第3章

一元函数积分学

3.1 基本要求

（1）理解原函数的概念、不定积分的概念、定积分的定义及其几何意义。

（2）熟练掌握不定积分的基本性质与基本积分公式。

（3）熟练掌握计算不定积分的换元积分法和分部积分法。

*（4）会求有理函数的不定积分。

（5）熟练掌握定积分的基本性质、微积分基本公式、变上限定积分及其导数、牛顿—莱布尼茨公式。

（6）熟练掌握计算定积分的换元积分法和分部积分法。

（7）会求无穷限的反常积分。

*（8）熟悉定积分在几何和物理上的应用。

3.2 内容提要

1. 原函数及不定积分的定义

1）原函数

设 $f(x)$是定义在区间 X 上的已知函数，若存在函数 $F(x)$，使得

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$$

则称 $F(x)$为 $f(x)$在区间 X 上的一个原函数。

2）不定积分的定义

函数 $f(x)$的全体原函数称为 $f(x)$的不定积分，记作$\int f(x)\mathrm{d}x$。其中，$\int$ 为积分号，$f(x)$称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式。

3）不定积分的几何意义

不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示曲线 $y=F(x)$沿 y 轴上下平移一定的距离而得到

的一组积分曲线。

2. 基本积分表

(1) $\int k\mathrm{d}x=kc+C$ （k 为常数）

(2) $\int x^{a}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C$ （$a\neq-1$）

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x=\dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$

(8) $\int \dfrac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\int \sec^{2}x\mathrm{d}x=\tan x+C$

(9) $\int \dfrac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x=\int \csc^{2}x\mathrm{d}x=-\cot x+C$

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$

(12) $\int \dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x=\arctan x+C$

(13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C$

以上积分基本公式是积分运算的基础，必须熟记。

3. 不定积分的性质

(1) $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

(2) $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x$ （k 为常数，且 $k\neq0$）

4. 不定积分的计算方法

1）第一换元积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$$

2）第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$；又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数 $\Phi(t)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C$$

其中，$t=\varphi^{-1}(x)$是 $x=\varphi(t)$的反函数。

（1）简单根式代换。若被积函数中含有一个被开方式为一次式的根式 $\sqrt[n]{ax+b}$时，令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$ 可以消去根式，从而求得积分。

（2）三角代换（3 种公式）。一般情况下：

如果被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，作代换 $x=a\sin t$；

如果被积函数含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，作代换 $x=a\tan t$；

如果被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，作代换 $x=a\sec t$。

3）分部积分法

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

5．有理函数的积分

（1）有理函数的积分：（部分分式法）先将函数分解成多项式和部分分式之和，然后分项积分。

（2）三角函数有理式的积分。

作变换，设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$x = 2\arctan u$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

变换后原积分变成了有理函数的积分。

6．定积分的定义

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界，用点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b$ 把区间$[a,b]$分为 n 个小区间：

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

各个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和式$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$（也称为积分和）。当$n\to\infty$时，$\Delta x_i$中最大者$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$趋向于零，$S_n$的极限存在，且极限值与区间$[a,b]$的划分方法及点$\xi_i$的取法无关，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，称此极限值为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中，$f(x)$称为被积函数，$[a,b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限，x称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$称为被积表达式。

7. 定积分的性质

(1) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

这一结论可以推广到任意有限多个函数代数和的情况。

(3) 对于任意点c，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

(4) $\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$

(5) 如果在区间$[a,b]$上，恒有$f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \quad (a<b)$$

推论1：如果在区间$[a,b]$上，恒有$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b)$$

推论2：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \quad (a<b)$$

(6) 设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

(7)（积分中值定理）如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则在区间$[a,b]$内至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a<\xi<b)$$

8．变上限的定积分的定义

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

在 $[a,b]$ 上可导，且 $\Phi(x)$ 的导数等于被积函数在积分上限 x 处的值，即

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

9．微积分基本定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

上述公式称为牛顿—莱布尼茨公式，也称为微积分基本公式。

10．定积分的计算方法

1）定积分的换元积分法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，如果函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

（1）当 $t=\alpha$ 时 $x=\varphi(\alpha)=a$，当 $t=\beta$ 时 $x=\varphi(\beta)=b$；

（2）当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化；

（3）$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，

则有换元积分公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

使用定积分换元积分公式时须注意“换元必换限”。

2）定积分的分部积分法

设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导函数 $u'(x)$，$v'(x)$，则有分部积分公式：

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$$

11．无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a<b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$$

无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在。

12. 定积分在几何学及经济学中的应用

1）平面图形的面积

（1）直角坐标情形。由曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 和直线 $x=a,x=b(a<b),y=0$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b y\,\mathrm{d}x$$

当 $f(x)\leqslant 0$ 时，平面图形的面积为

$$S=\int_a^b [0-f(x)]\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

由连续曲线 $y=f(x),y=g(x)(f(x)\geqslant g(x))$ 与直线 $x=a,x=b$ 所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$$

由连续曲线 $x=\varphi(y),x=\psi(y)(\varphi(y)\geqslant\psi(y))$ 与直线 $y=c,y=d$ 所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y$$

（2）极坐标情形。

2）体积

（1）旋转体的体积。

（2）平行截面为已知的立体的体积。

*3）平面曲线的弧长

（1）直角坐标情形。

（2）参数方程情形。

（3）极坐标情形。

4）经济应用问题举例

略。

13. 定积分在物理学中的应用

（1）变力沿直线所作的功。

（2）水压力。

（3）引力。

3.3　学习要点

本章的重点是不定积分及定积分的计算。首先要理解原函数、不定积分、定积分和积分上限函数的概念，熟练掌握用不定积分的基本性质与基本积分公式求不定积分的方法；

掌握牛顿—莱布尼茨公式，能够应用洛必达法则计算带有积分上限函数的极限；理解第一换元法、第二换元法及分部积分法的定义，从而熟练应用换元积分法及分部积分法求解不定积分，有些类型的题目甚至要兼用换元法与分部积分法来求解。其次，理解定积分的换元法与分部积分法的概念，并灵活应用换元法及分部积分法求解定积分；理解反常积分的概念，能够计算无穷限的反常积分；理解元素法的本质及应用，会用元素法求解一些几何（平面面积、旋转体体积）、经济（总收入、总产量等）及物理（变力沿直线所作的功、水压力、引力）问题。最后，理解有理函数的概念，掌握有理函数的积分方法及掌握一些简单的可化为有理函数的积分类型，并熟练应用定积分计算平面图形的面积，旋转体的体积，变力沿直线所作的功，及一些简单的引力问题。

3.4 例题增补

例 3-1 求不定积分 $\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x$。

分析 本题要将被积函数$\frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}$拆成两项相乘，即$\frac{x^8}{(x^8+1)^2}\cdot x^7$，再进行计算。

解
$$\begin{aligned}\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^8}{(x^8+1)^2}\cdot x^7\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \frac{x^8+1-1}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x^8\\ &= \frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{x^8+1}-\frac{1}{(x^8+1)^2}\right]\mathrm{d}(x^8+1)\\ &= \frac{1}{8}\ln(x^8+1)+\frac{1}{8(x^8+1)}+C\end{aligned}$$

例 3-2 求不定积分 $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$。

分析 将 $\tan x$ 写成$\frac{\sin x}{\cos x}$，再利用凑微分法积分。

解
$$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\cos x = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}+C$$

例 3-3 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$。

分析 这是关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理分式的积分，用“万能代换”可解决这类问题。

解
$$\begin{aligned}\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos x+\sin x} &= \frac{\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x}{\cos x+\sin x}\\ &= \cos x-\sin x-\frac{2\sin x\cos x+1-1}{\cos x+\sin x}\\ &= \cos x-\sin x-\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos x+\sin x}+\frac{1}{\cos x+\sin x}\\ &= -2\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

$$=-2\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

所以

$$\int\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=2\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

例 3-4　求不定积分 $\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\ln x\mathrm{d}x$。

分析　用分部积分法，取 $\ln x$ 为 u，而另一因式 $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$ 较繁，宜先拆项化简。

解　$\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\ln x\mathrm{d}x&=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{2\ln x}{(x-1)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(\ln x)^2-2\int\ln x\cdot\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)\\&=\frac{1}{2}(\ln x)^2-2\left[\frac{\ln x}{x-1}-\int\frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}(\ln x)^2-\frac{2\ln x}{x-1}+2\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(\ln x)^2-\frac{2\ln x}{x-1}+2\ln|x-1|-2\ln x+C\end{aligned}$$

例 3-5　设常数 $a>0$，求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$。

分析　按照几种典型类型换元法中所讲的方法换元。

解　令 $x=a\sin t$，从而 $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$，$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}&=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}+\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\ln|\sin t+\cos t|+\frac{1}{2}t+C_1\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C_1\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2-x^2}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$

其中，$C=C_1-\ln a$。

例 3-6　求不定积分 $\int\frac{x-1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$。

解　解法 1：先变形，再凑微分。

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1-2}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{2}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}(1+x)-\int\frac{2}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}(1+x)$$

$$=\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}-4\sqrt{1+x}+C$$

解法 2：换元法。令 $\sqrt{1+x}=t$，则 $1+x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，可得

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2-2}{t}2t\mathrm{d}t=2\int(t^2-2)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}t^3-4t+C=\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}-4\sqrt{1+x}+C$$

解法 3：分部积分法。

$$\int\frac{x-1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\int x\mathrm{d}(\sqrt{1+x})-\int\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\left(x\sqrt{1+x}-\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x\right)-2\sqrt{1+x}$$

$$=2x\sqrt{1+x}-2\int\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}(1+x)-2\sqrt{1+x}$$

$$=(2x-2)\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{1+x}(x+1-6)+C=\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}-4\sqrt{1+x}+C$$

注 一般在计算不定积分时，可按如下思路来考虑：

① 首先考虑能否直接积分；

② 其次考虑能否“凑”出新的积分变量，利用凑微分法计算；

③ 综合考虑被积函数是否为典型的适用于第二类换元法或分部积分的类型。

例 3-7 求不定积分 $\int\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

分析 本题一般用分部积分法进行求解，或者先用变量替换化简再用分部积分法。

解 解法 1：分部积分法。

$$\int\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\arcsin\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(\arcsin\mathrm{e}^x)$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\int\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\int\frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x+\ln\left|\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}\right|+C$$

解法 2：先变量替换化简，再用分部积分法。令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，可得

$$\int\frac{\arcsin\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin t}{t^2}\mathrm{d}t=-\int\arcsin t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=-\frac{1}{t}\arcsin t+\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{1}{t}\arcsin t+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{t}\arcsin t-\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=-\frac{1}{t}\arcsin t-\ln\left|\frac{1}{t}+\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2-1}\right|+C$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^{x}-\ln\left|\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1}\right|+C$$

例 3-8　求不定积分 $\int\frac{x}{(x^4+1)^2(x^4+x^2)}\mathrm{d}x$。

分析　本题要先换元，再转换成部分分式进行求解。

解　令 $u=x^2$，则

$$\int\frac{x}{(x^4+1)(x^4+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u^2+u)}$$

设

$$\frac{1}{(u^2+1)(u^2+u)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}+\frac{Cu+D}{u^2+1}$$

将上式两端去分母后，得

$$1=A(u+1)(u^2+1)+Bu(u^2+1)+(Cu+D)u(u+1)$$

即

$$1=(A+B+C)u^3+(A+C+D)u^2+(A+B+D)u+A$$

比较上式两端同次幂的系数，即有

$$\begin{cases}A+B+C=0\\A+C+D=0\\A+B+D=0\\A=1\end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases}A=1\\B=-\frac{1}{2}\\C=-\frac{1}{2}\\D=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

所以

$$\int\frac{x}{(x^4+1)(x^4+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)(u^2+u)}$$