第七章　空间解析几何与向量代数

第一节　空间直角坐标系

一、教学基本要求

1. 掌握空间直角坐标系和空间点的直角坐标的概念.
2. 掌握空间两点间的距离公式.

二、答疑解惑

在空间直角坐标系中，xOy 坐标面上方点的坐标有何特征？

答　过 xOy 坐标面上方的点作垂直于 z 轴的平面，与 z 轴的交点一定在 z 轴的正半轴上，其竖坐标大于零，故在空间直角坐标系中，在 xOy 坐标面上方的点 $M\ (x,y,z)$ 的竖坐标 z 一定大于零.

三、经典例题解析

题型　空间直角坐标的概念

例 1　指出下列各点所在的坐标面或坐标轴：$A(-2,1,0)$，$B(0,-1,3)$，$C(1,0,0)$，$D(0,-1,0)$.

解　$A(-2,1,0)$ 在 xOy 坐标面上，$B(0,-1,3)$ 在 yOz 坐标面上，$C(1,0,0)$ 在 x 轴上，$D(0,-1,0)$ 在 y 轴上.

例 2　求点 $A(1,2,3)$ 分别关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点的坐标.

解　（1）点 $A(1,2,3)$ 关于 xOy 坐标面的对称点为 $(1,2,-3)$，关于 yOz 坐标面的对称点为 $(-1,2,3)$，关于 zOx 坐标面的对称点为 $(1,-2,3)$；（2）点 $A(1,2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $(1,-2,-3)$，关于 y 轴的对称点为 $(-1,2,-3)$，关于 z 轴的对称点为 $(-1,-2,3)$；（3）点 $A(1,2,3)$ 关于坐标原点的对称点为 $(-1,-2,-3)$.

例 3　求点 $A(4,-2,-3)$ 到 xOy 坐标面及 y 轴的距离.

解　点 A 到 xOy 坐标面的距离即为点 A 的竖坐标的绝对值，即点 A 到 xOy 坐标面的距离为 3；过点 A 作垂直于 xOy 坐标面的直线 AB，垂足为点 B，过点 B 再作垂直于 y 轴的直线 BC，垂足为点 C，于是直线 AC 垂直于 y 轴，即线段 AC 的长度为点 A 到 y 轴的距离，而在直角三角形 ABC 中，$|AC|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，于是点 A 到 y 轴的距离为 5.

四、习题选解

1．求点 $(-2,3,-5)$ 分别关于下列条件对称点的坐标：（1）xOy 坐标面；（2）y 轴；（3）坐标原点.

解　（1）关于 xOy 坐标面的对称点为 $(-2,3,5)$；（2）关于 y 轴的对称点为 $(2,3,5)$；（3）关于坐标原点的对称点为 $(2,-3,5)$.

2．求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$，z 轴及 xOz 坐标面的距离.

解　到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $d_1=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$，到 z 轴的距离为 $d_2=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，到 xOz 坐标面的距离为 $d_3=3$.

3．在 yOz 坐标面上，求与 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点等距离的点.

解　设所求点的坐标为 $(0,y,z)$，因为该点到 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$ 三点的距离相等，所以 $(z-1)^2+(y-5)^2=(z+2)^2+(y+2)^2+4^2$，并且 $(z-1)^2+(y-5)^2=(z-2)^2+(y-1)^2+3^2$，解得 $y=1$，$z=-2$，所以该点的坐标为 $(0,1,-2)$.

4. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：$A(1,-2,3)$，$B(2,3,-4)$，$C(2,-3,-4)$，$D(-2,-3,1)$.

解　$A(1,-2,3)$ 在第四卦限，$B(2,3,-4)$ 在第五卦限，$C(2,-3,-4)$ 在第八卦限，$D(-2,-3,1)$ 在第三卦限.

5．求点 (a,b,c) 分别关于（1）各坐标面；（2）各坐标轴；（3）坐标原点的对称点.

解　（1）关于 xOy 面的对称点为 $(a,b,-c)$，关于 yOz 面的对称点为 $(-a,b,c)$，关于 xOz 面的对称点为 $(a,-b,c)$；

（2）关于 x 轴的对称点为 $(a,-b,-c)$，关于 y 轴的对称点为 $(-a,b,-c)$，关于 z 轴的对称点为 $(-a,-b,c)$；

（3）关于坐标原点的对称点为 $(-a,-b,-c)$.

6．试证明以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明　由空间直角坐标系中两点距离公式得三角形三条边长分别为

$$AB=\sqrt{(4-10)^2+(1+1)^2+(9-6)^2}=7,\quad AC=7,\quad BC=7\sqrt{2}.$$

显然有 $AB=AC=7$, $AB^2+AC^2=BC^2$，所以此三角形不仅是等腰的还是直角的，即为等腰直角三角形.

第二节　向量及其加减法　向量与数的乘法

一、教学基本要求

1. 理解向量的概念.
2. 掌握向量的线性运算.
3. 理解向量的几何表示.

二、答疑解惑

1．任何向量都有确定的方向吗？

答　应当说，任何非零向量都有确定的方向，而零向量的方向是任意的.

2．设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，它们满足什么条件，可以使下面的式子成立?

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　（3）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

答　（1）由向量加、减法的平行四边形法则可知，在以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形中，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 都表示平行四边形两条对角线的长度. 若两条对角线的长度相等，则该平行四边形应是矩形，故当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

（2）根据前面的讨论可知，当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立.

（3）根据向量减法的三角形法则知，一般来说，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，仅当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi$ 时，才有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

3．向量之间可以比较大小吗？

答　不能. 向量是既有大小，又有方向的量，无所谓大小. 但是，向量的模是一个实数，所以说，两个向量可以比较它们模的大小.

4．下列式子的几何意义是什么?（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$；（2）$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，其中 λ,μ 为实数.

答　根据多个向量相加的法则，（1）表示当三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 依次首尾相接时，第三个向量的终点与第一个向量的起点相接，所以（1）表示或是三个向量共线，或是以三个向量为边构成一个三角形.

（2）表示向量 $\boldsymbol{c}$ 可由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经线性运算得到（也称 $\boldsymbol{c}$ 能由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性表示），因此，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，$\boldsymbol{c}$ 平行于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 确定的平面，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，$\boldsymbol{c}$ 平行于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$.

三、经典例题解析

题型　有关向量的运算问题

例 1　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.

解　$3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}=3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-2(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$.

例 2　已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，求一个向量 $\boldsymbol{c}$，使之平分向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

解　因为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，所以其单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 存在，且 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$. 以 $\boldsymbol{a}^0$，$\boldsymbol{b}^0$ 为邻边所生成的平行四边形是一个菱形，这个菱形的对角线平分对角，于是可取 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

例 3　在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，证明四边形 $ABCD$ 为梯形.

分析　利用向量关系证明四边形 $ABCD$ 中的一组对边互相平行，则可知四边形 $ABCD$ 为梯形.

证明　在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$，所以向量 $\overrightarrow{AD}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$，即四边形 $ABCD$ 中的一组对边 AD 和 BC 互相平行，于是四边形 $ABCD$ 为梯形.

例 4　设△ABC的边AB被点M和N三等分，已知$\overrightarrow{CM}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CN}=\boldsymbol{n}$，求$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$.

解　将CM延长到D，使得$|\overrightarrow{MD}|=|\overrightarrow{CM}|$，连接$AD$, ND，则$ACND$是平行四边形. 因此有$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CM}$，即$\overrightarrow{CA}=2\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$. 同理可得$\overrightarrow{CB}=2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$.

四、习题选解

1．如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

解　如图 7-1 所示，点M为对角线AC与BD的交点，则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，于是四边形$ABCD$是平行四边形.

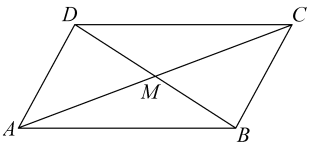

图　7-1

2．设$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$.

第三节　向量的坐标

一、教学基本要求

1. 理解向量在坐标轴上的投影.
2. 理解向量的坐标.
3. 掌握向量的模与方向余弦的坐标表达式.
4. 掌握单位向量的坐标表达式.

二、答疑解惑

1．如何确定一个向量？

答　确定向量通常有两种方法，一是依据向量既有大小又有方向的特点，分别求出它的大小（模）和方向（方向角或方向余弦）；二是求出向量的三个坐标，不妨设为a_x,a_y,a_z，即可写出向量$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

2．怎样求向量的坐标？

答　求向量的坐标，要根据已知的条件，采取不同的方法.

（1）若已知向量$\boldsymbol{a}$按基本单位向量的分解式，即$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$.

（2）若已知向量的起点坐标$M_1(x_1,y_1,z_1)$和终点坐标$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

（3）若已知向量$\boldsymbol{a}$的模和方向角α,β,γ，则$\boldsymbol{a}=\{|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,|\boldsymbol{a}|\cos\beta,|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\}$.

（4）若已知$\boldsymbol{a}$平行于$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则$\boldsymbol{a}=\{\lambda b_x,\lambda b_y,\lambda b_z\}$，其中数$\lambda$由$\boldsymbol{a}$的模和方向确定.

（5）根据向量的运算性质确定.

三、经典例题解析

题型　有关向量的坐标问题

例 1　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为 3，且其方向角为 $\alpha=\gamma=60°$，$\beta=45°$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

解　根据已知条件，可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=\frac{1}{2}$，于是

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha\boldsymbol{i}+|\boldsymbol{a}|\cos\beta\boldsymbol{j}+|\boldsymbol{a}|\cos\gamma\boldsymbol{k}=\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{3}{2}\boldsymbol{k}.$$

例 2　从点 $A(2,-1,7)$ 沿着向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的方向取 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{38}$，求点 B 的坐标.

解　设点 B 的坐标为 (x,y,z)，则向量 $\overrightarrow{AB}=\{x-2,\ y+1,\ z-7\}$. $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{3,\ 5,\ -2\}$，于是向量 $\overrightarrow{AB}$ 和向量 $\boldsymbol{s}$ 互相平行且方向一致，可得 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-7}{-2}$. 令 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-7}{-2}=k(k>0)$，则

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3k)^2+(5k)^2+(-2k)^2}=\sqrt{38},$$

解得 $k=1$，于是 $x=3k+2=5$，$y=5k-1=4$，$z=-2k+7=5$，所以点 B 的坐标为 $(5,4,5)$.

例 3　求与向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 平行的单位向量.

解　与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量有无数多个，但与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量只有两个，它们是 $\pm\boldsymbol{a}^0=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{14}}\{1,3,-2\}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$.

四、习题选解

1．已知 $A(1,0,2)$，$B(4,5,10)$，$C(0,3,1)$，$D(2,-1,6)$ 和 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求：（1）向量 $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}$ 在三个坐标轴上的投影及分向量；（2）$\boldsymbol{a}$ 的模；（3）$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦；（4）与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量.

解　（1）$\overrightarrow{AB}=\{3,5,8\}$, $\overrightarrow{CD}=\{2,-4,5\}$, $\boldsymbol{a}=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}-\boldsymbol{m}=\{13,7,51\}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $a_x=13$，$a_y=7$，$a_z=51$，在三个坐标轴上的分向量分别为 $a_x\boldsymbol{i}=13\boldsymbol{i}$，$a_y\boldsymbol{j}=7\boldsymbol{j}$，$a_z\boldsymbol{k}=51\boldsymbol{k}$.

（2）$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13^2+7^2+51^2}=\sqrt{2819}$.

（3）$\cos\alpha=\frac{13}{\sqrt{2819}}$，$\cos\beta=\frac{7}{\sqrt{2819}}$，$\cos\gamma=\frac{51}{\sqrt{2819}}$.

（4）与 $\boldsymbol{a}$ 平行的两个单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{2819}}\{13,7,51\}$ 与 $-\frac{1}{\sqrt{2819}}\{13,7,51\}$.

2．已知 $A(2,-1,7)$，$B(4,5,-2)$，线段 AB 交 xOy 面于点 P，且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，求 λ 的值.

解　设点 $P(x,y,0)$，则 $\overrightarrow{AP}=\{x-2,y+1,-7\}$，$\overrightarrow{PB}=\{4-x,5-y,-2\}$，又因为

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，可得$\begin{cases}x-2=\lambda(4-x),\\ y+1=\lambda(5-y),\\ -7=\lambda(-2),\end{cases}$解得$\lambda=\dfrac{7}{2}$.

3．一个向量的终点在点$B(2,-1,7)$，它在x轴、y轴和z轴上的投影依次为4，–4和7，求这个向量的起点A的坐标.

解　设$A(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AB}=\{2-x,-1-y,7-z\}$，由题意知$\overrightarrow{AB}=\{4,-4,7\}$，解得$x=-2$，$y=3$，$z=0$，于是点$A$的坐标是$(-2,3,0)$.

4．设向量$\boldsymbol{a}$的模为4，它与u轴的夹角为60°，求$\boldsymbol{a}$在u轴上的投影.

解　$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos 60^\circ=4\times\dfrac{1}{2}=2$.

5．设向量的方向余弦分别满足（1）$\cos\alpha=0$；（2）$\cos\beta=1$；（3）$\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

解　（1）此向量垂直于x轴，平行于yOz坐标面.

（2）此向量指向与y轴正方向一致，垂直于xOz坐标面.

（3）此向量平行于z轴，垂直于xOy坐标面.

第四节　数量积　向量积　混合积

一、教学基本要求

1. 熟练掌握用坐标表达式进行向量的数量积与向量积的运算.
2. 掌握两个向量夹角的求法.
3. 熟练掌握两个向量互相垂直、平行的条件.

二、答疑解惑

1．设$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，或$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，那么$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$成立吗?

答　在数量积和向量积的运算中，这种消去律不成立. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$等价于$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，因此只要$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$垂直就有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，但是$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$垂直不一定有$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 例如$\boldsymbol{a}=\{1,0,1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}$，$\boldsymbol{c}=\{0,1,1\}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1$，显然$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$等价于$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，因此只要$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$共线，就有$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$. 但是$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}$共线不一定有$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 例如$\boldsymbol{a}=\{1,0,1\},\boldsymbol{b}=\{1,1,0\},\boldsymbol{c}=\{0,1,-1\}$，则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\{-1,1,1\}$，显然$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

2．若向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是单位向量，那么$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$也是单位向量吗？

答　不一定. 由于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是个向量，只有当$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=1$时，它才是单位向量，但是$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，所以当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是单位向量且它们相互垂直时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$才是单位向量.

3．以下等式成立吗？为什么？

（1）$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$；　　（2）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2$.

答　在一般情况下，以上二式都不对.

（1）的左端是与$\boldsymbol{a}$平行的向量，而右端是与$\boldsymbol{b}$平行的向量. 只有当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$时，（1）才成立.

（2）的左端$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=\left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\right)^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cdot\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，而右端却没有$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，所以只有当$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$时，（2）才成立.

4．数量积的主要用途有哪些？

答　（1）求向量的模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

（2）求两个向量的夹角：当$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

（3）求一个向量在另一个向量上的投影：$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}^0\cdot\boldsymbol{b}$.

特别地，向量$\boldsymbol{a}$在直角坐标系中的坐标为：$a_x=\mathrm{Prj}_i\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$；$a_y=\mathrm{Prj}_j\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$；$a_z=\mathrm{Prj}_k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$.

（4）向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$或$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

5．向量积的主要用途有哪些？

答　（1）求与两个非共线向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同时垂直的向量$\boldsymbol{s}$，可取$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

（2）求由两个非共线向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$所确定的平面的法向量$\boldsymbol{n}$，可取$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

（3）求以向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积：$S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

（4）给定不共线的三点A,B,C，求点C到直线AB的距离：$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$.

（5）向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行（即共线）的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$或$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

三、经典例题解析

题型　有关向量的数量积与向量积的运算

例 1　填空：（1）设向量$\boldsymbol{a}=\{3,2,1\}$，$\boldsymbol{b}=\left\{2,\dfrac{4}{3},k\right\}$，若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$k=$_____；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则$k=$_____.（2）设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$\left|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|=$_____.

解　（1）应分别填$-\dfrac{26}{3}$和$\dfrac{2}{3}$. 因为若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$3\cdot2+2\cdot\dfrac{4}{3}+1\cdot k=0$，从而解得$k=-\dfrac{26}{3}$；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，则对应坐标成比例，即$\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{k}$，从而解得$k=\dfrac{2}{3}$.

（2）应填 24．因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$，注意到已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，故

$$\left|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|=2\left|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\right|=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}=2\times3\times4\times1=24.$$

例 2　求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 在向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 上的投影.

解　向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3\times1+1\times(-2)+2\times2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$.

例 3　求向量 $\boldsymbol{b}$，使得它与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$.

解　设向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\{x,y,z\}$，由已知可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2x-y+2z=-18$，又因为向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以令 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}=k$，则 $x=2k,\ y=-k,\ z=2k$，将它们代入到 $2x-y+2z=-18$ 中，得到 $k=-2$．于是 $x=-4,\ y=2,\ z=-4$，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 的坐标为 $\{-4,2,-4\}$.

例 4　已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{c}|=3$，求向量 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模和它与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解　$|\boldsymbol{d}|^2=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=14$，所以 $|\boldsymbol{d}|=\sqrt{14}$．又

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{14}\times2}=\frac{2}{\sqrt{14}},$$

故 $\theta=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

例 5　已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$|\boldsymbol{c}|=7$，并且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 的值.

解　因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，又因为 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=|-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 同向，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 反向，向量 $\boldsymbol{b}$ 也与向量 $\boldsymbol{c}$ 反向，于是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=2\times5\cos0+5\times7\cos\pi+7\times2\cos\pi=10-35-14=-39.$$

进一步地，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin0=0$，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\pi=0$，$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\pi=0$，因此

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 6　若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，求：（1）向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角；（2）以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

解　（1）设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}$．由题设可知

$$|\boldsymbol{a}|^2=3,\ |\boldsymbol{b}|^2=1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right)=\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2},\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7,$$

即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$．$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，即 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$.

又因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=2$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，即 $\alpha=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

（2）所求平行四边形的面积为

$$|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=|-5(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

注　平行四边形的面积是由向量积的模的几何意义得到的，在这里向量积 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的模 $|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|$ 表示以向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

例 7　证明：（1）若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线；（2）$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$.

证明　（1）要证两个向量共线，即证两个向量平行，亦即证 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 因为

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

（2）设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，因为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta$，所以

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta+|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

例 8　已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\boldsymbol{b}$，且两个向量的夹角为 θ. 过点 M_2 作线段 M_1M_3 所在的直线的垂线，垂足为点 D.（1）证明 $\triangle M_1M_2D$ 的面积等于 $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}$；（2）求向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ 为何值时，$\triangle M_1M_2D$ 的面积取得最大值？

解　（1）设 $\triangle M_1M_2D$ 的面积为 S，则 $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{M_1D}|\cdot|\overrightarrow{M_2D}|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\cos\theta||\boldsymbol{a}|\sin\theta=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2|\sin2\theta|$. 又因为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，所以

$$\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin\theta|\cos\theta|}{2|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2|\sin2\theta|=S.$$

（2）由 $S(\theta)=\dfrac{1}{4}|\boldsymbol{a}|^2|\sin2\theta|$，可得当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$\triangle M_1M_2D$ 的面积取得最大值.

四、习题选解

1．判断题：

（1）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.　（　）

（2）若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.　（　）

（3）若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.　（　）

（4）若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.　（　）

（5）若 $\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0$ 均是单位向量，则 $\boldsymbol{a}^0\times\boldsymbol{b}^0$ 也是单位向量.　（　）

（6）若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，并且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 相互垂直且均为单位向量.　（　）

（7）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.　（　）

（8）若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$均为单位向量，且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.　（　）

解　（1）×；（2）×；（3）×；（4）×；（5）×；（6）√；（7）×；（8）×.

2．求向量$\boldsymbol{a}=\{4,-3,4\}$在向量$\boldsymbol{b}=\{2,2,1\}$上的投影.

解　$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=2$.

3．设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；（2）$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的余弦.

解　（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&-2\\1&2&-1\end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$.

（2）$(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=(-6)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$，$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})=10\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+14\boldsymbol{k}$.

（3）$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

4．已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求△$OAB$的面积.

解　因为$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&3\\0&1&3\end{vmatrix}=-3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，所以

$$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+1}=\frac{\sqrt{19}}{2}.$$

5．试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

证明　如图 7-2 所示，给定一个圆O，$\angle AMB$是直径AB所对的圆周角. 因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=(-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\\&=-|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OM}|^2=0,\end{aligned}$$

所以$\angle AMB$是直角.

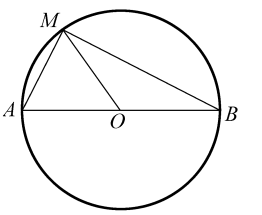

图　7-2

6．设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为单位向量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解　由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$得$\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以

$$\begin{aligned}2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})&=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{b}\cdot(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\cdot(-\boldsymbol{c})=-3,\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}.$$

7．已知$M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$和$M_3(3,1,3)$. 求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

解　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2,4,-1\}$，$\overrightarrow{M_2M_3}=\{0,-2,2\}$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\{6,-4,-4\}$，所求单