第1章

函　数

章前导读

“集合与函数”是中学阶段数学学习的一条主线，而且起着承上启下的作用，连接着初等数学和高等数学.不仅如此，在现实生活中，很多实际问题就是通过建立函数模型解决的.早在一百多年前，菲利克斯·克莱因就提出中学阶段要以函数观念和几何直观作为数学教学的核心的观点.因此，函数的重要性不言而喻.

然而，由于这类问题本身的抽象性和其性质的隐蔽性，大多数学生在面对这类问题时常常感到束手无策.在考试中，这部分也就成为绝大多数考生失分的重灾区，这也使得很多学生做了大量的题，但收效甚微，甚至在做题的时候无从下手.有些同学因此怀疑自己，这更加制约了分数的提升.

其实，之所以会出现上述状况，是因为大部分人没有真正掌握住函数，没有掌握我们即将介绍的这套函数通法.由于没有适当的方法解决问题，所以才会感到函数十分复杂.事实上，课本上的知识本没有这么复杂，我们的生活要远远比课本复杂得多，所以大家一定不要胆怯.

为了彻底改变这种现状，本章从课本上最基本的概念开始，进行逐步深入地讲解，为后续进一步的学习打牢基础，然后系统梳理各种类型的考题并传授对应的解决方法.本章分为16节，每一节对应一个专题.在这些专题中我们将讲解“二次函数根的分布五步法”“绝化正负”“两难平摊”等非常实用的解题方法.有了这套方法，你会惊讶地发现这部分题目的运算量实际上并没有那么大.在讲解完这部分方法后，后续的解题过程中会不断印证我们讲过的解题原则和解题方法.

相信大家已经很好地了解了本章的整体思路，那我们闲言少叙，马上以一个振奋的状态来进入学习吧！加油！

1.1 集合的定义和基本运算

1.1.1 知识点：集合的概念

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫作集合，简称集，通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$. 即元素与集合的关系要么为一个元素属于一个集合，要么为一个元素不属于一个集合，两者必居其一.

集合是一个原始概念，简单地说就是一堆有共性的东西放在一起. 比如说：一群马、一堆书、四大洋.

1.1.2 知识点：集合的特点

1. 确定性

给定一个集合，按照构成该集合的条件能够明确判断一个对象（元素）是否属于这个集合. 例如，对于一个动物，是鱼类还是非鱼类，有一个很明显的界限，牛不是鱼类，它就不在鱼类这个集合里面，而鲨鱼是鱼类，那么鲨鱼就在鱼类这个集合里面. 确定性的意思可以概括为集合的边界是确定的，因此有些是构不成集合的，如坏人、学习好的人、身体棒的人. 因此说，确定性的本质即集合的判断标准是客观的.

2. 互异性

简单地说，一个集合里面不应该有两个相同的元素，如一个集合 $A=\{a,1\}$，则 $a\neq 1$，在做题时经常用集合的互异性来排除一些选项.

3. 无序性

一个集合中元素的排列次序没有先后之分. 如集合 $\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$（注意：集合的无序性应和数列区分，数列是有序的）.

1.1.3 知识点：集合的表示方法

1. 列举法

把集合里面所有的元素都列举出来，即为列举法. 如由元素 1,2,3,4,5 组成的集合即为 $\{1,2,3,4,5\}$.

2. 图示法（Venn 图法）

我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部表示一个集合. 如图 1-1-1 所示，左边代表集合 A，右边代表集合 B，交集为中间灰色处，这种表示方法为图示法，也叫 Venn 图法.

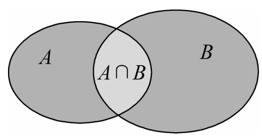


图 1-1-1

3. 描述法

描述法作为集合表示方法中最重要的一种，形式如下：$\{\bigcirc \mid \square\}$，$\bigcirc$ 表示被描述的对象，$\square$ 表示对描述对象的描述. 如设 $\{x\mid -2<x<1,x\in\mathbf{R}\}$ 为集合 A，则 A 表示满足条件 $-2<x<1$ 的实数 x 的集合. 方程 $x^3-3x-2=0$ 的解的集合可表示为 $B=\{x\mid x^3-3x-2=0,x\in\mathbf{R}\}$. $\{x\mid y=f(x)\}$ 表示 $f(x)$ 的定义域；$\{y\mid y=f(x)\}$ 表示 $f(x)$ 的值域；$\{(x,y)\mid y=f(x)\}$ 表示 $y=f(x)$ 的图像.

1.1.4 知识点：集合中的关系

(1) 元素和集合的关系：a 属于集合 A，则写作 $a\in A$；a 不属于集合 A，则写作 $a\notin A$.

(2) 集合和集合的关系：集合 A 包含于集合 B，则写作 $A\subseteq B$；集合 A 不包含于集合 B，则写作 $A\not\subset B$. 所有集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则说明 $A\subseteq B$. 此时有两种情况：①$A=B$；②A 包含于 B 但不等于 B.

(3) 证明两个集合相等的唯一方法：$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

(4) $\varnothing$是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

1.1.5 知识点：集合的子集个数

通常用列举法，如用列举法表示$\{1,2,3\}$的子集：$\{1,2,3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\varnothing$，共有八个. 此处有一个公式，即一个非空集合里有 n 个元素，则该集合子集的个数为 2^n，真子集的个数为 2^n-1. 该公式怎么来的呢？有一个生动形象的讲法，假如把集合的$\{\ \}$想象成牛圈，里面有三头牛，这三头牛分别是一牛、二牛、三牛. 对于任意一头牛，都有两种选择，一种选择是钻到牛圈里，一种选择是不在牛圈里. 所以每头牛都有两个选择，所以共有 $2\times2\times2=2^3$(种)情况，然后再把本身的集合减去，就是真子集的个数.

1.1.6 例题解析

【例 1.1.1】 (2012 · 新课标)已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，则 B 中所含元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 10

【解析】 因为 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，所以当 $x=5$ 时，$y=4,3,2,1$；当 $x=4$ 时，$y=3,2,1$；当 $x=3$ 时，$y=2,1$；当 $x=2$ 时，$y=1$. 所以 $B=\{(5,4),(5,3),(5,2),(5,1),(4,3),(4,2),(4,1),(3,2),(3,1),(2,1)\}$. 所以 B 中所含元素的个数是 10 个，所以选择 D 项.

【点评】 本题考查集合中元素的个数，属于比较简单的题目，只要不粗心，并且熟练掌握了知识点，这种题一般不会出错.

【例 1.1.2】 (2017 · 新课标Ⅰ)已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 3-2x>0\}$，则(　　).

A. $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$

C. $A\cup B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　D. $A\cap B=\varnothing$

【解析】 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 3-2x>0\}$，所以 $B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$. 我们可以轻易地得出 $A\cup B=A$，即$\{x\mid x<2\}$，$A\cap B=B=\left\{x\,\middle|\,x<\dfrac{3}{2}\right\}$. 因此，该题选择 A 项.

【点评】 本题考查集合中的基本关系，我们只需解出不等式，然后根据集合间的关系再找出正确的选项，属于基础题，较简单.

【例 1.1.3】 (2013 · 新课标Ⅰ)已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$，$B=\{x\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$，则(　　).

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A\subseteq B$

【解析】 因为集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$，所以 $A=\{x\mid x>2$ 或 $x<0\}$，$B=\{x\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid 2<x<\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}<x<0\}$. 根据集合 A、B 的取值可知 $A\cup B=\mathbf{R}$，所以选择 B 项.

【点评】 本题考查不等式的解法和集合间的关系，也属于基础题. 我们只要解出不等式，再根据集合间关系，就能轻松解出此题. 此处我们也可以用画数轴的方法，这样会让题目解答起来更加方便.

【例 1.1.4】 (2015 · 全国二模)设集合 $M=\{x\mid x^2-2x-3<0,x\in\mathbf{Z}\}$，则集合 M 的真子集个数

为(　　).

A. 8　　B. 7　　C. 4　　D. 3

【解析】 $x^2-2x-3<0$,即$(x-3)(x+1)<0$,所以$-1<x<3$.又因为$x\in\mathbf{Z}$,所以$x=0,1,2$,所以集合$M=\{0,1,2\}$.由公式得真子集的个数为2^3-1,即为7,因此选择B项.

【点评】 本题考查集合中的子集个数,我们在上节中已经总结了公式,只要解出一元二次不等式的解集,再套用公式就可以轻松解出本题.

1.1.7 强化练习

【练习1.1.1】 (2015·新课标Ⅱ)已知集合$A=\{-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$,则$A\cap B=$(　　).

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

【解析】 因为集合$B=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$,所以$B=\{x|-2<x<1\}$.$A=\{-2,-1,0,1,2\}$,所以$A\cap B=\{-1,0\}$,因此选择A项.

【点评】 本题考查不等式的解法和集合之间的关系,我们只需解出不等式,再根据集合间的关系就可以得出最终结果.

【练习1.1.2】 (2016·浙江)已知集合$P=\{x\in\mathbf{R}|1\leqslant x\leqslant 3\}$,$Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2\geqslant 4\}$,则$P\cup(\complement_{\mathbf{R}}Q)=$(　　).

A. $[2,3]$　　B. $(-2,3]$

C. $[1,2)$　　D. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

【解析】 因为$Q=\{x\in\mathbf{R}|x^2\geqslant 4\}$,所以$Q=\{x\in\mathbf{R}|x\geqslant 2$或$x\leqslant -2\}$,所以集合$Q$的补集$\complement_{\mathbf{R}}Q=\{x\in\mathbf{R}|-2<x<2\}$.又因为集合$P=\{x\in\mathbf{R}|1\leqslant x\leqslant 3\}$,所以$P\cup(\complement_{\mathbf{R}}Q)=(-2,3]$,因此选择B项.

【点评】 本题考查不等式的解法和有关补集的知识,我们只需解出不等式,再根据有关补集的知识就可以轻松解决此题.

【练习1.1.3】 (2017·新课标Ⅲ)已知集合$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)|y=x\}$,则$A\cap B$中元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

【解析】 本题有两种做法,我们分别来讨论.

方法一:传统方法

因为集合$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$,集合$B=\{(x,y)|y=x\}$,由我们已知的知识,集合A和集合B都代表的是图像,因此,将$x^2+y^2=1$与$y=x$联立,得$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$,所以$A\cap B$中的元素的数为2.

方法二:数形结合法

因为集合A表示圆$x^2+y^2=1$上所有点,集合B表示直线$y=x$上所有点,如图1-1-2所示.

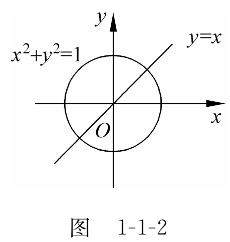


图 1-1-2

故$A\cap B$表示直线与圆的交点,画出图像,由图像可得,圆$x^2+y^2=1$和直线$y=x$的交点为两个,因此$A\cap B$中元素的个数为2,因此选择B项.

【点评】 通过用数形结合的方法解出此题,可以节省大量的时间.通过这道题可以看出,对于一个题目,如果有更巧妙的解决办法,就会减少大量的做题时间,而在高考中节约时间是非常重要的,哪怕是一分钟的时间,都可能改变我们的分数,本书就是要教给大家如何用最少的时间快速地解答问题.

【练习 1.1.4】（2015·河南模拟）已知集合 $P=\{x|x^2-1\leqslant 0\}$，$M=\{a\}$，若 $P\cup M=P$，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

【解析】 因为集合 $P=\{x|x^2-1\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $P=[-1,1]$，$M=\{a\}$. 又因为 $P\cup M=P$，所以 $M\subseteq P$，所以 $a\in[-1,1]$. 因此，选择 C 项.

【点评】 本题考查不等式的解法和集合之间的关系，只需解出不等式，再根据集合间的关系就可以得出最终结果.

【练习 1.1.5】（2011 秋·崇明县校级期中）已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|mx+1>0\}$，若 $A\cup B=B$，求实数 m 的取值范围.

【解析】 由题意可知，$A\cup B=B$，则 $A\subseteq B$. 又因为 $B=\{x|mx+1>0\}$，因此要得出 B 集合，就要解不等式 $mx+1>0$，但是在此应注意一点，在不等式中 x 前系数的正负号是要考虑的，因此在解不等式时应进行分类讨论. 将情况分为三种，即 $m=0$；$m<0$；$m>0$.

当 $m=0$ 时，原式变为 $1>0$ 恒成立. 此时 $x\in\mathbf{R}$，即 $B=\{x|x\in\mathbf{R}\}$，此时 $A\subseteq B$ 成立，因此 $m=0$ 成立.

当 $m<0$ 时，原式变为 $x<-\frac{1}{m}$，又因为需要保证 $A\subseteq B$ 成立，因此需要满足 $-\frac{1}{m}>2$，即 $m>-\frac{1}{2}$，又因为 $m<0$，所以 $-\frac{1}{2}<m<0$.

当 $m>0$ 时，原式变为 $x>-\frac{1}{m}$，又因为需要保证 $A\subseteq B$ 成立，因此需要满足 $-\frac{1}{m}<-1$，即 $m<1$，又因为 $m>0$，所以 $0<m<1$.

综上所述，m 的取值范围应是 $-\frac{1}{2}<m<1$.

【点评】 本题考查不等式、集合的关系以及分类讨论的思想. 对于数学的学习，一定要培养各种各样的数学思想，如分类讨论的思想就是其中一个比较重要的思想.

【练习 1.1.6】 已知集合 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$，集合 $B=\left\{y\middle|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$.

(1) 求实数 a 的取值范围；

(2) 当 $x^2+1\geqslant ax$ 恒成立时，求 a 的最小值并求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$.

【解析】 (1) 因为 $B=\left\{y\middle|y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2},0\leqslant x\leqslant 3\right\}$，所以如果想得到集合 B，就需要解出当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，$y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$ 的值域，因为此时 $y_{\min}=f(1)=2$，$y_{\max}=f(3)=4$，所以 $B=\{y|2\leqslant y\leqslant 4\}$.

再来解集合 A 中的不等式，由题意得 $A=\{y|y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0\}$.

因此要解不等式 $y^2-(a^2+a+1)y+a(a^2+1)>0$，在此用因式分解法将其分解，因此可以得到 $(y-a)(y-a^2-1)>0$，在此要解这个不等式，就要弄清楚 a^2+1 和 a 的大小关系，此处不妨将两者作差，即 a^2+1-a，将此式进行化简：$a^2+1-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，因为这是一个恒大于 0 的式子，由此可以看出 a^2+1 恒大于 a. 因此，该不等式的解为 $y<a$ 或 $y>a^2+1$，则集合 $A=\{y|y<a$ 或 $y>a^2+1\}$. 又因为 $A\cap B=\varnothing$，则由 $\begin{cases}a\leqslant 2\\a^2+1\geqslant 4\end{cases}$ 得到 $a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2$. 综上所述，$a$ 的取值范围是 $\{a|a\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}\leqslant a\leqslant 2\}$.

(2) 因为 $x^2+1\geqslant ax$ 恒成立，即 $x^2+1-ax\geqslant 0$ 恒成立，此时把它看成一个一元二次不等式，且二次项前系数为正，因为要保证此式恒成立，就要保证 $\Delta=a^2-4\leqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$，所以 $a_{\min}=-2$. 此

时，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{y|-2\leqslant y\leqslant 5\}$，所以$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{y|2\leqslant y\leqslant 4\}$.

【点评】 本题是一个比较综合的题目，将集合类的题目与二次函数的知识点相结合，不仅考查对于集合基本的定义和关系的掌握程度，也考查当集合与其他知识点相结合时，对于这类题的应对能力，这就要求对于有关集合知识点的掌握非常熟练.

到目前为止，本章的集合部分就结束了，集合在高中数学中所占的比重比较小，而且相对于其他知识较简单，但是在高考中也是一个易错点，通常与后面的命题和数学逻辑符号相联系出题，同学们在集合的学习中应该抓住集合的性质，在讨论集合的关系时多用画数轴的方法. 高考中集合类型的题目多放在第一题，审题时同学们只要做到不慌、不忙、不躁，就能轻松得分.

1.2 函数的定义

1.2.1 知识点：函数定义的理解

从这一节开始就到了本章的重点部分. 在初中和高中都接触过有关函数的知识，但是初中和高中函数的定义稍有差异，现在分别看一下它们的相同和差异.

1. 初中函数的定义

一般地，在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果给定一个 x 值，相应地就确定唯一的一个 y 值，那么就称 y 是 x 的函数，其中 x 是自变量，y 是因变量，x 的取值范围叫作这个函数的定义域，相对应的 y 的取值范围叫作函数的值域.

由此我们可以看出，初中函数的定义是经历了一个变化的过程，其过程为 $x\rightarrow f(x)\rightarrow y$，$f$ 是 function 的缩写，可以这样理解，函数像是一个黑盒子，这个黑盒子有一个机能，这个机能就是 $f(x)$，把 x 扔到这个黑盒子里面，通过这个函数的功能，对这个 x 施加一个运算，就把它变成了 y.

还可以把函数比作一头牛，牛吃的是草，挤出来的是奶，我们把草（自变量）喂给牛（函数），就能变出奶（因变量）. 在此，如果借助这个比喻来理解反函数，就可以理解为反函数就是牛（函数）吃进去的是奶（因变量），挤出来的是草（自变量）.

2. 高中函数的定义

设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使集合 A 中任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$和它对应，那么就称 $f:A\rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in A$，其中 x 叫作自变量，x 的取值范围 A 叫作函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值，函数值的集合$\{f(x)|x\in A\}$叫作函数的值域.

由此可以看出，高中函数的定义是由集合引进的，但是实际上，从数学的发展来看，函数的出现要早于集合，我们要借助此种方法理解函数的定义，就不得不先理解映射的定义.

1.2.2 知识点：映射

定义：两个非空集合 A 与 B 间存在着对应关系 f，而且对于 A 中的每一个元素 x，B 中总有唯一的一个元素 y 与它对应，就称这种对应为从 A 到 B 的映射，记作 $f:A\rightarrow B$，此处应注意 A 中的一个元素一定是对应着 B 中唯一的一个元素；而 B 中的一个元素则不一定对应着 A 中唯一的一个元素，即 B 中的一个元素可以对应 A 中的多个元素. 可以用两个图来帮助理解一下这个观念.

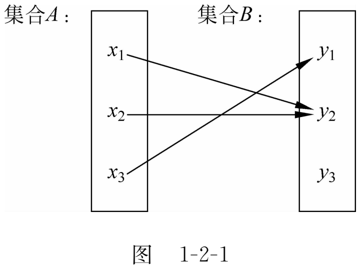


图 1-2-1

即集合 $A=\{x_1,x_2,x_3\}$，集合 $B=\{y_1,y_2,y_3\}$，集合 A 中的 x_1，x_2 同时对应集合 B 中的 y_2，x_3 对应集合 B 中的 y_1，而集合 B 中的 y_3 没有 A 中元素对应，此时构成映射 $f:A\rightarrow B$，如图 1-2-1 所示.

若是对于第二种情况，即集合 $A=\{x_1,x_2,x_3\}$，集合 $B=\{y_1,y_2,y_3\}$，集合 A 中的 x_1 同时对应集合 B 中的 y_1,y_2，x_2 对应集合 B 中的 y_3，x_3 对应集合 B 中的 y_2，因为此时出现了 A 中的一个元素同时对应着 B 中的多个元素，所以此时不构成映射 $f:A\to B$，如图 1-2-2 所示.

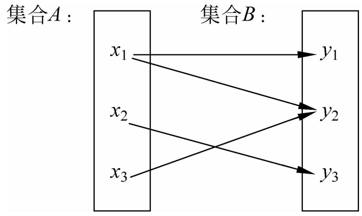


图　1-2-2

1.2.3　例题解析

【例 1.2.1】（2015·浙江）存在函数 $f(x)$ 满足，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有（　　）.

A. $f(\sin 2x)=\sin x$　　　　B. $f(\sin 2x)=x^2+x$

C. $f(x^2+1)=|x+1|$　　　　D. $f(x^2+2x)=|x+1|$

【解析】 通过读题，可以得出题目的意思就是让找出 A，B，C，D 四个选项中哪个是函数，函数的标准是对于任意的自变量是否对应唯一的因变量，现在开始逐个验证.

对于 A 选项，可以找一个特例，设 $\sin 2x=0$，当 $\sin 2x=0$ 时，$x=k\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，取 $x=0$，则 $\sin 2x=0$，$f(0)=\sin 0=0$；取 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，则 $\sin 2x=0$，此时 $f(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\pm 1$，即 $f(0)=0$ 或 ± 1 三个值，不符合函数的定义，因此选项 A 中的式子不是函数.

对于 B 选项，可以同 A 选项一样找一个特例，设 $\sin 2x=0$，当 $\sin 2x=0$ 时，$x=k\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，取 $x=0$，则 $\sin 2x=0$，$f(0)=0^2+0=0$；取 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin 2x=0$，此时 $f(0)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2+2\pi}{4}$，即 $f(0)=0$ 或 $\frac{\pi^2+2\pi}{4}$ 两个值，不符合函数的定义，因此 B 选项中的式子不是函数.

对于 C 选项，同样可以找一个特例，令 $x^2+1=2$，则 $x=1$ 或 -1，同样分两种情况来讨论：当 $x=1$ 时，则 $x^2+1=2$，$f(2)=|1+1|=2$；当 $x=-1$ 时，则 $x^2+1=2$，$f(2)=|-1+1|=0$，即 $f(2)=2$ 或 0 两个值，不符合函数的定义，因此选项 C 中的式子不是函数.

对于 D 选项，通过观察 $f(x^2+2x)=|x+1|$ 这个式子，可以发现 $f(x^2+2x)$ 可以变化为 $f(|x+1|^2-1)$，此时可以用换元法，将 $|x+1|^2-1$ 看作 t，则 $|x+1|=\sqrt{t+1}$，则原式可变为 $f(t)=\sqrt{t+1}$，因此该式满足对于任意的 t，都有唯一的 $\sqrt{t+1}$ 与之对应，即满足对于任意的自变量，都有唯一的因变量与之对应，因此 D 选项中的式子是函数.

综上所述，此题应该选择 D 项.

【点评】 本题考查函数的定义. 通过特殊值法检验 A，B，C，D 选项，从而得出正确答案，特殊值法也是数学考试中做选择题和填空题常用的方法，用这种方法可以解决很多复杂的题型，节省大量的时间.

【例 1.2.2】（2011·湖南）给定 $k\in\mathbf{N}^*$，设函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 满足：对于任意大于 k 的正整数 n：$f(n)=n-k$.

(1) 设 $k=1$，则其中一个函数 $f(n)$ 在 $n=1$ 处的函数值为________.

(2) 设 $k=4$，且当 $n\leqslant 4$ 时，$2\leqslant f(n)\leqslant 3$，则不同的函数 f 的个数为________.

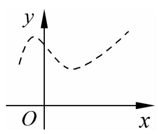
【解析】 (1) 因为函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 满足对于任意大于 k 的正整数 n：$f(n)=n-k$，因此可以说对应法则 f 是正整数到正整数的映射. 当 $k=1$ 时，对应关系为 $f(n)=n-1$，又因为需保证 n 和 k 都为正

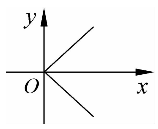
整数，所以 $n-1>0$，即 $n\geqslant 2$. 所以此时映射关系为：$f(n)=n-1(n\geqslant 2)$，此时可以看出除 $n=1$ 外的正整数都有唯一对应的正整数 $n-1$，因此根据映射的定义，$f(1)$ 对应任何正整数，该映射都成立. 即 $f(x)$ 在 $n=1$ 处的函数值为 $\mathbf{N}^*$.

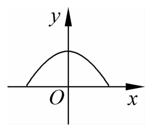
(2) 由题意得，当 $k=4$，且 $n\leqslant 4$，$f(n)$ 为正整数且 $2\leqslant f(n)\leqslant 3$，所以此时可能的情况是 $f(1)=2$ 或 3；$f(2)=2$ 或 3；$f(3)=2$ 或 3；$f(4)=2$ 或 3，此时根据分步计数原理可得函数的种数为 $2\times 2\times 2\times 2=2^4=16$. 所以不同的函数 f 的个数为 16.

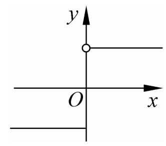
【点评】 本题考查函数的定义和映射的定义，特别是第一小问，更是考查同学们对映射定义的掌握程度，如果功夫不到，很有可能第一问就做不出来.

【例 1.2.3】 (2017 秋·南木林县校级月考)下列四个图像中，不可能是函数图像的是(　　).

A. 

B. 

C. 

D. 

【解析】 由函数的定义可知，每一个定义域内的自变量 x 只能对应唯一的一个因变量 y. 这个信息反映在图像上就是在函数的定义域内作一条与 x 轴垂直的直线只能与函数图像有一个交点. 故选 B 项.

【点评】 本题考查了函数定义中的一一对应.

【例 1.2.4】 (2017 秋·牡丹区校级月考)集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，下列不能表示从 A 到 B 的函数的是(　　).

A. $f:x\to y=\dfrac{1}{2}x$　　B. $f:x\to y=2^{-x}$　　C. $f:x\to y=\dfrac{2}{3}x$　　D. $f:x\to y=\sqrt{x}$

【解析】 选项 C 中对应法则为 $y=\dfrac{2}{3}x$，则 $f(4)=\dfrac{8}{3}\notin B$. 因此选 C 项.

【点评】 本题依然考查了函数定义中的一一对应关系.

1.2.4　强化练习

【练习 1.2.1】 (2017 秋·南阳期中)已知 $y=f(x)$ 是定义域为 $A=\left\{x\left|x=\sin\dfrac{k\pi}{4},k\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }k\leqslant 4\right.\right\}$，值域为 $B=\{\pi,\mathrm{e},\sqrt{3}\}$ 的函数，则这样的函数共有(　　)个.

A. 6　　B. 27　　C. 64　　D. 81

【解析】 集合 $A=\left\{x\left|x=\sin\dfrac{k\pi}{4},k\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }k\leqslant 4\right.\right\}=\left\{0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right\}$. 即函数 $y=f(x)$ 的定义域集合里包含 3 个元素，而由已知，其值域集合里也有 3 个元素. 从而函数 $y=f(x)$ 为一一映射，显然有 $3\times 2\times 1=6$(个). 故选 A 项.

【点评】 本题结合三角函数考查了函数的定义.

【练习 1.2.2】 (2017 秋·灵丘校级期中)下列式子中，y 是 x 的函数的是(　　).

A. $x^2+y^2=2$　　B. $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1$

C. $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$　　D. $y=\pm\sqrt{x}$

【解析】 A 项，由平面解析几何可知其图形为圆，很显然圆不满足每一条垂直横轴的直线与图形只有一个交点. 因此 A 项错误；B 项，满足；C 项，函数的定义域为 $\varnothing$，因此函数不存在；D 项，由平面解析几何易知其图形为开口向右的抛物线. 显然不满足，D 项错误. 故选 B 项.

【点评】 本题需要结合平面解析几何的知识快速识别出解析式所表示的图形，从而判断是否符合函数定义. 另外 C 项迷惑性很强，乍一看非常符合. 一定要注意函数具有三要素：定义域、值域、对

应法则. 其中定义域是函数的基石,没有定义域就不可能有函数. 一定要注意这一点.

【练习 1.2.3】 (2017 秋·定远期中)下列各式中,表示 y 是 x 的函数的有( )个.

① $y=x-(x-3)$;② $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$;③ $y=\begin{cases}x-1 & x<0\\ x+1 & x\geqslant 0\end{cases}$;④ $y=\begin{cases}0 & x\text{为有理数}\\ 1 & x\text{为实数}\end{cases}$.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【解析】 根据函数的定义易知①③表示 y 是 x 的函数;②完全类似于上一题的 C 选项,其定义域为 $\varnothing$,因此③不合题意;④由于 $x=0$ 时,对应的 y 的值不唯一,因此不符合题意. 故符合题意的只有①③两个. 故选 C 项.

【点评】 函数定义问题的考查核心就是函数的三要素以及一一对应.

本节的内容到此就结束了,在做有关函数定义的题目时一定要紧抓函数定义的关键一条,即任意一个函数的自变量中的任意一个数,仅有唯一的一个因变量与之对应. 我们抓住了这一条,很多难题就会迎刃而解.

1.3 具体函数的定义域

1.3.1 知识点:具体函数定义域

现在我们开始讨论具体函数定义域的问题,在此可以将具体函数定义域中常见的问题归纳为五条,这五条为:分母不为 0;偶次开方下的开方数大于等于 0;$\log_a x$ 中,$a>0$ 且 $a\neq 1$,$x>0$;0^0 无意义;$\tan\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$无意义.

这五条几乎涵盖了所有的具体函数定义域的问题,特别是前三条,在有关定义域的问题中占比达到 90%以上,我们应牢牢记住这五条,并且只要记住函数定义域的求解大部分都是与不等式的求解相关联,就会避免在具体函数的定义域相关的题目上失分.

1.3.2 知识点:抽象函数定义域

定义域就是自变量的取值范围,这是函数定义域的概念,这是永远不会改变的,对抽象函数也不例外. 对于对应法则为"f"的函数来说,定义域就是 $f()$括号中变量的取值范围. 例如已知函数 $y=f(x-1)$的定义域为$(-1,1)$,就等价于 $x\in(-1,1)$. 但如果问函数 $f(t)$的定义域,显然此时 $t=x-1$,而 $x\in(-1,1)$,所以 $-2<x-1<0$,即 $t\in(-2,0)$. 因此函数 $f(t)$的定义域为$(-2,0)$. 希望通过这个简单的例子让大家明白定义域在抽象函数中的求法.

1.3.3 例题解析

【例 1.3.1】 (2014·山东)函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(\log_2 x)^2-1}}$的定义域为( ).

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

【解析】 我们观察这个式子,自变量的位置既在分母,也在二次根号下,还在对数里面,所以我们在此要写三个式子来确定该函数的定义域,即 $\sqrt{(\log_2 x)^2-1}\neq 0$,$(\log_2 x)^2-1\geqslant 0$,$x>0$,通过解这三个式子,我们可以确定自变量 x 的范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$,即该函数的定义域是$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$,因此该题选择 C 项.

【点评】 本题是求解函数定义域的题中比较简单的一种类型，只需要考虑三个方面，即分母不为0、偶次开方下的开方数大于等于0以及对数中真数大于0即可.

【例1.3.2】 （2013·江西）函数 $y=\sqrt{x}\ln(1-x)$ 的定义域为（　　）.

A. $(0,1)$　　B. $[0,1)$　　C. $(0,1]$　　D. $[0,1]$

【解析】 通过观察我们可以看出，自变量 x 的位置既在二次开方下，也在以无理数e为底的对数的真数上，因此我们可以得出两个不等式来，即 $x\geqslant0$；$1-x>0$，通过这两个不等式确定 x 的取值范围，得出 $0\leqslant x<1$，即函数 $y=\sqrt{x}\ln(1-x)$ 的定义域为 $0\leqslant x<1$，因此该题选择B项.

【点评】 本题是求解函数定义域的题中比较简单的一种类型，我们只需要考虑两个方面，即偶次开方下的开方数大于等于0，对数中真数大于0即可.

【例1.3.3】 (1) $f(x+1)$ 的定义域是 $(2,4)$，求 $f(x)$ 的定义域.

(2) $f(x)$ 的定义域是 $(2,4)$，求 $f(x+1)$ 的定义域.

(3) $f(2x-1)$ 的定义域是 $(2,4)$，求 $f(x+1)$ 的定义域.

【解析】 (1) 在此先给出两种做法，供同学们思考一下.

方法一：因为 $f(x+1)$ 的定义域是 $(2,4)$，则 $2<x+1<4$，所以 $1<x<3$，即 $f(x)$ 的定义域是 $(1,3)$.

方法二：因为 $f(x+1)$ 的定义域是 $(2,4)$，则 $2<x<4$，所以 $3<x+1<5$，即 $f(x)$ 的定义域是 $(3,5)$.

那么这两种做法哪种对呢？答案是第二种. 为什么第一种解法不对呢？在此说明几个概念：①函数的定义域指的是自变量 x 的取值范围；② $f()$，其括号的作用范围由 f 决定，若是 $g()$，则括号的作用范围由 g 决定；③括号里的范围与自变量 x 的范围在很多情况下是不相同的.

根据这三条概念，接下来再来看一下这道题，函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $(2,4)$，则 $x\in(2,4)$，而不是 $x+1\in(2,4)$，所以 $x+1\in(3,5)$. 此时可以发现，$x+1$ 的范围正好等于 $f(x+1)$ 中括号里的范围，所以括号里的范围是 $(3,5)$，所以 $f(x)$ 中括号里的范围依然是 $(3,5)$，而此时 x 的范围与括号里的范围相同，因为此时 $f(x)$ 的括号里面只有 x，又因为 x 的范围即是函数 $f(x)$ 的定义域，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(3,5)$.

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(2,4)$，即 $x\in(2,4)$，又因为括号里仅有 x，则 x 的取值范围就是括号里的取值范围，所以 $f(x+1)$ 中括号的范围是 $(2,4)$，此时括号里面是 $x+1$，则 $2<x+1<4$，即 $1<x<3$，x 的取值范围即是函数 $f(x+1)$ 的定义域，所以函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $(1,3)$.

(3) 我们在做这道题的时候依然要紧抓总结的三个概念，$f(2x-1)$ 的定义域是 $(2,4)$，即 x 的取值范围为 $2<x<4$. 现在我们再来求函数 $f(2x-1)$ 中括号里的范围：$2<x<4\Rightarrow4<2x<8\Rightarrow3<2x-1<7$，即 $2x-1$ 的范围是 $(3,7)$，括号里的范围就是 $2x-1$ 的范围，所以括号里的范围为 $(3,7)$. 所以后面函数 $f(x+1)$ 括号里的范围也是 $(3,7)$，函数 $f(x+1)$ 括号里为 $x+1$，所以 $x+1$ 的范围是 $(3,7)$，则 x 的范围是 $(2,6)$，函数 $f(x+1)$ 的定义域即为其 x 的范围，所以函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $(2,6)$.

【点评】 在做这类题目的时候一定要注意函数的定义域指的是自变量 x 的取值范围，注意前后两个函数的对应关系，即括号里的范围一直是不变的，我们最后求出来的定义域一定是对应后面函数自变量 x 的取值范围，就能避免在类似的题中再犯错误.

【例1.3.4】 （2008·江西）若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是（　　）.

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$　　C. $[0,1)\cup(1,4]$　　D. $(0,1)$

【解析】 首先我们通过观察，发现函数 $g(x)$ 中自变量 x 有一部分的位置在分母上，所以 $x-1\neq0$，即 $x\neq1$. 现在我们再来分析第一个条件，即函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，则 $f(x)$ 中括号里的范围是 $[0,2]$，则 $f(2x)$ 中括号的范围是 $[0,2]$，所以 $0\leqslant2x\leqslant2$，即 $0\leqslant x\leqslant1$，又因为 $x\neq1$，综上所述，x 的取值范围是 $0\leqslant x<1$. 又因为函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域即为自变量 x 的取值范围，所以函数 $g(x)=$

$\dfrac{f(2x)}{x-1}$的定义域为$[0,1)$,因此该题选择B项.

【点评】　这是一个较为简单的求抽象函数的题目,我们在做这类题的时候一定要明白谁是自变量,弄清括号里的部分和自变量的区别.

1.3.4　强化练习

【练习1.3.1】　(2013·广东)函数$f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$的定义域为(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-1,1)\cup(1,+\infty)$　　D. $[-1,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】　我们继续使用之前的方法来观察本题,可以发现自变量x既在分母上,也在以10为底的对数的真数上,因此可以得出两个式子来,即$x-1\neq0$;$x+1>0$,通过这两个不等式来确定自变量x的取值范围,即$x>-1$且$x\neq1$,即函数$f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$的定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$,因此该题选择C项.

【点评】　本题是求解函数定义域的题中比较简单的一种类型,只需要考虑两个方面,即分母不为0,对数的真数恒为正.

【练习1.3.2】　(2015·湖北)函数$f(x)=\sqrt{4-|x|}+\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$的定义域为(　　).

A. $(2,3)$　　B. $(2,4]$　　C. $(2,3)\cup(3,4]$　　D. $(-1,3)\cup(3,6]$

【解析】　通过观察可以看出,自变量x的位置既在二次开方下,也在以10为底的对数的真数上,因此可以得到两个不等式,即$4-|x|\geqslant0$和$\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}>0$.现在分别解这两个不等式,对于第一个不等式,即$|x|\leqslant4$,解得$-4\leqslant x\leqslant4$;对于第二个不等式$\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}>0$,可以将其变形为$\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)}>0$,因为在分式中分母不为零,且分子分母中同时含有$(x-3)$,因此可以将其约去,得到$x-2>0$,即$x>2$.又因为在分式中分母不为零,因此$x-3\neq0$,即$x\neq3$,我们综合这三个式子$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant4\\x>2\\x\neq3\end{cases}$,取交集得到自变量$x$的范围是$2<x\leqslant4$且$x\neq3$,因此,函数$f(x)=\sqrt{4-|x|}+\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$的定义域为$(2,3)\cup(3,4]$,所以该题选择C项.

【点评】　本题算是一个比较复杂的求函数定义域的题,所要考虑的地方也比较多,但是只要用到之前给出的方法,求出结果来也不会很难.

【练习1.3.3】　(2017秋·灵丘县校级期中)若函数$y=f(2x-3)$的定义域是$[0,2]$,则函数$g(x^2)=f(x^2)$的定义域是(　　).

A. $[-1,1]$　　B. $[0,1]$　　C. $[-3,1]$　　D. $(0,1)$

【解析】　因为函数$y=f(2x-3)$的定义域为$[0,2]$,所以$0\leqslant x\leqslant2$,$0\leqslant2x\leqslant4$,$-3\leqslant2x-3\leqslant1$,即函数$y=f(x)$的定义域为$[-3,1]$.所以$0\leqslant x^2\leqslant1$,解得$-1\leqslant x\leqslant1$.所以函数$g(x^2)=f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$,所以本题选择A项.

【点评】　本题考查抽象函数定义域的求法,同时也是考查复合函数定义域的求法,一定要分清定义域是函数自变量的取值范围.

求抽象函数定义域的方法到这里就结束了,最后再强调一下,求抽象函数的定义域时一定要牢记三条,即函数的定义域指的是自变量x的取值范围;$f()$中括号的作用范围由f决定,若是$g()$则括号

的作用范围由 g 决定；括号里的范围与自变量 x 的范围在很多情况下是不相同的.

1.4 求函数值域的方法

1.4.1 知识点：求值域的方法与总结

接下来讨论一下求函数值域的方法，可以说求函数值域的方法讲得特别乱，为什么呢？因为针对这一节讲了很多没用的方法，高考中有用的方法讲得却不是很多，因此我们会尽量讲一些对高考真正有用的方法. 先来思考一个问题，一本参考书讲求值域的方法有 11 种，另一本参考书讲求值域的方法有 9 种，还有一本参考书中求值域方法达到 13 种，那么这三本参考书哪本好一点？其实哪本都不好，因为这么多种方法，我们根本不知道什么时候用，而高考的时候根本没有时间来想这么多方法. 所以现在我们来尽可能地多想一下求函数值域的方法，并把所有的方法都列在这里：观察法、配方法、均值不等式法、换元法、判别式法、分离常数法、利用单调性法、反函数法（反函数的定义域等于原函数的值域）、数形结合法、求导法.

现在来总结和分析一下这 10 种方法，首先是观察法，观察法要么太简单，要么高考不考，所以删去观察法；单调性和求导的本质是一样的，所以在此将单调性归为求导类；反函数没有出现在考纲里，所以删去这个方法；数形结合法也很难说，因为大部分题是画不出图来的，我们先讨论不能画图的题，因此删除数形结合法；关于配方法，凡是能配方的就一定能求导，因此配方法求的是二次函数的极值点，求导就能直接求出极值点，因此将配方法删去；关于判别式法，这个方法有非常严重的缺陷，高考一般用不到. 经过以上分析，再来排一个顺序，根据高考中出现的频率，从高往低来排序.

$$\begin{cases}\text{① 均值不等式法}\\ \text{② 分离常数法}\\ \text{③ 求导法}\\ \text{④ 换元法}\end{cases}$$

由于这四种方法是按高考中出现频率的高低来排的，所以当我们在考试中对一个题目感到束手无策时，可以按照①→②→③→④的顺序依次尝试，这样最多试 4 次，就能找出正确答案，比起其他参考书上总结的 10 多种方法，节省了很多的时间. 现在我们再来讲一下这 4 种方法的应用条件.

$$\begin{cases}\text{① 均值不等式法→异次式使用}\\ \text{② 分离常数法→齐次式使用}\\ \text{③ 求导法→大招，但是计算量大}\\ \text{④ 换元法→能换就直接换，一般是低次代高次}\end{cases}$$

可能有的同学不懂齐次式和异次式的概念，在此为大家解释一下. 齐次式就是在一个分式中，分子和分母的最高次项相同，如分式$\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+3}$中分子分母的最高次都是二次，所以这个式子就是齐次式；而异次式就是在一个分式中，分子和分母的最高次不同，分式$\frac{x+1}{x^2+2x+3}$中分子的最高次是一次，分母的最高次是二次，所以这个式子就是异次式.

1.4.2 知识点：$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$类型函数求值域的方法

现在来讨论对于 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$这种类型函数的图像. 首先 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$这个函数肯定是由一个反比例函数平移得到的，问题是这个反比例函数是如何平移的. 首先要认清一个问题，不管这个反比例函数怎么平移，它的形状肯定是不变的. 对于反比例函数，只要找到它的对称中心，这个反比例函数

就能确定了，对称中心的横坐标在反比例函数中肯定是定义域取不到的，那么在函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 中，$cx+d=0$ 时，x 的值是定义域取不到的，此时 $x=-\dfrac{d}{c}$，即函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 对称中心的横坐标是 $-\dfrac{d}{c}$，对于对称中心的纵坐标，应该是 x 趋于 ∞ 的时候取的，用极限的思想考虑，纵坐标为 $\dfrac{a}{c}$. 但是反比例函数的图像有两种情况，如图 1-4-1 所示.

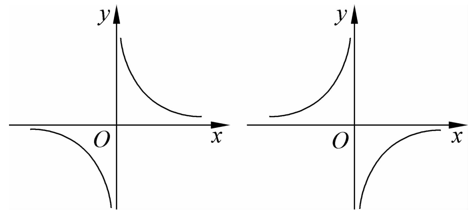


图　1-4-1

图 1-4-1 所示两种情况，第一种是在一、三象限的递减的图像；第二种是在二、四象限递增的图像. 现在继续推导一下 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的图像，我们之前做过一个口算求导的总结，这个口算求导大家只需要了解一下结果，它的结果是 $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$，口算求导的结果中分母是恒正的，因此只要判断出 $ad-bc$ 的正负，就能确定函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 导数的正负，接着就能判断出函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的增减性，继而判断出它的图像. 若 $ad-bc>0$，则函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的导数恒大于 0，其单调递增，此时图像是第二种情况在二、四象限；若 $ad-bc<0$，则函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的导数恒小于 0，其单调递减，此时图像是第一种情况在一、三象限. 而 $ad-bc$ 可以写成行列式，行列式的形式是 $\begin{vmatrix} ab \\ cd \end{vmatrix}=ad-bc$. 这一段为推导过程，大家只需了解，不需全部理解.

现在再来重新总结一下求解函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 图像的步骤. 首先找出函数的对称中心，对称中心的坐标是 $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$. 然后再判断 $ad-bc$ 的值大于 0 还是小于 0，如果大于 0，则函数的图像在二、四象限；如果小于 0，则函数的图像在一、三象限.

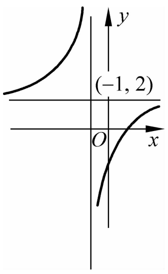


图　1-4-2

现在用这种方法来求函数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$，$x\in(1,3)$ 的值域. 先看该函数的图像，其对称中心为 $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$，代入数据得 $(-1,2)$，又因为该函数中的 $ad-bc=5>0$，所以该函数的图像在二、四象限. 所以该函数的图像如图 1-4-2 所示.

现在再来观察这个图像，可以发现，对于 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ 这个函数，在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上也单调递减，但是在 $(-1,+\infty)$ 上的值始终大于 $(-\infty,-1)$ 的值. 而 $(1,3)\subseteq(-1,+\infty)$，因此 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ 在 $(1,3)$ 上也是递减的. 当我们用这种方法来解决类似函数的值域问题时，就是要先找出 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的对称中心，即 $\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$，然后再确定 $ad-bc$ 的正负，如果为正，那么该函数在 $\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$ 上单调递增，且在 $\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)$ 上的值总是大于在 $\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$ 上的值；如果为负，那么该函数在 $\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$ 上单调递减，且在 $\left(-\infty,-\dfrac{d}{c}\right)$ 上的值总是小于在 $\left(-\dfrac{d}{c},+\infty\right)$ 上的值. 因此，

我们可以根据这个结论代入已知函数的定义域，从而求出该函数的值域.

1.4.3 例题解析

【例 1.4.1】 （2013·重庆）$\sqrt{(3-a)(a+6)}$（$-6\leqslant a\leqslant 3$）的最大值为（ ）.

A. 9　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】 求 $\sqrt{(3-a)(a+6)}$ 的最大值，其实就是求 $(3-a)(a+6)$ 的最大值，一种比较直接的方法就是将 $(3-a)(a+6)$ 变为二次函数，即 $-a^2-3a+18$，此时 a 取 $-\frac{3}{2}$ 时该二次函数取最大值，即 $\frac{9}{2}$. 但是一定要习惯使用均值不等式，常见的均值不等式有两种，第一种是 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，这个式子也可以变形为 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$；第二种是 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，那么这道题能不能用均值不等式来解决呢？不难发现这个式子形似第二种均值不等式，因此可得到 $(3-a)(a+6)\leqslant\left(\frac{3-a+a+6}{2}\right)^2$，所以 $(3-a)(a+6)\leqslant\left(\frac{9}{2}\right)^2$，当且仅当 $3-a=a+6$ 的时候等号成立，即 $a=-\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{(3-a)(a+6)}$ 取得最大值为 $\frac{9}{2}$，因此该题选择 B 项.

【点评】 本题可以用二次函数求极值的方法或均值不等式来做，属于求函数值域类型题中较为基础的题型.

【例 1.4.2】 （2016·北京）求函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$（$x\geqslant 2$）的最大值.

【解析】 首先来观察一下，这个函数是个分式函数，而且分母和分子最高次数相同，因此这是个齐次式，所以应该优先考虑分离常数法，像这种式子分母和分子都存在自变量 x，当 x 变化时，分母和分子都会变化，因此我们不能确定整个分式发生了什么变化，而分离常数法可以将上下都变化的分式变为唯一的变化. 现在将 $\frac{x}{x-1}$ 来分离常数，即 $\frac{x}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$，分离完常数之后，我们可以发现，整个式子里面只有分母中有自变量 x 了，因为自变量在分母上，当自变量 x 增大时，整个式子是减小的，所以这个函数是递减的，因此函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$（$x\geqslant 2$）的最大值在 x 取最小值时取得，此时 $x=2$，$f(x)=2$，所以函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$（$x\geqslant 2$）的最大值为 2.

【点评】 本题用分离常数的方法来求解函数的值域，属于分离常数法求函数值域中较为经典的题型，这种题型同学们一定要练熟.

【例 1.4.3】 求 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}d|PQ|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$ 的最大值.

【解析】 先来解释一下这个题干，这是高考中解析几何求最值的最后一步，高考中解析几何的最后一步一般让求一个图形面积的最值，我们把这个极值用函数构建出来，就是题干的样子. 现在来求 $\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$ 的最大值. 首先观察这个式子，会发现前三种方法都不能解出此题，所以应该选择换元法. 令 $t=\sqrt{4k^2-3}>0$，所以 $4k^2=t^2+3$，所以 $\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}=\frac{4t}{t^2+4}$（$t>0$），我们再来观察这个新式子，发现分子和分母的最高次项不同，是个异次式，所以我们要用均值不等式法来求解此式的极值，$\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}$（$t>0$），又因为 $t+\frac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}$，所以 $t+\frac{4}{t}$ 的最小值为 4，所以 $\frac{4}{t+\frac{4}{t}}$ 的最大值为 $\frac{4}{\left(t+\frac{4}{t}\right)_{\min}}=$

$\frac{4}{4}=1$，又因为当 $t=\frac{4}{t}$ 时，$t+\frac{4}{t}$ 取最小值，且 $t>0$，所以此时 $t=2$. 又因为 $t=\sqrt{4k^2-3}$，所以 $k=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{7}}{2}$. 所以当 $k=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，$S_{\triangle OPQ}$ 取最大值，最大值为 1.

【点评】 本题的式子是高考压轴题平面解析几何题的最后总结的一步，是一道很经典的题目，同学们根据这个题也可以加深对解析几何的理解.

【例 1.4.4】（2006 · 福建）求 $y=-\frac{k^2}{2k^2+1}$ 的值域.

【解析】 $y=-\frac{k^2}{2k^2+1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4k^2+2}\in\left(-\frac{1}{2},0\right]$.

【点评】 本题考查了用分离常数的方法求解值域.

1.4.4　强化练习

【练习 1.4.1】 求 $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$，$x\in(1,3)$，求 $f(x)$ 的值域.

【解析】 首先观察 $\frac{2x-3}{x+1}$，发现分母和分子的最高次项都是一次，因此这个式子也是个齐次式，所以就要考虑分离常数法，我们将 $\frac{2x-3}{x+1}$ 分离常数，$\frac{2x-3}{x+1}=\frac{2x+2-5}{x+1}=2-\frac{5}{x+1}$，因为随着自变量 x 增加，$\frac{5}{x+1}$ 减小，$2-\frac{5}{x+1}$ 的值增加，所以这个函数是一个增函数，所以 $f(x)$ 的最小值在 $x_{\min}$，即 $x=1$ 处取，即 $f(x)_{\min}=f(1)=-\frac{1}{2}$；$f(x)$ 的最大值在 $x_{\max}$，即 $x=3$ 处取，即 $f(x)_{\max}=f(3)=\frac{3}{4}$，所以函数 $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

【点评】 本题中的函数模型是一种较为经典的函数模型，是一个含有分式的函数，且分式是一个齐次式，我们只要掌握了方法就可以较为轻松地做出来.

【练习 1.4.2】 求分式 $\frac{2k^4+4k^2+2}{2k^4+5k^2+2}$ 的最大值.

【解析】 首先来解释一下本题，这也是高考中解析几何题的最后一步，高考中解析几何题最后一步中让求一个弦长的极值，该极值用函数表示出来的结果就是题干. 首先观察分子和分母的最高次相同，所以这是齐次式，应用分离常数法，即 $\frac{2k^4+4k^2+2}{2k^4+5k^2+2}=\frac{2k^4+5k^2+2-k^2}{2k^4+5k^2+2}=1-\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$，现在来求 $1-\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$ 中 $\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$ 的极值，通过观察这个式子发现分子与分母中最高次不同，则该分式为异次式，因此应用均值不等式法，将 $\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$ 化简，即 $\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}=\frac{1}{2k^2+\frac{2}{k^2}+5}$，由均值不等式得 $2k^2+\frac{2}{k^2}\geqslant 2\sqrt{2k^2\times\frac{2}{k^2}}$，即 $2k^2+\frac{2}{k^2}\geqslant 4$，$\frac{1}{2k^2+\frac{2}{k^2}+5}$ 的最小值为 $\frac{1}{\left(2k^2+\frac{2}{k^2}\right)_{\min}+5}$，即 $\frac{1}{9}$，$1-\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$ 取最大值时，$\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$ 取最小值 $\frac{1}{9}$，所以 $1-\frac{k^2}{2k^4+5k^2+2}$ 的最大值为 $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$，所以该式子的最大值为 $\frac{8}{9}$.

对于“二次三项分式型函数”，其通式为 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$，若要求解其值域，一般情况要知道它

的单调性，而要得知单调性，就要借助导数工具. 但显而易见，对于这类函数的导数，如果采用常规操作并不好求. 其导数可以用行列式来解决，由除法的求导法则可知其导函数 $f'(x)$ 的分母一定是大于零的. 提取 $f'(x)$ 的有效部分即分子部分，不妨设为 $g(x)$，则有 $g(x)=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$. 由二阶行列式的运算法则 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ 便可得 $f'(x)$ 的有效部分 $g(x)$ 的表达式，从而得到 $f(x)$ 的单调性，进而求得值域. 大家一定要注意中间一次项前面的系数"2".

【点评】 本题的式子是高考压轴题平面解析几何题的最后一步，也是一道很经典的题目，同时该函数的形式 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$，也可以用行列式的思想来解决，同学们根据这个题也可以加深对平面解析几何的理解.

求函数的值域的方法这里就结束了，我们来做个总结，凡是目前遇到的不用画图的求函数值域的题目，无外乎使用了 4 种方法，即均值不等式法、分离常数法、求导法、换元法. 其中均值不等式的使用标志是异次式分式；分离常数法的使用标志是齐次式分式；求导法是大招，但是计算量大；换元法主要针对一些比较麻烦的式子，一般是用低次换高次，这 4 种方法在高考中出现的频率依次是均值不等式法→分离常数法→求导法→换元法.

另外，对于形式为 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 和 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ 的函数，我们也可以用行列式来求其值域.

1.5 函数的单调性

1.5.1 知识点：函数单调性的定义

函数的单调性也可以叫作函数的增减性. 当函数 $f(x)$ 的自变量在其定义区间内增大（或减小）时，函数值 $f(x)$ 也随着增大（或减小），则称该函数在该区间上具有单调性. 我们可以简单地概括为，增函数为随着 x 的增加，$f(x)$ 增加；减函数为随着 x 的增加，$f(x)$ 减小. 函数的单调性与奇偶性最大的区别在于单调性是个局部性质. 为什么这样说呢？因为单调性一定是针对函数定义域的某一部分来说的，函数单调递增或单调递减一定是针对函数的某个区间来说的，而奇偶性是对于整个函数而言的，当提到奇偶性肯定是指某个函数是奇函数或者是偶函数或者是非奇非偶函数. 请大家考虑函数 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ 是不是增函数？答案是否定的，我们只能说当 $x\in(-\infty,0)$ 时，是增函数；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，也是增函数. 虽然两段都是增函数，但是把两段合在一起时，这个函数就不是增函数了. 因为任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，不一定有 $f(x_1)-f(x_2)<0$，所以这个函数并不是一个增函数.

1.5.2 知识点：求函数单调性的方法

(1) 求函数单调的方法可以概括为以下 5 类.

$f(x)$，$h(x)$ 为增函数，$f(x)+h(x)=g(x)$，则 $g(x)$ 为增函数；

$f(x)$，$h(x)$ 为减函数，$f(x)+h(x)=g(x)$，则 $g(x)$ 为减函数；

$f(x)$ 为增函数，$h(x)$ 为减函数，$f(x)-h(x)=g(x)$，则 $g(x)$ 为增函数；

$f(x)$ 为减函数，$h(x)$ 为增函数，$f(x)-h(x)=g(x)$，则 $g(x)$ 为减函数；

$f(x)$，$h(x)$ 都为增函数，且 $f(x)>0$，$h(x)>0$，$f(x)\cdot h(x)=g(x)$，则 $g(x)$ 为增函数.

其实这 5 条我们也可以简写为$\begin{cases}\nearrow+\nearrow=\nearrow\\ \searrow+\searrow=\searrow\\ \nearrow-\searrow=\nearrow\\ \searrow-\nearrow=\searrow\\ \nearrow\cdot\nearrow=\nearrow\end{cases}$.

(2) 对于复合函数 $f[g(x)]$的增减性,满足同增异减的规律,我们要同时考虑 $f(x)$和 $g(x)$的增减性,若 $f(x)$和 $g(x)$同为增函数或同为减函数,则 $f[g(x)]$也为增函数,若 $f(x)$和 $g(x)$中一个函数为增函数,一个函数为减函数,则 $f[g(x)]$为减函数.

(3) 求导,导数>0,原函数为增函数;导数<0,原函数为减函数.

(4) 利用定义.定义法可以分为两种,第一种方法为作差法,第二种方法为作商法.作差法是任取 $f(x)$定义域上的 $x_1,x_2(x_1>x_2)$,若都有 $f(x_1)-f(x_2)>0$,则该函数为增函数;若都有 $f(x_1)-f(x_2)<0$,则该函数为减函数.作商法是任取 $f(x)$定义域上的 $x_1,x_2(x_1>x_2)$,若都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,则该函数为增函数;若都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$,则该函数为减函数.

对于判断函数的单调性一定要按照这 4 种方法来做,而且不要总是想着使用求导法,因为求导法计算量大,会浪费很多时间,这 4 种方法也是按照高考中出现频率的高低来排列的,而且对于第 4 种的作差和作商法,用于求具体函数的单调性已经应用得很少了,一般都是将这种方法应用于求抽象函数的单调性.例如,如果存在$[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)>0$ 和$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,那么这个函数为增函数.

1.5.3 例题解析

【例 1.5.1】 (2018·新课标Ⅰ文)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x} & x\leqslant 0\\ 1 & x>0\end{cases}$,则满足 $f(x+1)<f(2x)$的取值范围是( ).

A. $(-\infty,-1]$ B. $(0,+\infty)$ C. $(-1,0)$ D. $(-\infty,0)$

【解析】 观察 $f(x)$解析式可得 $f(x)$在$(-\infty,0)$上是减函数,$(0,+\infty)$上是常量函数.而 $f(x)$在整个定义域上并非增函数.因此分类讨论,当 $x+1<0$ 时,$2x<0$,此时 $f(x)$是减函数,因此只需满足 $x+1>2x\Rightarrow x<1$,综合可得 $x<-1$;当 $x+1,2x$ 都大于零时,$f(x+1)=f(2x)$,不满足题意;当 $x+1>0$ 且 $2x<0$ 时,满足题意,此时 $x\in(-1,0)$.三种情况取并集可得 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$,由于当 $x=-1$ 时,$f(0)=1<f(-2)=4$ 满足题意,因此最终 x 的取值范围是$(-\infty,0)$.故选 D 项.

【点评】 以上解法为通法,但本题作为客观题,得到答案并不必如此,可以采取赋值排除,请读者自行尝试解答.

【例 1.5.2】 (2014·天津)函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$的单调递增区间是( ).

A. $(0,+\infty)$ B. $(-\infty,0)$ C. $(2,+\infty)$ D. $(-\infty,-2)$

【解析】 $f(x)$为复合函数,其定义域为 $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$,其单调性遵循"同增异减"的规律.令 $u=x^2-4$,因而 $y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在定义域上是减函数,因此要想满足题意,就要求函数 $u=x^2-4$ 的递减区间,而$u=x^2-4$ 的单调递减区间为$(-\infty,0)$,从而可得 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-2)$.故选 D 项.

【点评】 本题考查了复合函数的单调性问题.

【例 1.5.3】 (2011·天津)设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$,对任意的 $x\in[1,+\infty)$,$f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立,求 m 的取值范围.

【解析】 显然 $m\neq 0$，而且 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，因此当 $m>0$ 时，$f(mx)+mf(x)<0$ 不一定成立. 所以只有 $m<0$ 时才有可能满足题意. 当 $m<0$ 时，显然 $g(x)=f(mx)+mf(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数. 所以 $g(x)_{\max}=g(1)=m-\dfrac{1}{m}$，因此要想满足题意，就要满足 $g(x)_{\max}=g(1)=m-\dfrac{1}{m}<0$，解得 $m<-1$. 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

【点评】 本题考查了函数单调性的判断以及恒成立问题.

【例 1.5.4】 (2017·新课标Ⅰ)设 x,y,z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则(　　).

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$　　C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2x<5z$

【解析】 设 $2^x=3^y=5^z=k$，则 $x=\dfrac{\ln k}{\ln 2}$，$y=\dfrac{\ln k}{\ln 3}$，$z=\dfrac{\ln k}{\ln 5}$. 从而 $2x=\dfrac{2\ln k}{\ln 2}$，$3y=\dfrac{3\ln k}{\ln 3}$，$5z=\dfrac{5\ln k}{\ln 5}$. 由于 x,y,z 为正数，故 $k>1$，从而只需要比较 $\dfrac{2}{\ln 2}$，$\dfrac{3}{\ln 3}$，$\dfrac{5}{\ln 5}$ 的大小. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，则 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$. 当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 递增. 从而 $f(3)<f(4)<f(5)$，而 $f(4)=\dfrac{4}{\ln 4}=f(2)=\dfrac{2}{\ln 2}$. 即有 $\dfrac{3}{\ln 3}<\dfrac{2}{\ln 2}<\dfrac{5}{\ln 5}$，也即 $3y<2x<5z$. 故选 D 项.

【点评】 本题表面上为比较大小，实则考查了利用函数的单调性研究不等式的问题，其中在判断单调性时采用了导数工具.

【例 1.5.5】 (2017·山东)若函数 $\mathrm{e}^x f(x)$ ($\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数)在定义域上单调递增，则称 $f(x)$ 具有 M 性质. 下列函数中所具有 M 性质的函数的序号为________.

① $f(x)=2^{-x}$；② $f(x)=3^{-x}$；③ $f(x)=x^3$；④ $f(x)=x^2+2$.

【解析】 ①$\mathrm{e}^x f(x)=\mathrm{e}^x\cdot 2^{-x}=\mathrm{e}^x\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)^x$，由于 $\dfrac{\mathrm{e}}{2}>1$，故递增. 所以 $f(x)$ 具有 M 性质；②同理由于 $\dfrac{\mathrm{e}}{3}<1$，故递减，即 $f(x)$ 不具有 M 性质；③不妨令 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)=x^3\mathrm{e}^x$，$g'(x)=x^2\mathrm{e}^x(x+3)$，而 $f(x)=x^3$ 定义域为全体实数，而 $g'(x)=x^2\mathrm{e}^x(x+3)$ 显然不满足在实数集上恒正，因此不满足；④不妨令 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+2)$，$g'(x)=\mathrm{e}^x[(x+1)^2+1]>0$ 恒成立，所以满足. 综上所述，①④满足.

【点评】 本题披着新定义的外衣考查了函数的单调性，在判断①和②两个函数时，尽量变形，利用指数函数来判断单调性，而不要求导，以免增加计算量.

1.5.4 强化练习

【练习 1.5.1】 (2015 秋·河南月考)已知函数 $y=f(x)$，给出下列结论：

① 若对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

② 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶数，且在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，$f(-1)=0$，则 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,1)$；

③ 若 $f(x)$ 是奇函数，在定义域 $(-2,2)$ 上单调递增，则不等式 $f(2+x)+f(1-2x)>0$ 的解集为 $(-\infty,3)$.

其中正确的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【解析】 对于结论①，明显就是求函数单调性方法中利用定义求函数单调性的判别式，我们再来证明一下，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，即 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 x_1-x_2 为同号，当 x_1-x_2 大于 0 时，$f(x_1)-f(x_2)$

也大于 0；当 x_1-x_2 小于 0 时，$f(x_1)-f(x_2)$ 也小于 0，即对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1>x_2$，$f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以结论①正确.

对于结论②，用画图的方法来解释.

先根据“若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶数，且在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，$f(-1)=0$”这个条件画出图像来，如图 1-5-1 所示，可以看出 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，所以结论②错误.

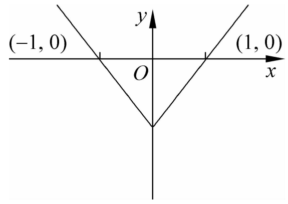


图 1-5-1

对于结论③，$f(2+x)+f(1-2x)>0$ 可变形为 $f(2+x)>-f(1-2x)$，又因为 $f(x)$ 为奇函数，奇函数满足 $f(x)=-f(-x)$，所以 $-f(1-2x)=f(2x-1)$，所以 $f(2+x)>-f(1-2x)$，也就是 $f(2+x)>f(2x-1)$，又因为该函数的定义域为 $(-2,2)$，所以在此我们应写出三个不等式来，即 $\begin{cases}-2<2+x<2\\-2<2x-1<2\\2+x>2x-1\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{2}<x<0$，所以 $f(2+x)+f(1-2x)>0$ 的解为 $-\dfrac{1}{2}<x<0$，而不是 $(-\infty,3)$，所以结论③错误. 在结论③中要注意，在讨论一个函数单调性的时候，一定要考虑到定义域的问题.

由于该题只有结论①正确，综上所述，本题选择 B 项.

【点评】 本题考查了抽象函数求单调性的方法，且使用了定义法证明，是一道难度较低的求函数单调性问题的题目.

【练习 1.5.2】 (2015 秋·黄石校级期末)已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-a}(x\neq a)$.

(1) 若 $a=-2$，试证 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 内单调递增；

(2) 若 $a>0$ 且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递减，求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 我们分别用两种方法来解决第一问.

① 分离常数法：当 $a=-2$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x+2}$. 先用分离常数法处理一下，即 $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+2-2}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$，即 $f(x)=1-\dfrac{2}{x+2}$，随着 x 的增加，$\dfrac{2}{x+2}$ 减小，$-\dfrac{2}{x+2}$ 增加，$1-\dfrac{2}{x+2}$ 也增加，所以 $f(x)=1-\dfrac{2}{x+2}$ 在定义域上是单调递增的，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上也是单调递增的.

② 求导法：当 $a=-2$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x+2}$. $f'(x)=\dfrac{2}{(x+2)^2}$，我们可以观察到 $f(x)$ 的导数是恒大于 0 的，所以 $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ 在定义域上是单调递增的，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上也是单调递增的.

(2) 用传统方法来处理本题. 设 $x_1>x_2>1$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1-a}-\dfrac{x_2}{x_2-a}=\dfrac{a(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-a)}$，所以若要使 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，应使 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $\dfrac{a(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-a)}<0$，又因为 $a>0$，$x_2-x_1<0$，若要保证 $\dfrac{a(x_2-x_1)}{(x_1-a)(x_2-a)}<0$，应保证 $(x_1-a)(x_2-a)>0$，又因为 $x_1>x_2>1$，所以只要保证 $a\leqslant 1$，则就能保证 $(x_1-a)(x_2-a)>0$，所以 a 的取值范围是 $(0,1]$.

【点评】 本题通过利用两种方法求解该函数的单调性，即分离常数法和求导法，在做这类题目的时候能不用求导法就不要使用求导法，因为求导法一般计算量较大.

【练习 1.5.3】 (2015·福建)若函数 $f(x)=\begin{cases}-x+6 & x\leqslant 2\\3+\log_a x & x>2\end{cases}(a>0$，且 $a\neq 1)$ 的值域是 $[4,+\infty)$，

求实数 a 的取值范围.

【解析】 因为当 $x\leqslant 2$ 时，$f(x)$是一个单调递减的函数，且 $f(x)_{\min}$为 $f(2)$，即 $-2+6=4$，所以在该函数的上半段 $x\leqslant 2$ 时，$f(x)$的值域为$[4,+\infty)$，若要保证整个函数的值域都为$[4,+\infty)$，则只需满足下半段的值域是上半段值域的子集即可.此时应该用分类讨论的方法来解不等式.

当 $a>1$ 时，$f(x)=3+\log_a x(x>2)$是一个单调递增的函数，要满足其值域属于$[4,+\infty)$，就需满足 $3+\log_a x$ 的最小值大于或者等于 4，即 $3+\log_a 2\geqslant 4$.解不等式，得到 $a\leqslant 2$，又因为此时 $a>1$，所以当 $a>1$ 时，a 的取值范围是$(1,2]$；当 $0<a<1$ 时，$f(x)=3+\log_a x(x>2)$是一个单调递减的函数，当 $x>2$ 时，此时其值域肯定是会接近负无穷的，所以当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=3+\log_a x(x>2)$的值域不可能是$[4,+\infty)$的子集，该种情况不成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $1<a\leqslant 2$.

【点评】 本题考查分段函数的单调性问题，同时分段函数中有对数函数，因此也需要借助分类讨论的思想来解决本题.

这一小节到这里就结束了，我们在做此类题的时候，一定要紧抓总结的 4 种方法，注意函数的定义域问题，避免高考中在类似的题型上失分.

1.6 对数的运算

在此先来总结一下，常见初等函数分别有一次函数、二次函数、三次函数、对勾函数、三角函数、幂函数、指数函数、对数函数等.其中一次函数是初中学的；二次函数以后会有专门章节来讨论；三次函数是求导的时候用到的；对勾函数在上一节已经进行过讨论；幂函数和指数函数主要是考查运算，这个运算法则我们初中也已经学过；对数函数考查的是对数运算，而对数运算是高中才开始学习的内容.

1.6.1 知识点：对数的定义

如果 $N=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$，即 a 的 x 次方等于 $N(a>0$，且 $a\neq 1)$，那么数 x 叫作以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$.其中，a 叫作对数的底数，N 叫作真数，x 叫作“以 a 为底 N 的对数”.比如：$a^b=M$，那么 $b=\log_a M$，b 相当于把 a 变成 M 的一种方法，所以 $a^{\log_a M}=M$.为什么呢？因为 $\log_a M$ 就相当于把 a 变成 M 的一种方法，对于 a，对它施加一种把 a 变成 M 的方法，它就变成 M 了.利用这个理论，把 3 变成以 2 为底的对数，只要对 2 施加一个把 2 变成 3 的方法就行了，即 $3=2^{\log_2 3}$，把 7 变成以 5 为底的对数，只要对 7 施加一个把 7 变成 5 的方法就行了，即 $7=5^{\log_5 7}$.

1.6.2 知识点：对数的运算法则

对数的运算法则包括 $\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$，$\log_a x-\log_a y=\log_a \dfrac{x}{y}$，$\log_a x^a=a\log_a x$.

换底公式为 $\log_b M=\dfrac{\log_a M}{\log_a b}(a>0$，且 $a\neq 1)$.根据换底公式可以推导出 $\log_a b\cdot\log_b a=\dfrac{\ln a}{\ln b}\cdot\dfrac{\ln b}{\ln a}=1$，$\log_{a^m} b^n=\dfrac{n\ln b}{m\ln a}=\dfrac{n}{m}\cdot\log_a b$.

1.6.3 例题解析

【例 1.6.1】 (2018·新课标Ⅲ理)设 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则(　　).

A. $a+b<ab<0$　　B. $ab<a+b<0$　　C. $a+b<0<ab$　　D. $ab<0<a+b$

【解析】 对于比较大小，常见有两种策略，即比差、比商.注意到$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}$，因此采取“比商”，