第1章

直 线 与 圆

本章导读

直线与圆是平面解析几何中最简单、最基本的两个图形.由于它们具有很多良好的几何性质,所以很多题目都可以结合直线和圆的相关知识进行考查.因此我们将直线与圆放在本书的第 1 章,就是希望大家通过对本章的学习,为后面部分的学习打下牢固的基础.

本章分为直线和圆两大部分.每一部分都是从课本上最基础的内容讲起,然后梳理各种题型及其应对方法.但从考情来看,这部分知识在真正高考中很少单独出现.之所以会出现这样的情况,是因为数学是一个不可分割的整体,前后的逻辑非常紧密.而高考命题的原则之一就是注重知识的综合性,多在知识的交汇处设计题目.正如前文所述,这部分的很多知识方法都是为第 4 章圆锥曲线解答题做准备.因此如果缺少了这些知识和方法,在后面详解圆锥曲线解答题的时候,大家就可能对某些方法和技巧感到突兀.

因此,为了更好地为后面的关键部分建立一个很好的基础,在直线部分,我们补充讲解了直线的方向向量、法向量、倒点斜式以及倒斜截式等非常重要的知识点.方向向量和法向量是直线两个非常重要的量.方向向量对于我们第 5 章学习直线的参数方程非常重要.而法向量可以帮助我们很轻松地推导出点到直线的距离公式,而点到直线的距离公式是线性规划中一种非常重要的目标函数.倒点斜式和倒斜截式对应着圆锥曲线解答题设列(设变量,列方程)中一种很重要的方法——“反设直线”.在圆中,补充讲解了直径圆、阿波罗尼斯圆等.这些知识也非常重要.比如直径圆将会是我们第 4 章圆锥曲线解答题中一个非常重要的专题.同时,直径圆与向量问题也有密不可分的联系.

所以大家一定要以认真踏实的态度来学习这部分知识,这样才能为解析几何的学习开个好头,从而为后续学习奠定一个坚实的基础.我相信大家已经跃跃欲试了,那我们就打起十二分精神进入第 1 章的学习吧,加油!我相信这些知识对于你们来说是很简单的.

1.1 直线的倾斜角和斜率

1.1.1 知识点：直线的倾斜角

1. 直线倾斜角的定义.

(1) 动态角度：在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线 l，如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到与直线 l 重合时所转过的最小正角记为 α，那么 α 就叫作直线 l 的倾斜角.

(2) 静态角度：在平面直角坐标系中，对于一条与 x 轴相交的直线 l，则 x 轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 就叫作直线 l 的倾斜角.

2. 直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 $0°$.

3. 直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

1.1.2 知识点：直线的斜率

1. 定义：直线 l 的倾斜角 α 的正切值叫作直线的斜率. 斜率通常用小写字母 k 来表示，即 $k=\tan\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$. 对于 $P_1, P_2\in l$，且 P_1 点坐标为 (x_1, y_1)，P_2 点坐标为 (x_2, y_2)，则直线 l 斜率 k 还可表示为 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$. 即 $k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

2. 当直线垂直于 x 轴$\left(\text{倾斜角 }\alpha=\frac{\pi}{2}\right)$时，斜率不存在. 解决具体问题时一定不要忘记考虑这种情形.

1.1.3 知识点：斜率的求解方法

1. 公式法(斜率定义)：$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$.

2. 方向向量法：直线的方向向量为 $\vec{n}=(1,k)$. 即在方向向量的坐标表示中，纵坐标即为直线斜率.

3. 方程读取法：从直线的斜截式和点斜式方程里可以直接读取直线的斜率.

4. 导数法：导数的几何意义为切线的斜率.

5. 点差法(有心二次曲线的垂径定理)：对于椭圆和双曲线，点 M 为弦 AB 的中点，则有 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

第一节的知识点到这里就学完了，是不是觉得很基础？但大家千万不可以掉以轻心，数学是一个不可分割的整体，我们在学习斜率的时候也一定要联想到其他板块的知识. 如果你们感觉到几个求斜率的方法有点陌生，那也不必担忧，在接下来的例题和练习中我们会给大家展示如何运用这些方法解决问题. 如果你们准备好了，那我们就开始吧！

1.1.4 例题解析

【例 1.1.1】 若一条直线经过 $A(0,0)$，$B(1,\sqrt{3})$ 两点，则直线 AB 的斜率是________.

【解析】 由斜率公式可得 $k_{AB}=\frac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了斜率的计算公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$. 需要大家理解并熟记公式.

【例 1.1.2】 一条直线与向量$\vec{u}=(\sqrt{2},\sqrt{6})$平行，则该直线的倾斜角为________.

【解析】 由题意可知，向量$\vec{u}=(\sqrt{2},\sqrt{6})$为直线的一个方向向量，但从向量$\vec{u}=(\sqrt{2},\sqrt{6})$中并不能直接读出直线的斜率. 因此我们要把它转化为$\vec{n}=(1,k)$的形式，由此易得直线的另一个方向向量为$\vec{v}=\dfrac{\vec{u}}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)=(1,\sqrt{3})$. 显然直线的斜率为$\sqrt{3}$. 从由斜率的定义可得直线的倾斜角为$60°$.

【点评】 本题考查了利用直线的方向向量求斜率的知识点. 但需要注意的是一定要先将直线方向向量的横坐标变为1.

【例 1.1.3】 (2013·新课标Ⅰ理)已知椭圆E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F(3,0)$，过点$F$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点. 若$A$，$B$的中点坐标为$(1,-1)$，则$E$的方程为(　　).

A. $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

【解析】 椭圆焦点为$F(3,0)$，所以$c=3$，即$a^2-b^2=9$①. 假设弦AB中点为M. 根据有心二次曲线的垂径定理(点差法的结论)可得$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{a^2}$. 而$k_{OM}=\dfrac{-1-0}{1-0}=-1$，$k_{AB}=k_{MF}=\dfrac{-1-0}{1-3}=\dfrac{1}{2}$. 因此$-1\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，即$a^2=2b^2$②. 联立①式和②式解得$a^2=18$，$b^2=9$. 故$E$的方程为$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$，即答案选D.

【点评】 本题是点差法求斜率的逆向问题. 主要考查了椭圆的标准方程、斜率公式以及中点坐标公式等基础知识. 但解决本题的关键是垂径定理.

【例 1.1.4】 (2004·重庆改编)已知曲线$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3}$，求在点$P(2,4)$处切线的斜率.

【解析】 因为导数的几何意义为切线的斜率，所以$y'=x^2$. 在$x=2$处的导数值为4. 因此切线的斜率为4.

【点评】 本题考查了利用导数的几何意义求解直线的斜率的知识点.

【例 1.1.5】 (2013·安徽理)函数$y=f(x)$的图像如图1-1-1所示，在区间$[a,b]$上可找到$n(n\geqslant 2)$个不同的数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得$\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$，则$n$的取值范围是(　　).

A. $\{3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{2,3\}$

【解析】 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$可以写成$\dfrac{f(x_1)-0}{x_1-0}=\dfrac{f(x_2)-0}{x_2-0}=\cdots=\dfrac{f(x_n)-0}{x_n-0}$，由斜率的计算公式$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$可知，$n$个点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$\cdots$，$(x_n,f(x_n))$与原点连线的斜率相同. 因此这$n$个点共线，即经过原点的直线与曲线$y=f(x)$交于$n$个点. 由函数$y=f(x)$的图像可知，经过原点的直线与曲线$y=f(x)$能有2个，3个，或者4个交点，所以选B.

【点评】 本题看似很难，实则很简单. 考查的核心知识点为斜率的计算公式.

【例 1.1.6】 (2012·北京理)某棵果树前n年的总产量S_n与n之间的关系如图1-1-2所示，从目前记录的结果看，前m年的平均产量最高，m的值为(　　).

A. 5　　B. 7　　C. 9　　D. 11

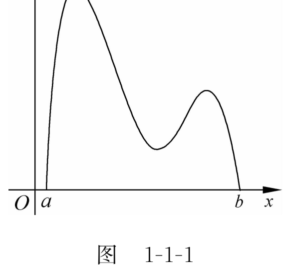


图　1-1-1

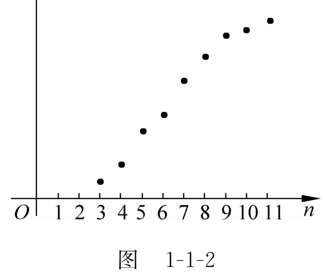


图　1-1-2

【解析】 由题意可知，$\frac{S_n}{n}$为前 n 年的平均产量. 而$\frac{S_n}{n}=\frac{S_n-0}{n-0}$，不妨设在 m 年处产量最高，也即 m 在坐标系中的坐标为(n,S_n)，则$\frac{S_n}{n}=\frac{S_n-0}{n-0}=k_{OM}$. 由此可知，分别连接散点图中各点与原点，连线斜率最大的即为点 $m_9(9,S_9)$. 由此可知前 9 年的平均产量最高. 故 $m=9$，所以本题选 C.

【点评】 本题与上一题如出一辙. 但本题为实际问题，而且没有直接给出$\frac{S_n}{n}$这个对解题至关重要的分式，而是通过对实际问题的描述间接地给出的. 这就需要大家认真读题，准确地理解题意，从而把题干中的信息转化为对我们解决问题有利的代数式. 大家一定要在平时的学习中注意锻炼这种从实际问题中提取数学模型的能力.

1.1.5 强化练习

【练习 1.1.1】 (2011 · 云南模拟)直线 $x=1$ 的倾斜角和斜率分别是(　　).

A. 90°，不存在　　B. 45°，1　　C. 135°，-1　　D. 180°，不存在

【解析】 直线 $x=1$ 垂直于 x 轴，故其倾斜角为 90°；因 $k=\tan\alpha$，由正切函数性质可知，$\alpha=90°$时，k 不存在；故选 A.

【点评】 本题重点考查了直线的倾斜角与斜率间的关系，属于基础题.

【练习 1.1.2】 (2016 春 · 肇东市校级期末)在下列四个命题中，正确的共有(　　).

① 坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角和斜率；

② 直线的倾斜角的取值范围是$[0,\pi]$；

③ 若一条直线的斜率为 $\tan\alpha$，则此直线的倾斜角为 α；

④ 若一条直线的倾斜角为 α，则此直线的斜率为 $\tan\alpha$.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

【解析】 在平面直角坐标系中，倾斜角为 90°的直线不存在斜率，故①不正确；直线的倾斜角 α 的取值范围是$[0,\pi)$，故②不正确；正切值为 $\tan\alpha$ 的角为 $\alpha+k\pi$，有无数个，而倾斜角只有 1 个，故③不正确；若这条直线的 $\alpha=90°$，则该直线不存在斜率，故④不正确. 综上，本题选 A.

【点评】 本题重点考查了直线的倾斜角与直线斜率之间的关系，属于基础题，难度较小但易错.

【练习 1.1.3】 (2012 秋 · 西固区期末)如果直线 l 过(1,2)点，且不通过第四象限，那么 l 的斜率的取值范围是(　　).

A. $[0,1]$　　B. $[0,2]$

C. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $(0,3]$

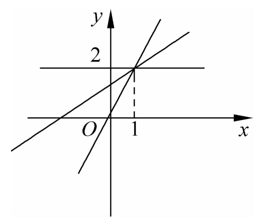


图 1-1-3

【解析】 如图 1-1-3 所示，在直角坐标系中找到(1,2)，由题意可知直线 l 经过该点但不经过第四象限，通过对图像的观察可以知道，当 l 经过原点时为斜率的最大值，斜率为 2；将直线 l 顺时针旋转至与 x 轴平行时为斜率最小值，斜率为 0. 故选 B.

【点评】 本题重点考查了确定直线位置的几何因素的知识点，用到的数学思想是数形结合思想，难度不高，属于基础题.

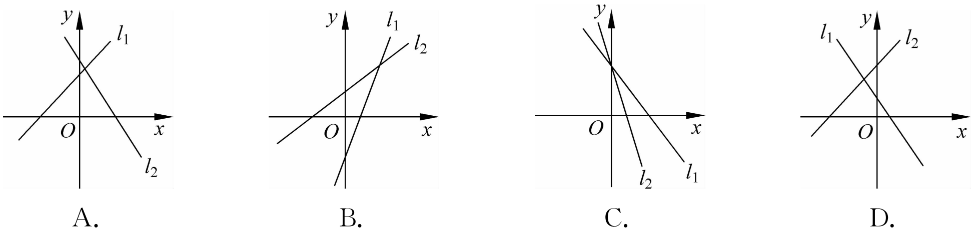
【练习 1.1.4】 (2014 秋 · 龙南县校级期末)经过点 $P(0,-1)$作直线 l，若直线 l 与连接 $A(1,-2)$，$B(2,1)$的线段总有公共点，则直线 l 的倾斜角 α 的范围为________.

【解析】 根据题意分析得：经过点 $P(0,-1)$的直线 l 处于直线 PA 与直线 PB 之间，因此 k_l 在 k_{PA} 与 k_{PB} 之间. 故首先计算直线 PA 与直线 PB 的斜率，即 $k_{PA}=\frac{-2-(-1)}{1-0}=-1$，$k_{PB}=\frac{1-(-1)}{2-0}=1$. 由于直线 l 的斜率 $k_{PA}\leqslant k\leqslant k_{PB}$，即$-1\leqslant k\leqslant 1$，再由斜率计算公式 $k=\tan\alpha$，根据正切函数的性质计算

α 的取值范围，解得 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

【点评】 本题重点考查了直线倾斜角的取值范围，直线与另一直线或曲线相交的题型属于热门题型，难度系数中等.

【练习 1.1.5】 (2016 春・龙华区期末)已知直线 l_1 的方程是 $ax-y+b=0$，l_2 的方程是 $bx-y-a=0(ab\neq0,a\neq b)$，则下列选项中，正确的是(　　).



【解析】 通过题干的描述，求解两直线的斜率分别为 a,b，两直线与 y 轴的交点坐标分别为 $(0,b)$，$(0,-a)$，通过观察四个图像的特点判断 a,b 大小关系，确定符合题意的选项即可.

A 项中，直线 l_1：$a>0,b>0$ 直线 l_2：$a<0,b<0$，彼此矛盾；B 项中，直线 l_1：$a>0,b<0$ 直线 l_2：$a>0,b>0$，彼此矛盾；C 项中，直线 l_1：$a<0,b>0$ 直线 l_2：$a<0,b<0$，彼此矛盾；D 项中，直线 l_1：$a<0,b>0$ 直线 l_2：$a<0,b>0$，符合题意；故选 D.

【点评】 本题主要考查了直线的倾斜角、斜率与图像间的联系，同时考查了学生分类思想以及对图像的分析能力，属于基础题.

1.2　直线的方程

1.2.1　知识点：点斜式与斜截式

1. 在平面直角坐标系中，过一个定点的直线有无数条. 而一旦倾斜角确定，则直线也就只有唯一确定的一条. 设倾斜角为 $\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$时，直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，且其斜率为 k. 由上述分析可得，此时该直线就确定了. 假设该直线上任意一点为 $P(x,y)$，根据 1.1 节讲过的斜率计算公式可得 $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ $(x_1\neq x_2)$，即 $y-y_0=k(x-x_0)$. 这就是直线的方程. 这个求直线方程的过程类似于在圆锥曲线中求解动点的轨迹方程. 该直线是由已知点加斜率确定的，因此将其称为直线的点斜式方程. 特别是当直线经过的定点为$(0,m)$时，由点斜式可得 $y-m=k(x-0)$，即 $y=kx+m$. 这便是直线的斜截式方程，其中的 m 称作直线的(纵)截距.

2. 从斜截式和点斜式可以直接读取直线的斜率.

3. 点斜式和斜截式可以表示斜率存在(不垂直于 x 轴)的任何直线.

1.2.2　知识点：两点式与截距式

两点式方程来源于“两点确定一条直线”这个公理. 设直线经过 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$不同两点. 由斜率公式可得 $k_{P_1P_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2)$，从而由点斜式可得直线方程 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. 即 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$，这就是直线的两点式方程. 同点斜式一样，特别是当直线经过的两点位于坐标轴上时. 不妨将这两点坐标设为$(a,0)$，$(0,b)$，且二者都不与原点重合，这样由两点式可得直线方程为$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$，即$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，其中 b,a 分别称为直线的纵截距和横截距，该方程称为直线的

截距式方程.两点式不适用于直线与坐标轴平行(垂直)的情形,而截距式作为两点式的特殊情形也不适用于直线与坐标轴平行(垂直)的情形,并且当直线经过坐标原点时,截距式也不适用.

1.2.3 知识点：倒点斜式与倒斜截式

1. 倒点斜式：类似于点斜式,我们把 $x-x_0=m(y-y_0)$ 叫作直线的倒点斜式,其中 $m=\frac{1}{k}(k\neq 0)$.特别是当直线经过的定点位于 x 轴时,不妨设其坐标为 $(n,0)$,由倒点斜式可得直线方程为 $x=my+n$,这就是直线的倒斜截式.在斜截式中,常数项 b 表示的是直线在 y 轴上的截距,即纵截距.而在此方程中,常数项 n 表示的是直线在 x 轴上的截距,即横截距.此方程我们经常称之为"反设直线".这种方程在我们解决圆锥曲线的一些问题(如开口向左或向右的抛物线等)时可以简化计算过程.倒点斜式与倒斜截式不能表示与 y 轴垂直的直线.

2. 倒点斜式与倒斜截式可以与点斜式与斜截式对比理解.

1.2.4 知识点：一般式

在坐标平面中,任意一条直线都可以用一个关于 x,y 的二元一次方程来表示.因此我们把 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ 称为直线的一般式方程.一般式方程往往是用来解决点到直线的距离和两平行线之间距离的问题.一般式方程可以表示坐标平面内任意一条直线.

【注】 在以上方程中所指的"截距"并非距离,横截距指的是直线与横轴交点的横坐标,而纵截距指的是直线与纵轴交点的纵坐标.

1.2.5 知识点：方向向量与法向量

1. 方向向量：与直线平行的非零向量就叫作直线的方向向量.

(1) 对于点斜式和斜截式,直线的一个方向向量为 $\vec{n}=(1,k)$,单位方向向量为 $\vec{i}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$.

(2) 对于一般式 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$,直线的一个方向向量为 $\vec{n}=\left(1,-\frac{A}{B}\right)$.根据方向向量的定义可知直线的方向向量有无数个.因此,为了简单,我们取一般式下直线的方向向量为 $\vec{m}=B\vec{n}=(B-A)$.同样,此时直线的单位方向向量为 $\vec{j}=\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}=\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.

2. 法向量：与直线垂直的非零向量叫作直线的法向量.

(1) 对于点斜式和斜截式,直线的一个法向量为 $\vec{p}=(-k,1)$,单位法向量为 $\vec{k}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}=\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2+1}},\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)$.

(2) 对于一般式,直线的一个法向量为 $\vec{q}=(A,B)$.对应的,此时直线的单位法向量为 $\vec{h}=\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.

以上是关于直线方程部分,都是非常基础的知识,需要大家熟练掌握.接下来我们通过例题和练习来达到掌握的目的.请同学们打起精神,我们准备开始了!

1.2.6 例题解析

【例 1.2.1】 (2011·安徽)在平面直角坐标系中,如果 x,y 都是整数,就称点 (x,y) 为整点,下列

命题中正确的是________(写出所有正确命题的编号).

① 存在这样的直线,既不与坐标轴平行,又不经过任何整点;

② 如果 k 与 b 都是无理数,则直线 $y=kx+b$ 不经过任何整点;

③ 直线 l 经过无穷多个整点,当且仅当 l 经过两个不同的整点;

④ 直线 $y=kx+b$ 经过无穷多个整点的充分必要条件是 k 与 b 都是有理数;

⑤ 存在恰经过一个整点的直线.

【解析】 如果该直线为 $y=x+\frac{1}{2}$,由整点的定义可知直线 $y=x+\frac{1}{2}$ 满足命题①,因为该命题的逻辑语言为"存在",所以命题①正确;若取该直线 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$,则该直线经过整点(1,0),所以命题②错误;③直线 $y=kx$ 经过原点,若此直线上有两个整点 (x_1,y_1),(x_2,y_2),则有 $y_1=kx_1$,$y_2=kx_2$,两式相加得 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)$.则有整点 (x_1+x_2,y_1+y_2) 在直线上,由此递推便可得有无数多个整点位于该直线上,因此命题③正确;对于命题④,当 $k=\frac{1}{2}$,$b=\frac{1}{3}$ 时,该直线不经过任何整点,由此可知该命题不成立,故命题④错误;对于命题⑤,假设直线 $y=kx$,当 k 取无理数时,该直线恰好仅过原点一个整点,因此成立.综上可得正确的命题是①、③、⑤.

【点评】 本题考查了命题的正确性和逻辑用语.说明一个命题为假命题只需列举一个反例即可.但是要判断一个命题正确,必须经过严格的逻辑推理证明才可以.

【例 1.2.2】 (2008·江苏)如图 1-2-1 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,设三角形 ABC 的顶点分别为 $A(0,a)$,$B(b,0)$,$C(c,0)$,点 $P(0,p)$ 是线段 AO 上的一点(异于端点),这里 a,b,c,p 为非零实数,设直线 BP,CP 分别与边 AC,AB 交于点 E,F,某同学已正确求得直线 OE 的方程为 $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$,请写出直线 OF 的方程:________.

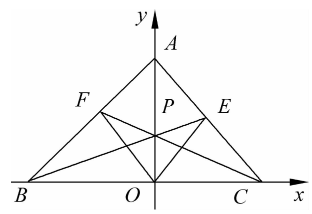


图 1-2-1

【解析】 由截距式可得直线 AB 的方程为 $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$,直线 CP 的方程为 $\frac{x}{c}+\frac{y}{p}=1$,两式相减得 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$,显然直线 AB 与 CP 的交点 F 满足此方程,而原点显然满足此方程,故此方程为所求直线 OF 的方程.

【点评】 本题考查了类比推理.对于类比推理,要找出共性和特性,然后据此合情推理.

【例 1.2.3】 (2018·新课标Ⅰ)设抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F,过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M,N 两点,则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【解析】 首先看到向量点积,一定要用到相关点的坐标.因此要联立方程,而本题中涉及的抛物线开口向右.因此根据我们讲解过的原则,本题显然要"反设直线(倒点斜式)".鉴于以上分析,不妨设直线方程为 $x-(-2)=\frac{3}{2}(y-0)$,即 $x=\frac{3}{2}y-2$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.联立抛物线方程 $y^2=4x$,可得 $y^2-6y+8=0$,解得 $y_1=2$,$y_2=4$.从而 $x_1=1$,$x_2=4$.所以 $M(1,2)$,$N(4,4)$.而抛物线焦点显然为 $F(1,0)$.所以 $\overrightarrow{FM}=(0,2)$,$\overrightarrow{FN}=(3,4)$.即 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=8$.故选 D.

【点评】 本题主要考查了抛物线的基本知识、反设直线(倒点斜式)、向量数量积的坐标求法.此外,本题还可以"设而不求",利用韦达定理整体代入求解,这也不失为一种解题的好方法,学生可以自行尝试.

【例 1.2.4】 (2016·广西模拟)经过点 $P(0,2)$,且斜率为 2 的直线方程为(　　).

A. $2x+y+2=0$　　B. $2x-y-2=0$　　C. $2x-y+2=0$　　D. $2x+y-2=0$

【解析】 将题中点 P 坐标以及直线斜率代入点斜式公式 $y-y_0=k(x-x_0)$,解得直线方程为

$2x-y+2=0$，故选 C.

【点评】 本题主要考查了直线的点斜式方程，直接给出公式所需条件，属于基础题，重在公式运用，一般不会出现在考试中.

【例 1.2.5】 （2011·上海）若直线 l 过点(3,4)，且(1,2)是它的一个法向量，则直线 l 的方程为________.

【解析】 直线的法向量为(1,2)，根据法向量的性质可得直线的方向向量为(−2,1)，则直线的斜率为$-\frac{1}{2}$. 再根据题中给出的点(3,4)结合直线的点斜式方程，解得直线方程为 $x+2y-11=0$.

【点评】 本题重点考查了直线的点斜式方程以及向量的几何应用，比较综合，属于基础题.

【例 1.2.6】 （2010·广东模拟）经过点 $P(1,4)$的直线在两坐标轴上的截距都是正值，且截距之和最小，则直线的方程为(　　).

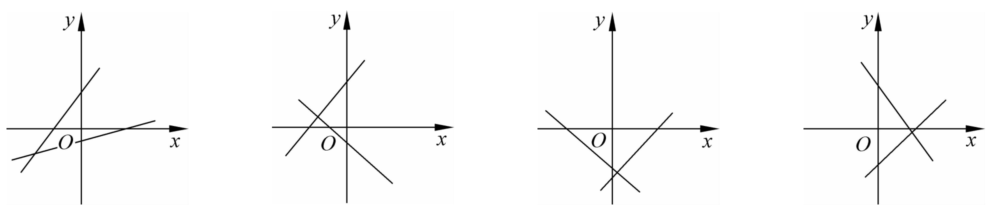
A. $x+2y-6=0$　　B. $2x+y-6=0$　　C. $x-2y+7=0$　　D. $x-2y-7=0$

【解析】 根据题中提到的截距选用直线的截距式来求解直线方程，设直线的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a>0,b>0)$. 将点 P 坐标代入得$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$，由于 $a+b=(a+b)\times 1$，所以 $a+b=(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$，当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$，即 $a=3,b=6$ 时取等号. 根据题意截距和最小，故直线方程为 $2x+y-6=0$，故选 B.

【点评】 本题重点考查了直线的截距式方程以及均值不等式.

1.2.7　强化练习

【练习 1.2.1】 （2017 春·阿拉善期末）方程 $y=ax+b$ 和 $y=bx+a$ 表示的直线可能是(　　).



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

【解析】 根据题意及图像，逐项分析：

A 选项，设上方直线为 y_1，则 $a>0,b>0$；下方直线为 y_2，则 $b>0,a<0$，两者矛盾，故 A 项不正确；

B 选项，设上方直线为 y_1，则 $a>0,b>0$；下方直线为 y_2，则 $b<0,a<0$，两者矛盾，故 B 项不正确；

C 选项，设左方直线为 y_1，则 $a<0,b<0$；右方直线为 y_2，则 $b>0,a<0$，两者矛盾，故 C 项不正确；

D 选项，设上方直线为 y_1，则 $a<0,b>0$；下方直线为 y_2，则 $b>0,a<0$，符合题意，故选 D.

【点评】 本题重点考查直线斜截式方程与其图像间关系，这是近几年的热点题型，难度不高，属于基础题.

【练习 1.2.2】 （2017·上海模拟）如果过点 $P(1,0)$，$Q(2,0)$，$R(4,0)$，$S(8,0)$四个点各作一条直线，所得四条直线恰围成正方形，则该正方形的面积不可能为(　　).

A. $\frac{16}{17}$　　B. $\frac{36}{5}$　　C. $\frac{64}{37}$　　D. $\frac{196}{53}$

【解析】 根据题意，如果过点 $P(1,0)$，$Q(2,0)$，$R(4,0)$，$S(8,0)$作四条直线构成一个正方形，过 P 点的直线必须和过 Q，R，S 点的其中一条直线平行且和另外两条直线垂直.

假设过 P 点和 Q 点的直线相互平行时，如图 1-2-2 所示：设直线 PC 与 x 轴正方向的夹角为 θ，再过点 Q 作它的平行线 QD，过点 R，S 作它们的垂线 RB，SC，过点 A 作 x 轴的平行线分别交 PC，SC

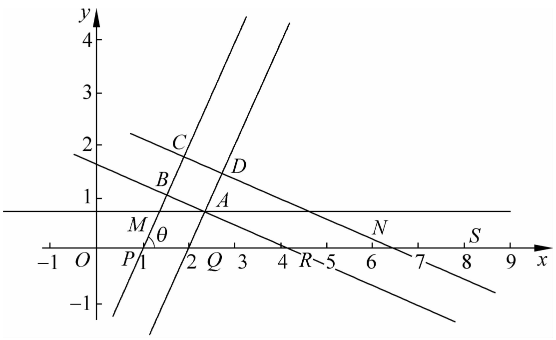


图　1-2-2

于点 M,N,则 $|AB|=|AM|\sin\theta=|PQ|\sin\theta=\sin\theta$,$|AD|=|AN|\cos\theta=|RS|\cos\theta=4\cos\theta$. 因为 $AB=AD$,所以 $\sin\theta=4\cos\theta$,则 $\tan\theta=4$,所以正方形 $ABCD$ 的面积 $|AB|\cdot|CD|=4\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{4\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{16}{17}$.

同理可求,当直线 PC 和过 R 的直线平行时,正方形 $ABCD$ 的面积为 $\dfrac{36}{5}$；当直线 PC 和过 S 点的直线平行时正方形 $ABCD$ 的面积为 $\dfrac{196}{53}$. 综上,本题选 D.

【点评】 本题重点考查了直线的两点式方程与同角三角函数以及数形结合思维,比较综合,难度适中.

【练习 1.2.3】 (2017・清城模拟)经过点 $A(1,2)$ 并且在两个坐标轴上截距的绝对值相等的直线方程为(　　).

A. $y=2x$,或 $x-y+1=0$　　B. $y=2x$,或 $x+y-3=0$

C. $x+y-3=0$,或 $x-y+1=0$　　D. $y=2x$,或 $x+y-3=0$,或 $x-y+1=0$

【解析】 根据题意,若要使直线在两坐标轴上截距的绝对值相等,存在三种情况：①截距为 0,直线过原点：$y=2x$；②直线斜率为 1,直线方程：$x-y+1=0$；③斜率为 -1,直线方程：$x+y-3=0$. 综上所述,直线方程为 $y=2x$ 或 $x+y-3=0$ 或 $x-y+1=0$. 故选 D.

【点评】 本题主要考查了应用待定系数法求解直线的一般式方程,属于基础题. 本题难点在于解题时容易忽略其中一种到两种情况,从而导致丢失分数.

【练习 1.2.4】 (2017・徐汇模拟)若点 $M\left(a,\dfrac{1}{b}\right)$,$N\left(b,\dfrac{1}{c}\right)$ 都在直线 l：$x+y=1$ 上,则点 $P\left(c,\dfrac{1}{a}\right)$,$Q\left(\dfrac{1}{c},b\right)$ 和 l 的关系是(　　).

A. P 和 Q 都在 l 上　　B. P 和 Q 都不在 l 上

C. P 在 l 上,Q 不在 l 上　　D. P 不在 l 上,Q 在 l 上

【解析】 根据题意,点 M,N 在直线上,故点的坐标是直线方程的解,则有 $a+\dfrac{1}{b}=1$,$b+\dfrac{1}{c}=1$,通过消元化简可以得到 $c+\dfrac{1}{a}=1$,$b+\dfrac{1}{c}=1$,故 P,Q 在直线上,故选 A.

【点评】 本题重点考查了直线的一般式方程及其性质,属于基础题.

1.3　两直线的位置关系

1.3.1　知识点：两直线的位置关系

在平面内两条直线只有两种位置关系：平行、相交.

根据1.2节所学知识，我们了解到可以通过直线的方程以及斜率判断两直线的位置关系，如表1-3-1所示.

表 1-3-1　两直线位置关系

表达形式	方程	相交	垂直	平行	重合
斜截式	$y=k_1x+b_1$ $y=k_2x+b_2$	$k_1\neq k_2$	$k_1k_2=-1$	$k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$	$k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$
一般式	$A_1x+B_1y+C_1=0$ $(A_1^2+B_1^2\neq 0)$ $A_2x+B_2y+C_2=0$ $(A_2^2+B_2^2\neq 0)$	$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 当 $A_2B_2\neq 0$ 时，记为$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$	$A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ 当 $B_1B_2\neq 0$ 时，记为$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=-1$	$A_1B_2-A_2B_1=0$ $B_2C_1-B_1C_2\neq 0$ 或 $A_1B_2-A_2B_1=0$ $A_2C_1-A_1C_2\neq 0$ 当 $A_2B_2C_2\neq 0$ 时，记为$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$	$A_1=\lambda A_2$ $B_1=\lambda B_2$ $C_1=\lambda C_2(\lambda\neq 0)$ 当 $A_2B_2C_2\neq 0$ 时，记为$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

【注】 两直线位置关系，统分为两大类，即两直线在同一平面内、两直线异面；当两直线处于同一平面内时，两直线位置关系为平行、相交(特殊情况为垂直)，此时可根据上一节所讲的直线方程进行判断；当两直线不在同一平面内时，两直线位置关系为异面，“直线异面”不属于平面解析几何，此处不做介绍，在立体几何部分详细解析.

1.3.2　知识点：坐标公式与距离公式

1. 线段的中点坐标公式：线段的端点为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则线段 P_1P_2 的中点坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

2. 三角形的重心坐标公式：三角形三个顶点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则$\triangle ABC$ 的重心为 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

3. 两点间的距离公式：对于 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 两点，则两点间的距离为$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

4. 点到直线的距离公式：已知点 $P_0(x_0,y_0)$，直线 l：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$，则点 P_0 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 除教材介绍的推导方法外，还可以利用1.2节介绍的直线的单位法向量以及向量内积的几何表述来简便地得到该公式的证明. 由此我们也可以看到向量作为一个工具的巨大力量.

5. 两平行线的距离：两条平行直线 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$，由前面介绍过的两直线位置关系易得这两条直线相互平行，则两条平行直线之间的距离为 $d'=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

1.3.3　知识点：直线系

我们把具有一定共同特点的一类直线统称为一个直线系. 对于“系”这个概念大家可以用“物以类聚”这个成语来理解. 后续学习圆锥曲线时我们还要学习曲线系. 在直线部分，分为平行直线系、交点直线系、垂直直线系、圆的包络线等.

1. 经过某一定点 $P(x_0,y_0)$ 的直线(除直线 $x=x_0$ 外)系方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$. 这也就是我们介绍的点斜式.

2. 与直线 $Ax+By+C=0(y=kx+m)$ 平行的直线系为 $Ax+By+C'=0(y=kx+m')$.

3. 与直线 $Ax+By+C=0(y=kx+m)$ 垂直的直线系为 $Bx-Ay+C'=0\left(y=-\frac{1}{k}x+m'\right)$.

4. 经过两相交直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系(除 l_2 外)方程为 $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

1.3.4 例题解析

【例 1.3.1】 (2012·浙江)设 $a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行”的(　　).

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】 当 $a=1$ 时，直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 显然平行，故充分性成立；若两条直线平行，由两条直线的条件可得 $\frac{a}{1}=\frac{2}{a+1}$，解得 $a=1$ 或 $a=-2$. 因此必要性不成立. 综上可得为充分不必要条件，故选 A.

【点评】 本题考查了两直线的位置关系中的平行关系在一般式方程下的代数表达以及逻辑用语中充分条件和必要条件的判断.

【例 1.3.2】 (2008·江苏)直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 90°，再向右平移 1 个单位，所得到的直线为(　　).

A. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$　　　　B. $y=-\frac{1}{3}x+1$

C. $y=3x-3$　　　　D. $y=\frac{1}{3}x+1$

【解析】 根据题意直线 $y=3x$ 绕原点逆时针旋转 90°，故所得直线的斜率为 $-\frac{1}{3}$，向右平移 1 个单位，根据向右平移，移动对象为 x，故所得直线为 $y=-\frac{1}{3}(x-1)$，整理得 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$，故选 A.

【点评】 本题主要考查了两直线垂直的判定以及直线平移，属于综合题，难度一般.

【例 1.3.3】 (2007·天津)“$a=2$”是“直线 $ax+2y=0$ 平行于直线 $x+y=1$”的(　　).

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】 由两条直线平行的充要条件为 $a=2$ 可得. 故选 C.

【点评】 本题考查了两直线的位置关系中的平行关系在一般式方程下的代数表达以及逻辑用语中充分条件和必要条件的判断.

【例 1.3.4】 (2014·上海)已知 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$ 是直线 $y=kx+1$(k 为常数)上两个不同的点，则关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1\\a_2x+b_2y=1\end{cases}$ 的解的情况是(　　).

A. 无论 k,P_1,P_2 如何，总是无解　　　　B. 无论 k,P_1,P_2 如何，总有唯一解

C. 存在 k,P_1,P_2，使之恰有两解　　　　D. 存在 k,P_1,P_2，使之有无穷多解

【解析】 直线 $y=kx+1$ 显然经过 $(0,1)$ 不经过原点，点 P_1,P_2 在直线 $y=kx+1$ 上，所以 $\overrightarrow{OP_1}$ 与 $\overrightarrow{OP_2}$ 一定不平行，即 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. 所以两直线为相交的位置关系，即两条直线有一个公共点，也即方程组一定有且仅有一解. 故选 B.

【点评】 本题表面上考查的是二元一次方程组的解，实际上考查的是两直线的位置关系，其中渗透着数形结合的思想.

【例 1.3.5】 (2009·上海)已知直线 l_1：$(k-3)x+(4-k)y+1=0$ 与 l_2：$2(k-3)x-2y+3=0$ 平行,则 k 的值是(　　).

A. 1 或 3　　　　B. 1 或 5　　　　C. 3 或 5　　　　D. 1 或 2

【解析】 根据题意,两直线平行可知两直线斜率相等;注意斜率为 0 的情况.

当 $k-3=0$ 时,两直线方程分别为 $y=-1$ 和 $y=\frac{3}{2}$两直线平行;当 $k-3\neq 0$ 时,由一次项系数之比相等且不等于常数项之比,可得$\frac{k-3}{2(k-3)}=\frac{4-k}{-2}\neq\frac{1}{3}$,解得 $k=5$. 综上,$k=3$ 或 $k=5$. 故选 C.

【点评】 本题重点考查了直线的一般式方程以及直线的平行性质.

【例 1.3.6】 (2006·福建)如图 1-3-1 所示,连接$\triangle ABC$ 的各边中点得到一个新的$\triangle A_1B_1C_1$,又连接$\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到$\triangle A_2B_2C_2$,如此无限继续下去,得到一系列三角形:$\triangle ABC$,$\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$…这一系列三角形趋向于一个点 M. 已知 $A(0,0)$,$B(3,0)$,$C(2,2)$,则点 M 的坐标是________.

【解析】 如图 1-3-1 所示,根据题意,三角形重心坐标$\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$,连结$\triangle ABC$ 的各边中点得到一个新的$\triangle A_1B_1C_1$,又连结$\triangle A_1B_1C_1$ 的各边中点得到$\triangle A_2B_2C_2$,如此无限继续下去,得到一系列三角形:$\triangle ABC$,$\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$…因为这一系列三角形重心相同,趋向于一个点 M,则点 M 是$\triangle ABC$ 的重心,已知 $A(0,0)$,$B(3,0)$,$C(2,2)$,则 M 点的坐标为$\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$.

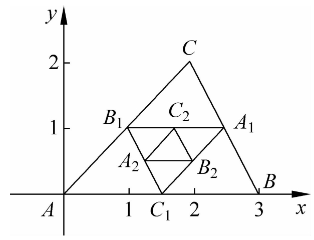


图 1-3-1

【点评】 本题重点考查了重心坐标公式和极限的思想方法.

【例 1.3.7】 (2017 春·东安区期末)已知直线方程 l_1:$2x-4y+7=0$,l_2:$x-2y+5=0$,则 l_1 与 l_2 的关系是(　　).

A. 平行　　　　B. 重合　　　　C. 相交　　　　D. 以上答案都不对

【解析】 根据题意,直线 l_1 的斜率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,直线 l_2 的斜率为$\frac{1}{2}$,两条直线的纵截距分别为$\frac{7}{4}$,$\frac{5}{2}$. 由斜率相等截距不等可知,直线 l_1 和直线 l_2 平行不重合,故选 A.

【点评】 本题主要考查了两直线平行的判定,根据斜率相等即可得到答案,属于基础题.

【例 1.3.8】 (2016·河西模拟)若直线 $2mx+y+6=0$ 与直线$(m-3)x-y+7=0$ 平行,则 m 的值为(　　).

A. -1　　　　B. 1　　　　C. 1 或-1　　　　D. 3

【解析】 根据题意,两直线平行,故两直线斜率相等,即 $m-3=-2m$,解得 $m=1$,验证两直线是否重合,根据 $6\neq 7$ 知两直线不重合,故 $m=1$ 时,两直线平行,故选 B.

【点评】 本题主要考查了两直线平行判定,根据平行得到斜率关系,从而得到结果,属于基础题.

1.3.5 强化练习

【练习 1.3.1】 (2015·天津模拟)"$ab=4$"是"直线 $2x+ay-1=0$ 与直线 $bx+2y-2=0$ 平行"的(　　).

A. 充分必要条件　　　　B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】 根据题意,两条直线平行则有斜率相等,即$-\frac{2}{a}=-\frac{b}{2}\Rightarrow ab=4$,因此必要性成立;注意

a,b 的取值，当 $a=1,b=4$ 时两直线重合，故充分性不成立.综上，“$ab=4$”为“直线 $2x+ay-1=0$ 与直线 $bx+2y-2=0$ 平行”的必要而不充分条件，故选 C.

【点评】 本题主要考查了两直线平行的判定以及命题成立条件，属于综合题，难度一般.两直线斜率相等包含两直线平行和重合两种位置关系.

【练习 1.3.2】 （2014・陈仓区校级一模）已知直线 l_1：$(k-3)x+(4-k)y+1=0$ 与 l_2：$2(k-3)x-2y+3=0$ 平行，则 k 的值是________.

【解析】 根据题意，两直线平行且 $k-3\neq 0$ 时，则有 $\dfrac{k-3}{2(k-3)}=\dfrac{4-k}{-2}\neq\dfrac{1}{3}$，解得 $k=5$；当 $k-3=0$ 即 $k=3$ 时也满足题意.综上，当两直线平行时，$k=3$ 或 $k=5$.

【点评】 本题主要考查了两直线平行的判定，属于基础题.

【练习 1.3.3】 （2015 春・大竹县期中）求 m 为何值时，这三条直线 l_1：$4x+y=4$，l_2：$mx+y=0$，l_3：$2x-3my=4$，不能构成三角形.

【解析】 根据题意，三条直线不能构成三角形时共有 4 种情况，即三条直线中有两条直线平行或者是三条直线经过同一个点，将这四种情况中实数 m 的值分别求出：

（1）当直线 l_1：$4x+y-4=0$ 平行于 l_2：$mx+y=0$ 时，$m=4$；

（2）当直线 l_1：$4x+y-4=0$ 平行于 l_3：$2x-3my-4=0$ 时，$m=-\dfrac{1}{6}$；

（3）当直线 l_2：$mx+y=0$ 平行于 l_3：$2x-3my-4=0$ 时，$-m=\dfrac{2}{3m}$，m 无解；

（4）当三条直线经过同一个点时，把直线 l_1 与 l_2 的交点 $\left(\dfrac{4}{4-m},\dfrac{-4m}{4-m}\right)$ 代入 l_3：$2x-3my-4=0$，得 $\dfrac{8}{4-m}-3m\cdot\dfrac{-4m}{4-m}-4=0$，解得 $m=-1$ 或 $\dfrac{2}{3}$.

综上可得，满足条件的 m 为 4 或 $-\dfrac{1}{6}$ 或 -1 或 $\dfrac{2}{3}$.

【点评】 本题重点考查了两直线位置关系与三角形的构成，属于综合题，难度一般.

【练习 1.3.4】 （2014・奎文区模拟）已知平行四边形的三个顶点 $A(-2,1)$，$B(-1,3)$，$C(3,4)$，求第四个顶点 D 的坐标.

【解析】 根据题意，四边形 $ABCD$ 构成平行四边形，则有以下可能情况：①AD 为平行四边形的对角线；②BD 为平行四边形的对角线；③CD 为平行四边形的对角线.因而利用中点坐标公式，即可求得 D 点坐标.

以①为例，AD 为平行四边形的对角线，BC 为另一条对角线，则两对角线交点即为中点.设 D 点坐标为 (x,y)，则有 $\left(\dfrac{-1+3}{2},\dfrac{3+4}{2}\right)=\left(\dfrac{-2+x}{2},\dfrac{1+y}{2}\right)$，解得 $x=4,y=6$，此时 D 点坐标为 $(4,6)$.同理，BD 为平行四边形的对角线时，D 点坐标为 $(2,2)$；CD 为平行四边形的对角线时，D 点坐标为 $(-6,0)$.综上，D 点坐标为 $(4,6)$，$(2,2)$，$(-6,0)$.

【点评】 本题考查了平行四边形对角线互相平分的几何性质以及中点坐标公式的知识点，属于基础题.

【练习 1.3.5】 （2017 春・新罗区月考）已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，若直线 $y=k(x-2)$ 上至少存在三个点 P，使得 $\triangle MNP$ 是直角三角形，则实数 k 的取值范围是（　　）.

A. $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\dfrac{1}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$

【解析】 根据题意，为使直线 $y=k(x-2)$ 上至少存在三个点 P，使得 $\triangle MNP$ 是直角三角形，则

此直线与以 MN 为直径的圆必须有公共点，但是去掉 x 轴. 则有 $\dfrac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$，$k\neq 0$，整理得 $0<k^2\leqslant\dfrac{1}{3}$，解得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，且 $k\neq 0$. 故选 D.

【点评】 本题主要考查了两直线垂直的应用与圆的相关知识结合，同时考查学生计算能力，难度中等. 本题虽然包含的知识点并不多，但思考的情况却容易忽视，比较考验学生的思维能力.

【练习 1.3.6】 (2017 春 · 钦南区期中)已知直线 $mx+4y-2=0$ 与直线 $2x-5y+n=0$ 互相垂直，垂足为 $(1,p)$，则 $m+n-p$ 等于(　　).

A. 0　　B. 4　　C. 20　　D. 24

【解析】 根据题中已知条件，两条垂直直线的斜率可求，解得斜率分别为 $-\dfrac{m}{4}$，$\dfrac{2}{5}$，再由垂直的判定公式 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$. 解得 $m=10$，故直线方程为 $5x-12y-1=0$，将垂足代入解得 $p=-2$，再将 $(1,-2)$ 代入第二个直线方程，解得 $n=-12$，则有 $m+n-p=0$，故选 A.

【点评】 本题主要考查了两直线垂直的判定，公式运用属于基础题.

【练习 1.3.7】 (2014 · 潍坊模拟)已知 $b>0$，直线 $b^2x+y+1=0$ 与 $ax-(b^2+4)y+2=0$ 互相垂直，则 ab 的最小值为________.

【解析】 根据题意以及两直线垂直的判定公式，可得 $(-b^2)\cdot\dfrac{a}{b^2+4}=-1$，解得 $a=\dfrac{b^2+4}{b^2}$，则有 $ab=\dfrac{b^2+4}{b^2}\cdot b=b+\dfrac{4}{b}\geqslant 2\sqrt{4}=4$. 故 ab 的最小值为 4.

【点评】 本题主要考查了两条直线垂直与倾斜角、斜率的关系. 本题在运算不等式时重点注意"一正二定三相等".

【练习 1.3.8】 (2017 春 · 黄陵)等腰直角三角形 ABC 的直角顶点为 $C(3,3)$，若点 A 的坐标为 $(0,4)$，则点 B 的坐标可能是(　　).

A. (2,0)或(4,6)　　B. (2,0)或(6,4)　　C. (4,6)　　D. (0,2)

【解析】 假设 B 点坐标 (x,y)，三角形 ABC 为等腰直角三角形，故 $AC\perp BC$，$AC=BC$，则有 $\dfrac{y-3}{x-3}\times\dfrac{4-3}{0-3}=-1$，$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(3-4)^2}$，化简得 $\begin{cases}3x-y-6=0\\(x-3)^2+(y-3)^2=10\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=6\end{cases}$，则点 B 的坐标是 $(2,0)$ 或 $(4,6)$，故选 A.

【点评】 本题重点考查了两直线垂直的应用、两点间距离公式以及直角坐标系下求点的坐标，比较综合，难度中等.

【练习 1.3.9】 (2015 · 丰台区二模)已知两点 $A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，如果在直线 $3x+4y+25=0$ 上存在点 P，使得 $\angle APB=90°$，则 m 的取值范围是________.

【解析】 根据题意，本题可采用向量方法求解. P 在直线 $3x+4y+25=0$ 上，设点 P 坐标为 $\left(x,\dfrac{-3x-25}{4}\right)$，则有 $\overrightarrow{AP}=\left(x+m,\dfrac{-3x-25}{4}\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(x-m,\dfrac{-3x-25}{4}\right)$；又因为 $\angle APB=90°$，有 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x+m)\cdot(x-m)+\left(\dfrac{-3x-25}{4}\right)^2=0$，即 $25x^2+150x+625-16m^2=0$；又因存在点 P，故 $\Delta\geqslant 0$，即 $150^2-4\times 25\times(625-16m^2)\geqslant 0$，解得 $m\geqslant 5$ 或 $m\leqslant -5$，根据 $m>0$，故 m 的取值范围是 $[5,+\infty)$.

【点评】 本题重点考查了两直线垂直判定以及平面向量的数量积，属于综合题，难度中等.

【练习 1.3.10】 (2016 秋 · 水富县校级月考)已知 $\triangle ABC$ 三边的方程为 AB：$3x-2y+6=0$，AC：$2x+3y-22=0$，BC：$3x+4y-m=0$.

(1) 判断三角形的形状；

(2) 当 BC 边上的高为 1 时，求 m 的值.

【解析】 (1) 根据题意，直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{3}{2}$，直线 AC 的斜率为 $k_{AC}=-\frac{2}{3}$所以 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$，所以直线 AB 与直线 AC 互相垂直. 因此，$\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2) 解方程组$\begin{cases}3x-2y+6=0\\2x+3y-22=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$. 即 A 坐标为(2，6). 由点到直线的距离公式得 $d=\frac{|3\times2+4\times6-m|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|30-m|}{5}$. 因为 $d=1$，所以$\frac{|30-m|}{5}=1$，即 $|30-m|=5$，解得 $m=25$ 或 $m=35$.

【点评】 本题主要考查了两直线位置关系的应用，比较综合，难度一般.

【练习 1.3.11】 (2006·湖南理)已知$\begin{cases}x\geqslant1\\x-y+1\leqslant0\\2x-y-2\leqslant0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的最小值是________.

【解析】 画出约束条件围成的平面区域的面积，由目标函数的几何意义可知目标函数即为原点到可行域内的点的距离的平方，数形结合后可确定可行域的端点 A 到原点的距离最小，求出距离，进而可求得目标函数的最小值.

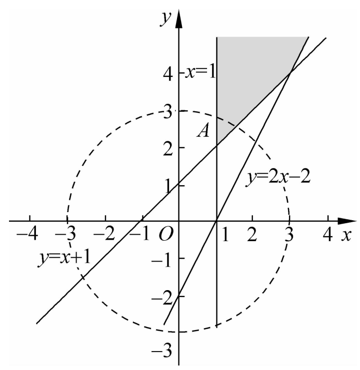


图　1-3-2

根据约束条件$\begin{cases}x\geqslant1\\x-y+1\leqslant0\\2x-y-2\leqslant0\end{cases}$确定可行域，如图 1-3-2 所示. 目标函数$z=x^2+y^2$ 的几何意义为可行域内的点(x,y)到原点 $O(0,0)$的距离的平方，通过数形结合可知，可行域的端点 A 到原点的距离最小，联立方程$\begin{cases}x-y+1=0\\x=1\end{cases}$得 A 点坐标为(1，2)，因此点 A 到原点 O 的距离为 $d=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$，即目标函数的最小值为 $d^2=(\sqrt{5})^2=5$.

【点评】 这是一道考查了线性规划与求两点间距离的题目，重点在于掌握目标函数的几何意义，将其视为定点到可行域内点的距离，也考查了数形结合及点到点距离的转化思想.

【练习 1.3.12】 (改编题)实数 x,y 满足不等式$\begin{cases}x-y+2\geqslant0\\2x-y-5\leqslant0\\x+y-4\geqslant0\end{cases}$，则 $z=|x+2y-4|$ 的最大值为________.

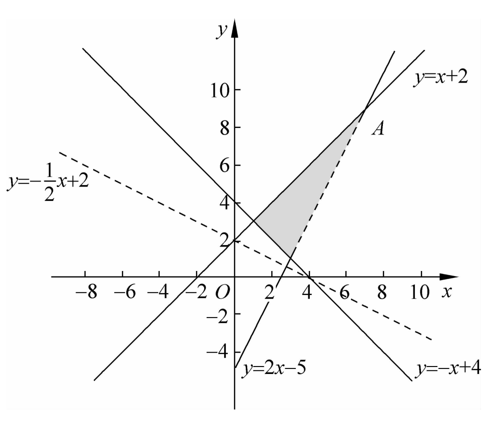


图　1-3-3

【解析】 画出约束条件围成的平面区域，变形目标函数为 $z=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，结合目标函数的几何意义，目标函数即为可行域内的点(x,y)到直线 $x+2y-4=0$ 距离的$\sqrt{5}$倍，通过数形结合可知，可行域的边界点 A 到该直线的距离最大，即目标函数为此距离的$\sqrt{5}$倍，从而可求得目标函数的最大值.

约束条件$\begin{cases}x-y+2\geqslant0\\2x-y-5\leqslant0\\x+y-4\geqslant0\end{cases}$确定的可行域如图 1-3-3 所

示，变形目标函数为 $z=\sqrt{5}\cdot\frac{|x+2y-4|}{\sqrt{5}}$，根据目标函数的几何意义，可视为可行域内的点$(x,y)$到直线 $x+2y-4=0$ 距离的$\sqrt{5}$倍，通过数形结合可知，可行域的端点 A 到直线$x+2y-4=0$ 的距离最大，联立方程$\begin{cases}x-y+2=0\\2x-y-5=0\end{cases}$，得 A 点坐标为$(7,9)$，因此点 A 到直线 $x+2y-4=0$ 的距离为 $d=\frac{|7+18-4|}{\sqrt{1+4}}=\frac{21}{\sqrt{5}}$，故 $z=|x+2y-4|$的最大值为 21，故填 21.

【点评】 这是一道线性规划与点到直线距离相结合的题目，重点在于如何将目标函数转化为可行域中的点到定直线的距离，考查了确定目标函数的几何意义及数形结合的思想.

1.3 节的学习就到此结束了，重点是同一平面内两直线的位置关系. 对于易错点（如斜率相等包含平行和重合两种位置关系），希望大家特别注意. 虽然在这部分学习了距离公式，但对于它们的考查却主要是在线性规划部分. 我们在此只给大家讲解了两道练习题. 到了后面线性规划部分我们会再详细讲解. 接下来我们就进入到 1.4 节对称（反射）问题的学习中吧！

1.4 对称（反射）问题

1.4.1 知识点：直线与点的对称问题

1. 中心对称：A 点坐标为(x_1,y_1)，B 点坐标为(x_2,y_2)，则利用中点坐标公式可得 AB 中点坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

2. 轴对称，可转化为求对称点，在求对称点时抓住以下两点：①两对称点的连线与对称轴垂直（两点连线斜率与已知直线斜率乘积等于-1）；②两对称点连线的中点在对称轴上.

1.4.2 知识点：直线关于直线对称问题

1. 两直线平行，则其斜率相等.
2. 两直线相交，先求出交点再选择公式求斜率.

1.4.3 知识点：光的反射定律在直线中的应用

1. 入射角等于反射角，镜面线与法线都是对称轴.
2. 当镜面线为坐标轴的时候，入射光线与反射光线斜率和为零.
3. 光线经过两个相互垂直的镜面反射后，出射光线与入射光线相互平行.

1.4.4 例题解析

【例 1.4.1】 （2015・山东）一条光线从点$(-2,-3)$射出，经 y 轴反射后与圆$(x+3)^2+(y-2)^2=1$相切，则反射光线所在直线的斜率为（　　）.

A. -1 或 1　　　　B. 1 或不存在

C. $\frac{5}{4}$或$-\frac{5}{4}$　　　　D. $-\frac{4}{3}$或$-\frac{3}{4}$

【解析】 由于圆的特性，考虑到有两种情况. 点 $A(-2,-3)$关于 y 轴的对称点为 $A'(2,-3)$，设反射光线所在直线的方程为：$y+3=k(x-2)$，整理得到 $kx-y-2k-3=0$. 因为圆的方程为$(x+3)^2+(y-2)^2=1$，所以圆心坐标为$(-3,2)$，半径 $r=1$. 因为反射光线与圆$(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，所以由点到直线的距离公式得到圆心到直线的距离 $d=\frac{|-3k-2-2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|5k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=1$. 解得

$k=-\frac{4}{3}$或$k=-\frac{3}{4}$,故选 D.

【点评】 本题结合光的反射考查了直线的对称问题.

【例 1.4.2】 (2013·湖南)在等腰直角三角形 ABC 中,$AB=AC=4$,点 P 是边 AB 上异于 A 和 B 的一点,光线从点 P 出发,经 BC 和 CA 反射后又回到原点 P(如图 1-4-1 所示).若光线 QR 经过$\triangle ABC$ 的重心,则 AP 等于(　　).

A. 2　　　B. 1　　　C. $\frac{8}{3}$　　　D. $\frac{4}{3}$

【解析】 以 AC 所在的直线为 y 轴,以 AB 所在的直线为 x 轴,建立平面直角坐标系,如图 1-4-2 所示.

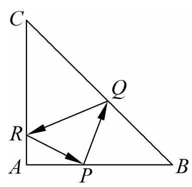


图　1-4-1

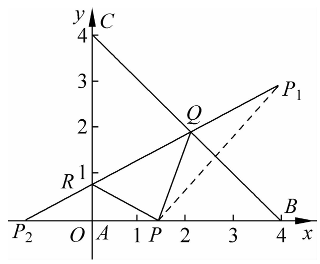


图　1-4-2

易知 $B(4,0)$,$C(0,4)$.由直线的截距式方程可得 BC:$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$,即 $x+y-4=0$.由三角形的重心坐标公式可得$\triangle ABC$ 的重心 G 点坐标为$\left(\frac{0+0+4}{3},\frac{0+4+0}{3}\right)$,即 G 点坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$,假设 $P(a,0)$且 $0<a<4$,点 P 关于直线 BC 的对称点为 $P_1(m,n)$.所以$\begin{cases}\frac{a+m}{2}+\frac{n+0}{2}=4\\-\frac{n-0}{m-a}=-1\end{cases}$,解得$\begin{cases}m=4\\n=4-a\end{cases}$,即点 P_1 坐标为$(4,4-a)$.而点 P 关于 y 轴对称的点显然为 $P_2(-a,0)$.根据光的反射定律和对称性,易知 P_1,Q,R,P_2 四点共线,所以 $k_{QR}=k_{P_1P_2}=\frac{4-a-0}{4-(-a)}=\frac{4-a}{4+a}$,从而由直线的点斜式方程可得直线 QR:$y=\frac{4-a}{4+a}(x+a)$.而直线 QR 过 $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$代入整理可解得 $a=\frac{4}{3}$.另一解为 0 舍去.故选 D.

【点评】 本题考查了直线的反射问题、截距式以及点斜式,包含了光的反射定律、对称问题的两条知识点、三角形的重心坐标公式等知识,难度适中,综合度高.

【例 1.4.3】 (2017 春·殷都区校级月考)有两点 $A(1,3)$,$B(-5,1)$,A,B 关于直线 l 对称,则 l 的方程为(　　).

A. $3x-y-8=0$　　　B. $3x+y+4=0$

C. $3x-y+6=0$　　　D. $3x+y+2=0$

【解析】 直线 AB 的斜率为$\frac{1-3}{-1-5}=\frac{1}{3}$.所以直线 l 的斜率为-3,且经过 AB 的中点$(-2,2)$,则直线 l 的方程为:$y-2=-3(x+2)$,即 $3x+y+4=0$,故选 B.

【点评】 本题考查了求点关于直线的对称点的方法,利用"垂直"以及"中点在轴上"建立方程组,解出 l 的方程,属于基础题.

【例 1.4.4】 (2017 春·韶关期末)点(2,0)关于直线 $y=-x-4$ 的对称点是( ).

A. $(-4,-6)$ B. $(-6,-4)$ C. $(-5,-7)$ D. $(-7,-5)$

【解析】 设点 $A(2,0)$ 关于直线 $y=-x-4$ 的对称点是 $A'(x,y)$，所以 $k_{AA'}=\dfrac{y}{x-2}=1$. 因为 AA' 的中点 $\left(\dfrac{x+2}{2},\dfrac{y}{2}\right)$ 在直线 $y=-x-4$ 上，所以 $\dfrac{y}{2}=-\dfrac{x+2}{2}-4$. 由于点 A 与点 A' 关于直线 $y=-x-4$ 对称，所以直线 $A'A$ 与直线 $y=-x-4$ 垂直，所以可得 $\dfrac{y}{x-2}=1$. 联立方程得 $\begin{cases}\dfrac{y}{x-2}=1\\ \dfrac{y}{2}=-\dfrac{x+2}{2}-4\end{cases}$，解得 $x=-4$，$y=-6$，即 A' 点坐标为 $(-4,-6)$. 故本题选 A.

【点评】 本题为典型的对称问题，利用"点和对称点连线与对称轴垂直且平分"的知识点，列出方程组. 但要注意不要算错.

【例 1.4.5】 (2015 秋·七里河区校级期末)已知直线 $(1+k)x+y-k-2=0$ 恒过点 P，则点 P 关于直线 $x-y-2=0$ 的对称点的坐标是( ).

A. $(3,-2)$ B. $(2,-3)$ C. $(1,-3)$ D. $(3,-1)$

【解析】 整理直线方程得 $k(x-1)+(x+y-2)=0$，则此直线恒过点 $P(1,1)$. 设点 P 关于直线 $x-y-2=0$ 的对称点为 $P'(x,y)$，则 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+1}{2}-2=0\\ \dfrac{y-1}{x-1}\times 1=-1\end{cases}$，解得 $x=3$，$y=-1$. 所以点 P' 的坐标为 $(3,-1)$，故本题选 D.

【点评】 本题考查了变形直线方程来找出直线恒过定点. 这也是我们之前讲过的交点直线系.

【例 1.4.6】 (2014·湛江一模)将平面直角坐标系的图纸折叠一次，使得点 $A(1,3)$ 与点 $A'(-1,-1)$ 重合，若此时点 $B(4,4)$ 与点 $B'(x,y)$ 重合，则 x 的值为________，y 的值为________.

【解析】 根据题意，得到折痕为 AA'、BB' 的对称轴，由于 AA' 的斜率为 $k_{AA'}=\dfrac{-1-3}{-1-1}=2$，且线段 AA' 的中点坐标为 $(0,1)$，所以折痕所在直线的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. 由于线段 BB' 的中点坐标为 $\left(\dfrac{4+x}{2},\dfrac{4+y}{2}\right)$，$k_{BB'}=\dfrac{y-4}{x-4}$，则有 $\begin{cases}\dfrac{y-4}{x-4}=2\\ \dfrac{4+y}{2}=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4+x}{2}\right)+1\end{cases}$，解得 $x=0$，$y=-4$. 故 x 的值为 0，y 的值为 -4.

【点评】 折痕即为对称直线，再将问题转换为一般的对称问题. 折痕问题和反射问题都属于对称问题.

【例 1.4.7】 (2016 秋·永州期末)已知点 $P(a,b)$ 关于直线 l 的对称点为 $Q(3-b,3-a)$，则直线 l 的方程是( ).

A. $x+y-3=0$ B. $x+y+b-a=0$

C. $x+y-a-b=0$ D. $x-y+3=0$

【解析】 设 PQ 中点为 M，则 M 的坐标为 $\left(\dfrac{3+a-b}{2},\dfrac{3-a+b}{2}\right)$，则直线 l 的斜率为 $\dfrac{-1}{k_{PQ}}=\dfrac{-1}{\dfrac{3-a-b}{3-a-b}}=-1$. 所以直线 l 方程为 $y-\dfrac{3-a+b}{2}=-\left(x-\dfrac{3-b+a}{2}\right)$，整理得 $x+y-3=0$，故选 A.

【点评】 本题考查了求解对称问题的两个知识点.

【例 1.4.8】（2015 秋·桃江县校级月考）在平面直角坐标系中，$OABC$ 是正方形，点 A 的坐标是 $(4,0)$，点 P 为边 AB 上一点，$\angle CPB=60°$，沿 CP 折叠正方形，折叠后，点 B 落在平面内点 B' 处，则 B' 点的坐标为（　　）.

A. $(2,2\sqrt{3})$　　B. $\left(\frac{3}{2},2-\sqrt{3}\right)$　　C. $(2,4-2\sqrt{3})$　　D. $\left(\frac{3}{2},4-\sqrt{3}\right)$

【解析】 作平面直角坐标系如图 1-4-3 所示，已知 $BB'\perp CP$ 且 $\angle CPB=60°$，所以 $\angle ABB'=30°$，则直线 CP 的倾斜角为 $150°$，所以 $k_{CP}=\tan150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 CP 的方程为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$. 设 $B'(x,y)$，则有 $\begin{cases}\frac{y-4}{x-4}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{x+4}{2}-\frac{y+4}{2}+4=0\end{cases}$，解得 $x=2$，$y=4-2\sqrt{3}$. 所以 B' 点坐标为 $(2,4-2\sqrt{3})$，故选 C.

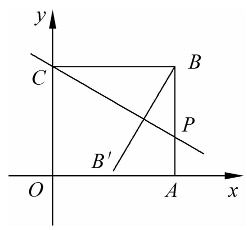


图　1-4-3

【点评】 本题考查了折叠问题. 折叠问题其实属于对称问题，只不过是对称问题穿了一层外衣，处理方法还是一样.

【例 1.4.9】（2016 秋·成都期中）与直线 l：$3x-5y+4=0$ 关于原点对称的直线的方程为（　　）.

A. $3x+5y+4=0$　　B. $3x-5y-4=0$　　C. $5x-3y+4=0$　　D. $5x+3y+4=0$

【解析】 设 (x_0,y_0) 是所求直线方程上的点，则 (x_0,y_0) 关于原点的对称点为 $(-x_0,-y_0)$ 且 $(-x_0,-y_0)$ 在直线 l 上，所以 $-3x_0+5y_0+4=0$，整理得 $3x-5y-4=0$，故选 B.

【点评】 直线关于原点对称，则直线上任意一点都关于原点对称. 本题属于基础题，考查了直线关于点对称的求法.

【例 1.4.10】 若直线 l：$y=k(x+1)$ 与直线 m 关于点 $(3,2)$ 对称，则直线 m 经过定点（　　）.

A. $(1,2)$　　B. $(0,0)$　　C. $(7,4)$　　D. $(3,5)$

【解析】 由点斜式可知直线 l：$y=k(x+1)$ 经过定点 $(-1,0)$，因为 $(-1,0)$ 关于点 $(3,2)$ 的对称点为 $(7,4)$，又因为直线 m 与直线 l：$y=k(x+1)$ 关于点 $(3,2)$ 对称，所以直线 m 经过的定点为 $(7,4)$，所以选 C.

【点评】 本题考查了直线的点斜式、两直线对称的问题.

1.4.5　强化练习

【练习 1.4.1】（2012 秋·定海区校级期末）直线 $ax+3y-9=0$ 与直线 $x-3y+b=0$ 关于原点对称，则 a,b 的值是（　　）.

A. $a=1,b=9$　　B. $a=-1,b=9$　　C. $a=1,b=-9$　　D. $a=-1,b=-9$

【解析】 设点 $A(x,y)$ 为直线 $ax+3y-9=0$ 上一点，则 A 关于原点对称的点的坐标为 $A'(-x,-y)$，则有 $\begin{cases}ax+3y-9=0\\ -x+3y+b=0\end{cases}$，即 $ax+3y-9=-x+3y+b$. 所以 $a=-1,b=-9$，故选 D.

【点评】 设对称点坐标代入直线方程，根据直线相等对比系数即可求出 a,b.

【练习 1.4.2】 已知直线 l：$2x-3y+1=0$，点 A 的坐标为 $(-1,-2)$. 求：

(1) 点 A 关于直线 l 的对称点 B 的坐标；

(2) 直线 m：$3x-2y-6=0$ 关于直线 l 的对称直线 n 的方程；

(3) 直线 l 关于点 $A(-1,-2)$ 对称的直线 h 的方程.

【解析】 (1) 设 B 点坐标为 (x,y)，因为点 A 与点 B 关于直线 l 对称，所以可以列出方程组 $\begin{cases}\dfrac{y+2}{x+1}\times\dfrac{2}{3}=-1\\ 2\times\dfrac{x-1}{2}-3\times\dfrac{y-2}{2}+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{33}{13}\\ y=\dfrac{4}{13}\end{cases}$，所以 B 点坐标为 $\left(-\dfrac{33}{13},\dfrac{4}{13}\right)$.

(2) 在直线 m 上取一点 M，坐标为 $(2,0)$，则点 M 关于直线 l 的对称点必在 n 上，设对称点为 M'，坐标为 (x',y')，所以可列出方程组 $\begin{cases}2\times\left(\dfrac{x+2}{2}\right)-3\times\left(\dfrac{y+0}{2}\right)+1=0\\ \dfrac{y-0}{x-2}\times\dfrac{2}{3}=-1\end{cases}$，从而解得 $\begin{cases}x=\dfrac{6}{13}\\ y=\dfrac{30}{13}\end{cases}$，即 M' 点坐标为 $\left(\dfrac{6}{13},\dfrac{30}{13}\right)$.

设 m 与 l 的交点为 N，则联立 $2x-3y+1=0$ 和 $3x-2y-6=0$，解得 N 点坐标为 $(4,3)$.

又因为直线 n 经过点 $N(4,3)$，所以由两点式可得直线方程为 $9x-46y+102=0$.

(3) 设 $P(x,y)$ 为 h 上任意一点，则点 P 关于点 $A(-1,-2)$ 的对称点 P' 在直线 l 上，且坐标为 $(-2-x,-4-y)$. 所以 $2(-2-x)-3(-4-y)+1=0$，即直线 h 的方程为：$2x-3y-9=0$.

【点评】 本题属于综合题，考查了点关于直线对称、直线关于直线对称以及直线关于点对称.

【练习 1.4.3】 (2012 秋 · 福州校级期末) 以下关于直线 l：$y=2x+5$，说法错误的是(　　).

A. 若 m 与 l 关于 y 轴对称，则 m 的方程为 $y=-2x+5$

B. 若 n 与 l 关于 x 轴对称，则 n 的方程为 $y=-2x-5$

C. 若 p 与 l 关于原点对称，则 p 的方程为 $y=2x-5$

D. 若 h 与 l 关于 $y=x$ 对称，则 h 的方程为 $x-2y+5=0$

【解析】 A 选项，m 与 l 关于 y 轴对称，则 y 不变，x 相反，得 m 的方程为 $y=-2x+5$，正确；

B 选项，若 n 与 l 关于 x 轴对称，则 x 不变，y 相反，得 n 的方程为 $-y=2x+5$，即 $y=-2x-5$，正确；

C 选项，若 p 与 l 关于原点对称，则 x、y 都变，得 p 的方程为 $-y=-2x+5$，即 $y=2x-5$，正确；

D 选项，若 h 与 l 关于 $y=x$ 对称，则 x、y 交换，得 h 的方程为 $x=2y+5$，即 $x-2y-5=0$，错误. 故选 D.

【点评】 本题属于基础题，考查了直线相关问题，需掌握直线对称的性质.

【练习 1.4.4】 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是(　　).

A. $x-y-2=0$　　B. $x+y+2=0$　　C. $x-y+6=0$　　D. $x+2y-3=0$

【解析】 在直线 $x-2y+1=0$ 上任取两点 $(1,1)$ 和 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. 这两点关于直线 $x=1$ 的对称点分别为 $(1,1)$ 和 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$. 过这两点的直线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$. 故选 D.

【点评】 本题考查了直线关于直线对称的知识点，需要先找出两个对称点再确定直线方程.

【练习 1.4.5】 求直线 m：$y-2=x$ 关于直线 n：$2x-y+4=0$ 对称的直线 l 方程.

【解析】 $\begin{cases}x-y+2=0\\ 2x-y+4=0\end{cases}$，解得直线 m、n 交点为 $(-2,0)$，设直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为：$y=k(x+2)$. 由题意知，m 到 n 与 l 到 n 的角相等，则 $\dfrac{2-1}{1+2\times1}=\dfrac{k-2}{1+2k}$，解得 $k=7$. 所以 l 的方程为 $y=7x+14$.

【点评】 两直线相交，先求交点再利用公式求斜率.