第1章　复数与三角函数简史

1.1　复数简史

1.1.1　怪物的出现

古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras,公元前580—前500)认为:“宇宙一切事物的度量都可用整数或整数的比来表示,除此之外,就再没有什么了。”他的观点被他的学生希帕索斯(Hippasus,约公元前530—前500年,生卒年不详)彻底颠覆了,希帕索斯利用毕达哥拉斯证明的勾股定理(西方称其为毕达哥拉斯定理,当毕达哥拉斯证明了这个定理后,其学派内外异常兴奋,宰了100头牛以祭祀缪斯女神,故也称为百牛定理)证明了单位正方形的对角线长度就不是毕达哥拉斯所说的整数或整数的比,后人称之为根号2。这一发现不仅令毕达哥拉斯难堪,也让希帕索斯为此命丧大海,这就是历史上著名的第一次数学危机。根号2的出现,不仅让人类认识了一类新的数——无理数,也使数学的发展进入了一个新的里程碑。尽管人们无法否认无理数的存在,不过无理数的阴影笼罩着数学界达2000年之久。

16世纪中叶,当欧洲人还没有完全理解负数、无理数时,数学上又出现了一个“怪物”,这就是复数。实际上,早在公元1世纪,希腊数学家海伦(Heron of Alexandria,公元62年左右,生卒年不详)在解决平顶金字塔不可能问题的时候就提到过负数方根,这是关于复数最早的文献记载。但复数真正引起关注并让大家感到迷惑则是源于卡尔达诺(Girolamo Cardano,1501—1576)的三次方程求根公式,那个时候大家并不认为复数是个实实在在存在的东西,然而一些具有实根的三次方程用卡尔达诺的求

根公式求解时却出现了负数的平方根。例如方程 $x^3=15x+4$ 有三个实根 $4,-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}$,但把 $p=15,q=4$ 代入卡尔达诺公式

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

时,平方根内部出现了负数 $\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3=-121<0$,用这个公式并不能得到上面的三个实根,而是下面这个莫名其妙的“怪物”:

$$x=\sqrt[2]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}。$$

卡尔达诺的确也考虑过二次方程问题,他在《重要的艺术》(1545)一书中提出了一个问题:把 10 分成两部分,使其乘积为 40。它等价于求解二次方程 $x(10-x)=40$,这个方程的根是 $5-\sqrt{-15}$ 和 $5+\sqrt{-15}$,卡尔达诺声称:“不管会受到多大的良心责备,”把 $5-\sqrt{-15}$ 和 $5+\sqrt{-15}$ 相乘,可得 $25-(-15)=40$。接着他评价道:“算术就是这样神妙地搞下去,它的目标,正如常言所说,是既精致又不中用的。”法国数学家笛卡儿(Descartes,1596—1650)不承认复根,他造出了“虚数”(imaginary number)的概念。那时人们对复数的认识可以用莱布尼茨(Leibniz,1646—1716)的话来概括:“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示,这就是那个理想世界的祥兆,那个介于存在与不存在之间的两栖物,那个我们称之为虚的 -1 的平方根。”在复数找到它的几何与物理背景之前虽然常被大家提及,但并没有引起足够的重视,在经历了 200 年数学与自然科学漫长的发展之后,人们发现了它的几何与物理背景,这才使得复数广为大家认同,成为数学的重要概念,随之发展起来的复变函数对数学、物理学都产生了深远的影响。

1.1.2 虚数的萌芽

如前所述,复数由萌芽直到最终为人们普遍接受经历了相当长的时

间。卡尔达诺、莱布尼茨等数学家们大概没有料想到复数特别是复变函数理论如今已是一个内容十分丰富并在数学与自然科学的各个领域发挥了举足轻重影响的重要理论。

虚数概念诞生于“荒谬的矛盾”中，带着“虚无缥缈”的色彩。虚数概念最早的确源于高次方程的求解。众所周知，代数方程的求解一直是古代数学的核心问题之一。人们很早就懂得二次方程的配方法，从而发明了求根公式。古希腊数学家丢番图(Diophantus，200—284)在求解一元二次方程过程中就曾遇到过负数开平方的情形。关于负数的平方根，在16世纪之前就常常会遇到，但由于它缺少实际背景，数学家们均认为这类方程没有意义。

虚数再次出现于1545年，如前所述，在意大利文艺复兴时期，数学家卡尔达诺在《重要的艺术》一书中提到一个后来常被引用的问题：将10分成两部分，使它们的乘积等于40。

卡尔达诺运用增量法求解方程组：

$$\begin{cases} x+y=10, \\ xy=40. \end{cases}$$

设 $x=5+t$，$y=5-t$ 即 $10=(5+t)+(5-t)$，于是

$$(5+t)(5-t)=40,$$
$$5^2-t^2=40,$$
$$t^2=5^2-40,$$
$$t^2=-15.$$

卡尔达诺比前人走多了一步，他进一步“形式化地”得出所谓的：

$$t=\sqrt{-15}, \quad 即 \quad \begin{cases} x=5+\sqrt{-15}, \\ y=5-\sqrt{-15}. \end{cases}$$

进而运用算术的平方差公式的“形式化运算”进行验算，得

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40.$$

卡尔达诺在书中指出这很“矫揉造作”，但却能自圆其说。

卡尔达诺突破传统地承认 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$ 这种数，并将它们

用于算术运算，而且发现：过程很“虚幻”但结果又不矛盾。

在《重要的艺术》中卡尔达诺进一步系统地讨论了高次方程求解的相关问题，包括三次、四次代数方程的公式解。数学史上三次方程一般解法的优先归属权本属于塔尔塔利亚(Tartaglia，1499—1557，意大利)，虽然卡尔达诺在书中也作了解法来源的说明，但由于《重要的艺术》的影响力，三次方程的求根公式最终还是被冠以“卡尔达诺公式”或“卡当(或卡丹)公式”流传开来。

按照欧洲人的习惯，那时的方程只有正系数项，在《重要的艺术》中卡尔达诺将各种含二次项的三次方程转化为下列4种不含二次项的方程：

$$x^3=px+q,\quad x^3+px=q,\quad x^3+px+q=0,$$

$$x^3+q=px\text{(其中 }p,q\text{ 均为正数)。}$$

《重要的艺术》还对每种方程解的正确性分别给出了几何上的直观证明。探讨过程并非一帆风顺，卡尔达诺、塔尔塔利亚和此后的另一位意大利数学家邦贝利(R. Bombeli，1526—1572)都曾讨论了三次方程求解的一个不能合理解释的疑难点，即三次方程的3个根是不同的实数，但此时方程的求根公式中却出现了负数的平方根，称之为“不可约”。

邦贝利通过观察和试算发现，三次方程 $x^3=15x+4$ 有3个根 4，$-2+\sqrt{3}$，$-2-\sqrt{3}$，这3个根都是实数。

另一方面邦贝利套用卡尔达诺公式却得到了令人困惑的不同结果。邦贝利考察了方程：

$$x^3=px+q\text{(其中 }p,q\text{ 均为正数)。}$$

设 $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$(分离变量法)，于是

$$(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})^3=p(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})+q,$$

$$u+v+3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v})=q+p(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}),$$

从而

$$\begin{cases}u+v=q,\\3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}=p,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}u+v=q,\\uv=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3。\end{cases}$$

u 和 v 是一元二次方程 $y^2-qy+\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$ 的根，即

$$u,v=\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}。$$

于是得到方程 $x^3=px+q$ 的一个正根

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}。$$

对于三次方程 $x^3=15x+4$，即取 $p=15,q=4$，于是出现了“不可约”情形，即 $\left(\frac{q}{2}\right)-\left(\frac{p}{3}\right)^3=-121<0$，求解公式中的被开平方数是负数，并非前面所说的 3 个实数根中的任何一个，而是一个不明的“怪物”

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}。$$

相比卡尔达诺和塔尔塔利亚，邦贝利又向前多迈了一步，他猜想既然 $2+\sqrt{-121}$ 和 $2-\sqrt{-121}$ 只相差一个符号，那么它们的三次方根也应该只相差一个符号。于是他假设

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b},\quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b},$$

由此解出：$a=2$ 和 $b=1$，于是得

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4。$$

聪明的邦贝利利用两个“怪物”$\sqrt{-121}$ 和 $\sqrt{-1}$ 解决了两种解法所得不同结果之间不和谐的矛盾，使得这个“怪物”多少有了一点存在的理由。笛卡儿将这个“怪物”命名为“虚数”(imaginary number)，$\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，记为 i，即 $\mathrm{i}^2=-1$。

邦贝利创造了复数的代数形式，并使用了与实数类似的算术运算法则。

1.1.3 几何与物理的发现

虽然邦贝利让复数有了存在的理由，但除了形式化的演算，复数并没有给人们带来实际的应用，很多人仍然对它感到疑惑，大多很谨慎地引用它。

人们对复数的疑惑主要源自它的“真实性”，在它诞生后的200年间，并没有引起人们足够的重视。这也带给我们一种启示，一个概念如果不能在任何学科中找到它的背景，它终究难以登堂入室得到人们的认同，大家也不敢轻易使用。即使名声之盛如欧拉，虽然他在文章中引用了复数，但他同时谨慎地声明：这个东西是没有意义的、是不存在的。甚至到了19世纪的1831年，德摩根（De Morgan，1806—1871）在他的著作《论数学的研究和困难》中依然认为：“已经证明了记号是没有意义的，或者甚至是自相矛盾或荒唐可笑的。然而，通过这些记号，代数中极其有用的一部分便建立起来了，它依赖于一件必须用经验来检验的事实，即代数的一般规则可以应用于这些式子（复数）。”直到物理学的介入，才给了复数数学上的名分。

18世纪末，韦塞尔、阿尔冈和高斯（Gauss）的工作逐渐使人们相信复数并非纯逻辑的产物，在物理与几何上都可以找到它的背景，最早发现复数与几何之间关系的人是丹麦测绘专家韦塞尔（C. Wessel，1745—1818），或许由于他的名气远不如高斯，虽然高斯相关的研究要比韦塞尔晚一些，但后人多以为发现复数重要背景的人是高斯。

出生于挪威的丹麦地图测绘专家韦塞尔于1797年以测绘问题为背景，运用平面向量工具和三角学工具研究了有关测量问题。韦塞尔发现，他所使用的代表方向的一个单位向量 ε 恰与200多年前数学中就出现的虚数单位 i 具有相同的特征，即 $\varepsilon^2=-1$。历史是如此惊人的巧合，数学上虚无缥缈的“怪物”“i”与几何中实实在在的“ε”不谋而合。

韦塞尔正是基于测量绘图实践工作的经验，抓住了有向线段的两个测绘要素：线段长度和线段方向，即长度和方向角以及它们的变化。

韦塞尔按照传统物理学中力的叠加，通过平面上平行四边形法则给出了有向线段的加法定义。他创造性地运用有向线段的“乘法”定义了有向线段的平面旋转变换。

韦塞尔首先引入了一个单位 ε，即长度为1和方向角为 90° 的有向线段。他指出：$+1$ 表示正的线段单位，ε 表示垂直于正单位且始于原点的有向线段单位，其方向角等于 90°（如图1.1(a)）；同理，有向线段单位 -1 的方向角

等于 180°，有向线段单位 $-\varepsilon$ 的方向角等于 $-90°$ 或 270°(如图 1.1(b))。

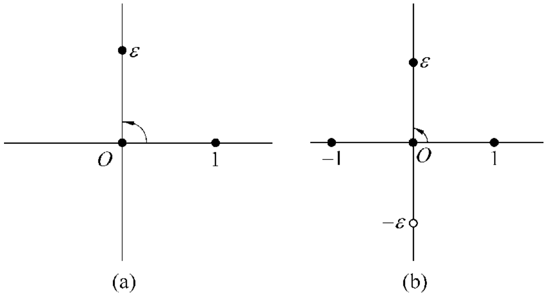

图 1.1

对于始自原点且偏离正单位的角度为 v 的单位长有向线段，如同力的分解方式分解为水平量 $\cos v$ 和垂直量 $\varepsilon\sin v$，然后将它们合成 $\cos v+\varepsilon\sin v$ 表示该单位长有向线段。同时 $\cos v+\varepsilon\sin v$ 也可以看作对一个向量绕原点逆时针旋转角度 v 的旋转变换(如图 1.2)。

给定单位长有向线段 $\cos v+\sin v$ 与另一个相对偏离正单位的角度为 u 的单位长有向线段 $\cos u+\varepsilon\sin u$，韦塞尔定义它们的"积"为偏离正单位角度为 $v+u$ 的单位长有向线段 $\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u)$。换言之，积的方向角等于两个因子方向角的和。韦塞尔说："可以证明以下两个公式对所有情形——一个角或两个角都是锐角或钝角，正的或负的，都可以轻而易举地有效应用。"于是，正向单位长线段逆时针旋转角度 v 后再继续逆时针旋转角度 u 可以表示为

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)(\cos u+\varepsilon\sin u)=\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u),$$

上式右边展开，即得(参见图 1.3)

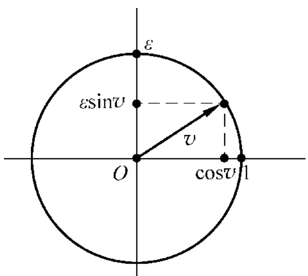

图 1.2

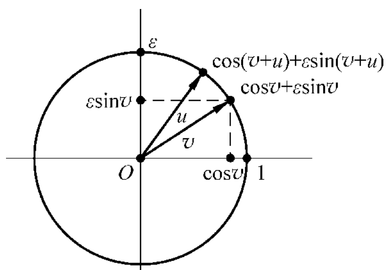

图 1.3

$$(\cos v+\varepsilon\sin v)(\cos u+\varepsilon\sin u)$$
$$=(\cos v\cos u-\sin v\sin u)+\varepsilon(\cos v\sin u+\sin v\cos u)。$$

韦塞尔进一步根据“乘积的方向角等于因子方向角之和”推导出：

$$(+1)(+1)=+1,\quad (+1)(-1)=-1,\quad (-1)(-1)=+1,$$
$$(+1)(+\varepsilon)=+\varepsilon,\quad (+1)(-\varepsilon)=-\varepsilon,\quad (-1)(+\varepsilon)=-\varepsilon,$$
$$(-1)(-\varepsilon)=+\varepsilon,\quad (+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1,\quad (-\varepsilon)(-\varepsilon)=-1。$$

韦塞尔成功地运用有向线段的乘法描述了物理上的平面旋转运动，这与用实数描述直线运动颇为相似，但增加了一个与实数轴垂直的新的方向向量：$(+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1$，即 $\varepsilon=\sqrt{-1}$，它恰好与200多年前三次方程求解中出现的$\sqrt{-1}$非常相似。韦塞尔构造的 $\cos v+\varepsilon\sin v$ 与邦贝利构造的形式化的 $2+\sqrt{-1}$ 在结构上惊人的一致。这个代表有向线段的量 $\cos v+\varepsilon\sin v$（即 $\cos v+i\sin v$）及其所定义的运算就是今天人们所说的“复数”及其运算，它是描述平面直线运动和旋转运动的简洁而有效的模型。正是清楚了复数的几何与物理背景，而且通过复数的代数运算可以方便有效地描述物体的平面运动，才使得在数学大门之外徘徊了200年之久的复数最终走进数学殿堂并迅速发展形成了一套对数学与自然科学产生了深远影响的理论——复变函数。如果没有复数，数学与物理学的发展将是另一番模样，更不可能有后来的四元数理论及八元数理论。

1.1.4 如果没有复数，物理学将如何发展

如果没有复数及其运算，人们也可以研究平面运动，但需要利用远没有复数方便的向量。平面运动分为直线运动和曲线运动，曲线运动可以分解为直线运动和旋转运动。向量的合成可以有效地描述力的合成，然而向量描述旋转运动就显得有点累赘与繁杂了，很多问题需要通过坐标系的旋转才能描述清楚。

所谓坐标系的旋转指的是坐标系绕坐标原点旋转一定角度形成新的

坐标系，平面内的点在不同坐标系下坐标将会发生变化。

如图 1.4 所示，假设坐标系绕原点的旋转角为 α（若顺时针旋转则 α 为负），这时，点 P 在原坐标系 xOy 下的坐标为 $P(x,y)$，在新坐标系 $x'Oy'$ 下的坐标为 $P(x',y')$。P 在不同坐标系之下的新坐标 (x',y') 与旧坐标 (x,y) 之间的关系为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}。$$

矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 在几何与物理学上都非常重要，它称为旋转矩阵，也叫正交矩阵，正交矩阵反映了物理学上的刚体运动。

在图 1.5 中，若质点 P 从 x 轴开始沿单位圆逆时针旋转了 α 角，然后又继续逆时针旋转 β 角，即旋转了 $\alpha+\beta$ 角。设质点在坐标系 xOy 中的坐标为 $(\tilde{x},\tilde{y})$，则 $(\tilde{x},\tilde{y})=(\cos(\alpha+\beta),\sin(\alpha+\beta))$，它可以通过矩阵运算获得。

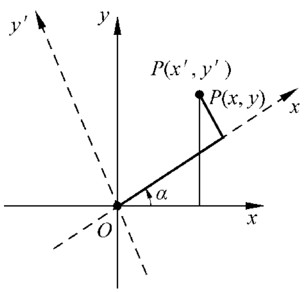

图 1.4

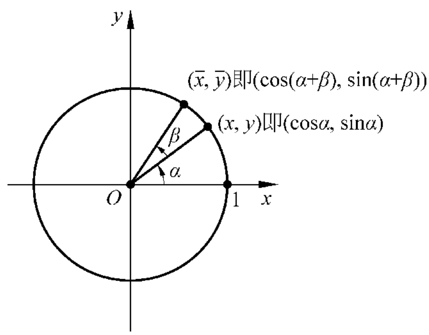

图 1.5

坐标系的旋转相当于图像反方向旋转，或者说质点旋转 β 角相当于坐标系反方向旋转相同的角度。所以，在坐标系 xOy 中，质点由坐标为 (x,y) 的点逆时针旋转 β 角到坐标为 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 的点，等价于坐标系旋转反方向 β 角，P 点在旧坐标系下的坐标 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 与在新坐标系中的坐标 (x,y) 之间有关系：

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}。$$

在坐标系 xOy 中，质点 P 从 x 轴开始沿单位圆逆时针旋转了 α 角，然后又继续逆时针旋转了 β 角，这时如何求质点 P 的坐标$(\tilde{x},\tilde{y})$？

如图 1.5，已知质点第一次旋转 α 角的坐标是$(x,y)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，即 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha$，那么质点第二次旋转 β 角所得点的坐标$(\tilde{x},\tilde{y})$可以如下计算：

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha\\ \sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha\end{pmatrix}。$$

由于 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，$\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)$，从而

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}。$$

这里涉及较复杂的矩阵运算，所以尽管向量在物理学上有比较重要的应用，但往往应用于简单的力的分解，而对于更复杂的旋转运动，计算动点的坐标$(\tilde{x},\tilde{y})$则涉及矩阵的运算，特别是涉及几次旋转的叠加时则需要作矩阵的乘法运算。例如质点旋转了 β 角，再旋转 β' 角，计算质点的坐标就要作矩阵乘法运算：

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta' & -\sin\beta'\\ \sin\beta' & \cos\beta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}。$$

与复数的代数运算相比，矩阵的运算显然复杂了许多，可见向量并非描述平面运动的最合适的工具。对于同样的问题，如果引入复数的四则运算则显得简单明了。通过复数可以将向量即二元数组像实数那样进行代数运算，从而将平面运动化归为复数的四则运算，充分体现了复数的优越性。如果不是韦塞尔、高斯等人在几何与物理上找到了复数的归属，恐怕