+\mathrm{i}}}{6\mathrm{i}},$$

于是

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{(1+3\mathrm{i})\mathrm{e}^{-3+\mathrm{i}}}{6\mathrm{i}}$$