第3章

更新过程

3.1 更新过程的定义和性质

从2.2节我们了解到Poisson过程是事件发生的时间间隔$X_1, X_2, \cdots$服从同一指数分布的计数过程(这里仍然沿用第2章的有关记号)，现在将其做以下推广：保留$X_1, X_2, \cdots$的独立性和同分布性，但是分布可以任意，而不必局限为指数分布，这样得到的计数过程叫做更新过程。

定义3.1 设$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布的非负随机变量，分布函数为$F(x)$，令$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，$n \geqslant 1, T_0 = 0$。我们把由

$$N(t) = \sup\{n: T_n \leqslant t\} \tag{3.1.1}$$

定义的计数过程称为**更新过程**。特别地，假设$F(0) = P\{X_n = 0\} \neq 1$，记$\mu = EX_n = \int_0^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$，则$\mu > 0$。

本书不考虑$P\{X_n = 0\} = 1$的情况，因为若$P\{X_n = 0\} = 1$，则$\mu = 0$，意味着平均更新时间为0，有限时间可以有无穷次更新。

在更新过程中我们将事件发生一次叫做一次更新，从而定义3.1中X_n就是第$n-1$次和第n次更新相距的时间，T_n是第n次更新发生的时刻，而$N(t)$就是t时刻之前发生的总的更新次数。更新过程常用于设备更新和库存分析等领域。

应当注意，虽然对于每个t，$N(t) < +\infty$以概率1成立，但$\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$也以概率1成立。事实上，“当时间趋于无穷，更新总次数有限”等价于

“存在一次更新的时间间隔为无穷”，即$\{\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)<+\infty\}\Leftrightarrow\{\exists n>0,X_n=+\infty\}$，所以

$$\begin{aligned}P\{\lim_{t\to+\infty}N(t)<+\infty\}&=P\{\exists n>0,X_n=+\infty\}\\&=P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=+\infty\}\right\}\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\{X_n=+\infty\}=0。\end{aligned}$$

以下几个事件的集合关系在分析中常被用到。

(1) $\{N(t)\geqslant n\}\Leftrightarrow\{T_n\leqslant t\}$；

直观上，$\{N(t)\geqslant n\}$的含义是 t 时刻之前更新次数不少于 n，$T_n\leqslant t$ 的含义是第 n 次更新的发生时刻在 t 时刻之前，两个事件是等价的。

(2) $\{N(t)=n\}\subset\{T_n\leqslant t\}$；

由(1)直接得到。在相关条件期望计算中，应当注意到 $E(X_1\mid N(t)=1)\neq E(X_1)$，因为$\{N(t)=1\}\subset\{X_1\leqslant t\}$，即$\{N(t)=1\}$发生意味着首次更新的时间小于或等于 t，$\{N(t)=1\}$与 X_1 不独立。一般地，$E(X_1\mid N(t)=n)\neq EX_1$，$n\geqslant 1$。

(3) $\{N(t)>n\}\subset\{T_n<t\}$；

事件$\{N(t)>n\}$发生，则$\{T_n<t\}$发生，但$\{T_n<t\}$ 发生，$\{N(t)>n\}$不一定发生。下面我们来看 $N(t)$的具体分布。

因为$\{N(t)\geqslant n\}\Leftrightarrow\{T_n\leqslant t\}$，所以

$$\begin{aligned}P\{N(t)=n\}&=P\{N(t)\geqslant n\}-P\{N(t)\geqslant n+1\}\\&=P\{T_n\leqslant t\}-P\{T_{n+1}\leqslant t\}\\&=P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant t\right\}-P\left\{\sum_{i=1}^{n+1}X_i\leqslant t\right\}。\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

以 $M(t)$记 $E[N(t)]$并称之为**更新函数**，要注意，$M(t)$是关于 t 的函数而不是随机变量。

定理 3.1 $M(t)=E[N(t)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{N(t)\geqslant n\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{T_n\leqslant t\}$。

证明
$$\begin{aligned}M(t)&=E[N(t)]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{N(t)=n\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n[P\{N(t)\geqslant n\}-P\{N(t)\geqslant n+1\}]\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_n \leqslant t\}。$$ ■

例 3.1 考虑一个时间离散的计数过程$\{N_j, j=1,2,\cdots\}$,在每个时刻独立地做 Bernoulli 试验,设成功的概率为 p,失败的概率为 $q=1-p$。以试验成功作为事件(更新),则此过程是更新过程,求它的更新函数 $M(k)$。

解 首先,易知更新的时间间隔为独立的同几何分布

$$P\{X_i = n\} = q^{n-1}p, \quad i = 1,2,\cdots, \quad n = 1,2,\cdots$$

则第 r 次成功(更新)发生的时刻 $T_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$,具有负二项分布

$$P\{T_r = n\} = C_{n-1}^{r-1} q^{n-r} p^r。$$

由此,有

$$\begin{aligned} P\{N_m = r\} &= P\{T_r \leqslant m\} - P\{T_{r+1} \leqslant m\} \\ &= \sum_{n=r}^{m} C_{n-1}^{r-1} q^{n-r} p^r - \sum_{n=r+1}^{m} C_{n-1}^{r} q^{n-r-1} p^{r+1}。 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

所以,更新函数

$$M(k) = \sum_{r=0}^{k} rP\{N_k = r\}。$$

直接化简(3.1.3)式是烦琐的,但直观上,$P\{N_m=r\}$的含义为在时刻 m 成功次数为 r 的概率,即相当于 m 次试验成功 r 次的概率,实质上服从二项分布,则 $M(k)$为分布 $B(k,p)$的期望。进一步,时间间隔为几何分布,则更新时刻为 Pascal 分布,更新次数为二项分布。

我们不加证明地叙述一个更新函数的性质。

性质 3.1 $M(t)<+\infty$,对于一切 $t<+\infty$。

注意 $M(t)$的有限性不能直接由 $P\{N(t)<+\infty\}=1$ 的结果推出。因为随机变量以概率 1 有限并不能推出其期望有限。例如:令 Y 是随机变量,概率分布为

$$P\{Y = 2^n\} = \frac{1}{2^n}, \quad n \geqslant 1,$$

则

$$P\{Y < +\infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1。$$

但是

$$EY = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n P\{Y = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = +\infty。$$

因此，即使 Y 有限，仍旧可能使 $EY=+\infty$。

3.2 更新推理、更新方程和关键更新定理

3.2.1 更新推理和更新方程

我们将每次更新的时刻称为更新点，由于更新之后，系统恢复如新，所以过程的概率性质与原过程相同。如设 s 时刻为一更新点，则 $(s,t]$ 时间区间内更新发生的次数与 $(0,t-s]$ 之间的更新发生次数同分布，这种性质在其他时刻是没有的。

更新推理是更新过程中的一种常用分析方法，它的基本思路是对更新点取条件期望或概率，利用更新点系统恢复如新的性质，条件期望或概率可以化为无条件期望或概率，使计算得以简化，通常可以得到一个积分方程。尽管可以取任意更新点作为条件，但一般取第一个更新点或 t 时刻之前的最后一次更新为条件。

定理 3.2 更新函数 $M(t)$ 满足如下的积分方程

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)\mathrm{d}F(x)。\tag{3.2.1}$$

证明 利用条件期望的性质知

$$\begin{aligned} M(t) &= E[N(t)] = E[E(N(t) \mid T_1)] \\ &= E[N(t) \mid T_1 > t]P\{T_1 > t\} + \int_0^t E[N(t) \mid T_1 = x]\mathrm{d}F(x)。\end{aligned}$$

一方面当给定 $T_1>t$ 时，必然有 $N(t)=0$，故 $E[N(t)|T_1>t]=0$；另一方面当给定 $T_1=x$ 时，系统恢复如新，$(s,t]$ 时间区间内更新发生的次数与 $(0,t-s]$ 之间的更新发生次数同分布，所以

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^t E[N(t) \mid T_1 = x]\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_0^t E[1 + N(t-x)]\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_0^t [1 + M(t-x)]\mathrm{d}F(x) \end{aligned}$$

$$= F(t) + \int_0^t M(t-x)\mathrm{d}F(x)。 \quad \blacksquare$$

例 3.2　假设有一个时间间隔为均匀分布的更新过程。计算当 $t \leqslant 1$ 时，其对应的更新函数 $M(t)$。

解　由(3.2.1)式知更新方程为

$$M(t) = t + \int_0^t M(t-x)\mathrm{d}x = t + \int_0^t M(y)\mathrm{d}y。$$

求导数得

$$M'(t) = 1 + M(t)。$$

令 $h(t)=1+M(t)$，可得

$$h'(t) = h(t)。$$

解之得 $h(t)=C\mathrm{e}^t$，即 $M(t)=C\mathrm{e}^t-1$。由 $M(0)=0$，可知 $C=1$，所以

$$M(t) = \mathrm{e}^t - 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1。$$

比方程(3.2.1)更一般的更新方程定义如下。

定义 3.2(更新方程)　称如下形式的积分方程为**更新方程**：

$$K(t) = H(t) + \int_0^t K(t-s)\mathrm{d}F(s), \tag{3.2.2}$$

其中 $H(t)$，$F(t)$为已知，且当 $t<0$ 时 $H(t)$，$F(t)$均为 0。当 $H(t)$在任何区间上有界时，称方程(3.2.2)为**适定**(proper)**更新方程**，简称为**更新方程**。

定理 3.3　若更新方程(3.2.2)中 $H(t)$为有界函数，则方程存在唯一的在有限区间内有界的解

$$K(t) = H(t) + \int_0^t H(t-s)\mathrm{d}M(s), \tag{3.2.3}$$

其中 $M(t)$是分布函数 $F(t)$的更新函数。

证明　略。

定理 3.4(Wald 等式)　设 $EX_i<+\infty$，$i=1,2,\cdots$，则

$$E(T_{N(t)+1}) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)+1}) = E(X_1)E[N(t)+1]。$$

证明　**证法一**　对第一次更新的时刻 X_1 取条件

$$E(T_{N(t)+1} \mid X_1 = x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x > t, \\ x + E(T_{N(t-x)+1}), & \text{若 } x \leqslant t, \end{cases} \tag{3.2.4}$$

如图 3.1。

记 $K(t)=E(T_{N(t+1)})$，则

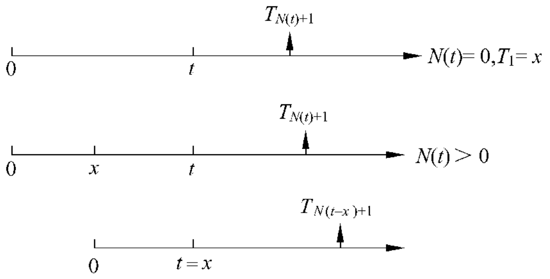

图 3.1 对第一次更新的时刻 X_1 取条件的两种情况

$$
\begin{aligned}
K(t) &= E(T_{N(t)+1}) = E[E(T_{N(t)+1} \mid X_1 = x)] \\
&= \int_0^{+\infty} E(T_{N(t)+1} \mid X_1 = x)\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_0^t [x + K(t-x)]\mathrm{d}F(x) + \int_t^{+\infty} x\,\mathrm{d}F(x) \\
&= E(X_1) + \int_0^t K(t-x)\mathrm{d}F(x)。
\end{aligned}
$$

这是更新方程，由定理 3.3 知

$$
\begin{aligned}
K(t) &= E(X_1) + \int_0^t EX_1\,\mathrm{d}M(x) \\
&= E(X_1)[1 + M(t)] \\
&= E(X_1)E[N(t)+1]。
\end{aligned}
$$

证法二 对任意正整数 i，$\{N(t)+1 \geqslant i\} \Leftrightarrow \{N(t) \geqslant i-1\} \Leftrightarrow \left\{\sum_{k=1}^{i-1} X_k \leqslant t\right\}$，所以 $\{N(t+1) \geqslant i\}$ 与 X_i 独立。因此

$$
\begin{aligned}
E[T_{N(t)+1}] &= E\left(\sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{\infty} I_{\{N(t)+1 \geqslant i\}} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} E(I_{\{N(t)+1 \geqslant i\}} X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} E(X_i)E(I_{\{N(t)+1 \geqslant i\}})\ (\{N(t)+1 \geqslant i\} \text{ 与 } X_i \text{ 独立}) \\
&= E(X_1)\sum_{i=1}^{\infty} P(N(t)+1 \geqslant i) \\
&= E(X_1)E[N(t)+1]。
\end{aligned}
$$

■

一般来说（即使 $N(t)$ 是 Poisson 过程），$E(T_{N(t)}) = E(X_1 + X_2 + \cdots +$

$X_{N(t)})\neq EX_1E[N(t)]$，这等价于 $E[X_{N(t)+1}]\neq E(X_1)$。这里的差异是：X_1 是一个全新设备的运行时间，而 $X_{N(t)+1}$ 对应的是一个已经运行了一段时间的设备，虽然我们不知道其开始了多久，但那些只运行了很短时间的新设备，大概率已经不在考虑范围内了。

在更新过程中应当注意符号的实际含义，这对理解问题常常是很关键的。例如 $T_{N(t)+1}$ 的含义是 t 时刻之后的第一次更新时刻，而 $T_{N(t)}$ 表示 t 时刻之前的最后一次更新的时刻，两者有不同的概率性质。它们的不同主要反映在对信息的依赖上。例如根据教室监视器，在每个时刻，我们可以知道第一个人一定进了教室，或一定没有进教室，但我们无法确定是否是最后一个进教室的人，因为这个事件需要未来的信息。也就是说，事件 $\{T_{N(t)}=s_1, s_1<t\}$ 与 s_1 时刻之后的信息有关，例如与事件 $\{N(t)-N(s_1)=0\}$ 不独立；而事件 $\{T_{N(t)+1}=s_2, s_2>t\}$ 与 s_2 时刻之后的信息无关，与事件 $\{N(s_2+\tau)-N(s_2)=0, \tau>0\}$ 是独立的。

3.2.2 关键更新定理及其应用

有时我们需要计算更新方程解的渐近表示，下面的关键更新定理给出了最重要的结果。我们只给出更新时间间隔的分布为连续分布的情况。

定理 3.5(**关键更新定理**) 记 F 为 X_n 的分布函数，$\mu=EX_n$，设函数 $h(t)$，$t\in[0,+\infty)$，满足：(1) $h(t)$ 非负不增；(2) $\int_0^{\infty} h(t)\mathrm{d}t<+\infty$。$H(t)$ 是更新方程

$$H(t)=h(t)+\int_0^t H(t-x)\mathrm{d}F(x)$$

的解。那么若 F 是连续分布，有

$$\lim_{t\to+\infty} H(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x, & \mu<+\infty, \\ 0, & \mu=+\infty。\end{cases}$$

证明 略。

计算与更新过程有关的某个数学期望在很大时的渐近值时，常常先利用更新推理得到一个更新方程，再用关键更新定理便可得到近似的数学期望值。下面的例子显示了这个典型的推理过程。

例 3.3(**剩余寿命与年龄的极限分布**) 以 $r(t)=T_{N(t)+1}-t$ 表示时刻 t 的剩余寿命，即从 t 开始到下次更新剩余的时间，$s(t)=t-T_{N(t)}$ 为 t 时刻的

年龄。我们来求 $r(t)$ 和 $s(t)$ 的极限分布。

解 令

$$\bar{R}_y = P\{r(t) > y\}。 \tag{3.2.5}$$

对第一次更新的时刻 X_1 取条件，得

$$P\{r(t) > y \mid X_1 = x\} = \begin{cases} 1, & x > t + y, \\ 0, & t < x \leqslant t + y, \\ \bar{R}_y(t - x), & 0 < x \leqslant t。\end{cases} \tag{3.2.6}$$

（读者可试着画一个类似图 3.1 的图）由全概率公式有

$$\begin{aligned}\bar{R}_y(t) &= \int_0^{+\infty} P\{r(t) > y \mid X_1 = x\}\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_{t+y}^{+\infty} \mathrm{d}F(x) + \int_0^t \bar{R}_y(t-x)\mathrm{d}F(x) \\ &= 1 - F(t+y) + \int_0^t \bar{R}_y(t-x)\mathrm{d}F(x)。\end{aligned}$$

这是一个更新方程，它的解为

$$\bar{R}_y(t) = 1 - F(t+y) + \int_0^t [1 - F(t+y-x)]\mathrm{d}M(x)。 \tag{3.2.7}$$

这时仍假设 $\mu = EX_1 < +\infty$，则

$$\mu = \int_0^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) = \int_0^{+\infty} [1 - F(x)]\mathrm{d}x < +\infty,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} [1 - F(t+y)]\mathrm{d}t = \int_y^{+\infty} [1 - F(z)]\mathrm{d}z < +\infty,$$

即 $1 - F(t+y)$ 满足关键更新定理 3.5 的条件，于是

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} P\{r(t) > y\} &= \lim_{t\to+\infty} \bar{R}_y(t) \\ &= \frac{1}{\mu}\int_y^{+\infty} [1 - F(z)]\mathrm{d}z, \quad z > 0。\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

年龄 $s(t)$ 的分布可由(3.2.8)式导出。注意到 $\{r(t) > x\} \Leftrightarrow \{$过程在 $[t, t+x]$ 没有更新$\}$，$\{r(t-y) > x+y\} \Leftrightarrow$ 过程在 $[t-y, (t-y)+(x+y)]$ 没有更新，$\{s(t) > y\} \Leftrightarrow \{$过程在 $[t-y, t]$ 没有更新$\}$，所以

$$\{r(t) > x, s(t) > y\} \Leftrightarrow \{r(t-y) > x+y\},$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} P\{r(t) > x, s(t) > y\} &= \lim_{t\to+\infty} P\{r(t-y) > x+y\} \\ &= \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{+\infty} [1 - F(z)]\mathrm{d}z。\end{aligned}$$

特别地

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}P\{s(t)>y\}&=\lim_{t\to+\infty}P\{s(t)>y,r(t)>0\}\\&=\frac{1}{\mu}\int_y^{+\infty}[1-F(z)]\mathrm{d}z。\end{aligned}$$

注意到 $T_{N(t)+1}=t+r(t)$，$T_{N(t)}=t-s(t)$，$\{s(t)>y\}\Leftrightarrow\{$过程在$[t-y,t]$没有更新$\}\Leftrightarrow\{r(t-y)>y\}$，所以 $T_{N(t)+1}$，$T_{N(t)}$ 和 $s(t)$ 的分布都可以由(3.2.7)式得到类似的更新方程。

在更新过程中，我们考虑系统只有一个状态的情况，比如机器一直是开的(即更换零件不需时间)。而实际中，零件损坏之后会有一个拆卸更换的过程，这段时间机器是“关”的。这里我们就来考虑有“开”“关”两种状态的更新过程，即**交替更新过程**。

下面利用关键更新定理给出交替更新过程的一个性质。

设系统最初是开的，持续开的时间是 Z_1，而后关闭，时间为 Y_1 之后再打开，时间为 Z_2 又关闭，时间为 Y_2 之后再打开，……交替进行，每当系统被打开称作一次更新。

我们假设随机向量列$\{(Z_n,Y_n),n\geqslant1\}$是独立同分布的，从而$\{Z_n\}$，$\{Y_n\}$都是独立同分布的，但 Z_i，Y_i 之间允许不独立。

定理3.6 设 H 是 Z_n 的分布，G 是 Y_n 的分布，F 是 Z_n+Y_n 的分布，且这些分布都是连续分布。记 $P(t)=P\{t$ 时刻系统是开的$\}$，设 $E(Y_n+Z_n)<+\infty$，则

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\frac{EZ_n}{EZ_n+EY_n}。$$

证明 对第一次更新的时刻 $X_1=Z_1+Y_1$，取条件概率得

$$P\{t\text{ 时刻系统开着}\mid X_1=x\}=\begin{cases}P\{Z_1>t\mid Z_1+Y_1>t\}, & x\geqslant t,\\P(t-x), & x<t。\end{cases}\tag{3.2.9}$$

则

$$\begin{aligned}P(t)&=\int_0^{+\infty}P\{t\text{ 时刻系统开着}\mid X_1=x\}\mathrm{d}F(x)\\&=\int_t^{+\infty}P\{Z_1>t\mid X_1\}\mathrm{d}F(x)+\int_0^tP(t-x)\mathrm{d}F(x)\\&=P\{Z_1>t\}+\int_0^tP(t-x)\mathrm{d}F(x)\end{aligned}$$

$$= \overline{H}(t) + \int_0^t P(t-x)\mathrm{d}F(x)。$$

根据定理 3.3 可得

$$P(t) = \overline{H}(t) + \int_0^t \overline{H}(t-x)\mathrm{d}M(x)。$$

又$\int_0^{+\infty} \overline{H}(t)\mathrm{d}t = EZ_1 < +\infty$，且显然 $\overline{H}(t)$ 非负不增，由关键更新定理 3.5 得

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \frac{\int_0^t \overline{H}(t)\mathrm{d}t}{E(Y_1+Z_1)} = \frac{EZ_1}{EZ_1+EY_1}。$$

3.3 更新回报定理

定义 3.3 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一个更新过程，允许 R_n 依赖于 X_n（即回报的多少与等待的时间有关），只要求随机向量列(X_n,R_n)独立同分布，则

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_i$$

称为**更新回报过程**。

定理 3.7（更新回报定理） 若$\{R(t),t\geqslant 0\}$是一个更新回报过程，其更新间隔 $X_1,X_2,\cdots$满足 $EX_1<+\infty$，每次得到的回报$\{R_n\}$满足 $ER_1<+\infty$。则：

(1)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}R(t) = \frac{ER_1}{EX_1} \text{a. s.};$$

(2)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}E(R(t)) = \frac{ER_1}{EX_1}。$$

定理 3.7 告诉我们，长时间之后，单位时间的平均报酬等于一次更新的平均报酬除以一次更新所需的平均时间。

例 3.4（火车的调度） 设乘客到达火车站形成一更新过程，其更新间距分布 F 有有限期望μ。现设车站用如下方法调度火车：当有 K 个乘客到达车站时发出一列火车。同时还假定当有 n 个旅客在车站等候时车站每单位时间要付出nc 元偿金，而开出一列火车的成本是 D 元。求车站在长期运行下单位时间的平均成本。

解 如果把每次火车离站看作是一次更新，我们就得到一个更新回报过