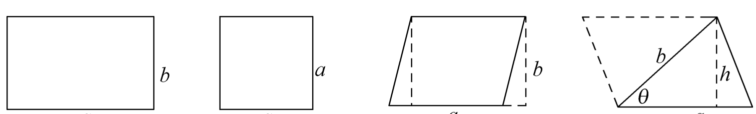
微积分的产生

人类起初的数学思想,可能类似于我们个体生命意识的开始,从有了大小和多少的直观概念,逐渐学会计数和比较.之后,一代又一代的智者汲取了人类的经验和实践,为我们构建了丰富多彩的数学世界.

平面图形的度量

在几何上,人们发明了丈量和比较线段、平面和立体图形大小的方法.

早期,人们用指长、脚长、肘长和步长等作为丈量物体长度的单位(在现代人的生活中,仍可见到人们应用这类单位丈量物长).随着人类社会的发展,尺度单位逐渐得到统一和规范.为了比较平面图形的大小,人们用给定的正方形丈量平面图形.这个给定的正方形的边长规定为1单位,它的大小规定为1平方单位.平面图形的大小称为面积.边长为1单位的正方形的面积规定为1平方单位.如果一个平面图形经过适当分割后可以拼接成 n 个边长为1单位的正方形,则称其面积为 n 平方单位.这样,一个长为 a 单位、宽为 b 单位的长方形可以分割成 a 乘 b 个边长为1单位的正方形,因而其面积 $S=ab$,如图1(a)所示.特别地,边长为 a 单位的正方形的面积为 $S=a^2$,如图1(b)所示.



$S=ab$ (a)　$S=a^2$ (b)　$S=ab$ (c)　$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ (d)

图　1

因为平行四边形可以通过切割和填补化为长方形,所以底边长为 a 单位、高为 h 单位的平行四边形的面积为 $S=ah$,如图1(c)所示.而两个全等的三角形可以拼接为一个平行四边形,所以底边长为 a 单位、高为 h 单位的三角形的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ah$,如图1(d)所示.若已知三角形的两边长分别为 a 单位和 b 单位,且其夹角为 θ 弧度,则高为 $h=b\sin\theta$ 单位,故其面积为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$.

那么,圆的半径、周长和面积之间又有什么关系呢?

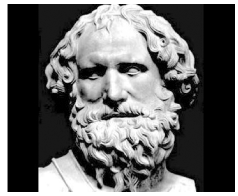
据推测,4 000多年前的埃及就已经粗略地知道了圆的周长和半径之间的关系.古巴比伦人已经知道圆的周长与其直径之比为常数,约为 $25/8=3.125$.这个常数被称作圆周率,后来被记作 π.从而也有了我们很熟悉的半径为 r 的圆周长公式

$$l=2\pi r.$$

而半径为 r、圆心角为 θ 的圆弧长公式则为

$$l=\frac{\theta}{2\pi}\cdot 2\pi r=r\theta$$

古希腊的阿基米德用圆内接正 n 边形逼近圆周，即“割圆术”，算得圆周率 $\pi\approx3.141\,851$. 同时，基于前人的研究成果，在他的著作中给出并证明了圆的面积，圆柱体、球与圆锥体的体积以及球的表面积等几何形体的面积与体积公式.



阿基米德（Archimedes，公元前 287—公元前 212），古希腊哲学家、数学家、物理学家、力学家，静态力学和流体静力学的奠基人，享有“力学之父”的美称. 名言：“给我一个支点，我就能撬起整个地球.”

阿基米德用“割圆术”证明了半径为 r 的圆面积公式. 方法是：作圆内接正 n 边形，如图 2 所示. 圆内接正 n 边形可以分割成 n 个腰长为 r 的等腰三角形. 设每个三角形的底边长为 l_n，高为 h_n，则圆内接正 n 边形的面积为

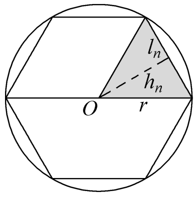


图 2

$$S_n=n\,\frac{1}{2}l_nh_n=\frac{1}{2}(nl_n)h_n$$

当 n 无限增大时，圆内接正 n 边形的周长 nl_n 趋于圆周长，高 h_n 趋于圆半径 r，其面积趋于圆面积，因而证明了半径为 r 的圆面积为

$$S=\pi r^2.$$

这个证明的核心其实就是微积分赖以创建的极限思想. 但遗憾的是，当时并没有明确提出和进一步发展极限的概念.

易知，半径为 r、圆心角为 θ 的扇形（图 3）的面积公式为

$$S=\frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}r^2\theta$$

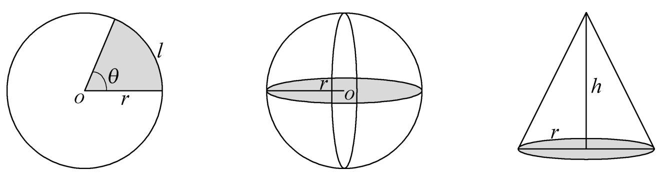


图 3

阿基米德在其著作中，还给出了半径为 r 的球的体积公式为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

以及半径为 r 的球的表面积公式为

$$S=4\pi r^2$$

底圆半径为 r、高为 h 的圆锥体的体积公式为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

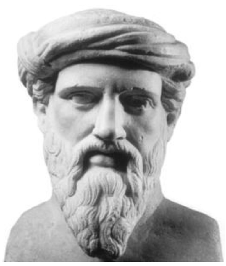
到了 3 世纪，我国古代数学家刘徽（约 225 年—约 295 年）也提出了“割圆术”，并求得圆周率 $\pi\approx3.141\,6$.

5 世纪，我国古代数学家祖冲之的儿子祖暅（音 geng，又名祖暅之，数学家）提出“幂势既同，则积不容异”（两个等高的立体，如在等高处的截面积恒相等，则体积相等）的原理，由此

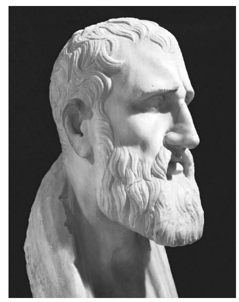
给出球体积的公式，这一原理被称为“祖暅原理”. 而在西方，直到 17 世纪才由意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri，Franeesco Bonaventura，1598—1647)重新发现，被称为卡瓦列里原理. 其间，一些学者相继研究了一些规则几何图形的面积和体积问题.

时间与空间

在古希腊，曾经活跃着一个影响力很大的学派，它关注的是世界本原问题，这就是毕达哥拉斯学派. 毕达哥拉斯学派的座右铭是“万物皆数”. 毕达哥拉斯主义主张数字是一切现象背后的基本要素，即数字原子论. 毕达哥拉斯学派提出“空间和时间是由点和瞬间构成的，而这些点和瞬间又是连续的”. 这一假设的一个直接结论就是“空间和时间是无穷可分的”. 据说，为了反对这种观点，另一位古希腊数学家、哲学家芝诺提出了一系列悖论. 其中最著名的、一直被津津乐道的三个悖论如下：



毕达哥拉斯[Pythagoras，约公元前 580 年—约公元前 500(490)年]，古希腊数学家、哲学家



芝诺(Zeno of Elea，约公元前 490 年—约公元前 425 年)，古希腊数学家、哲学家

(1) 在一个移动的物体通过一段给定的距离之前，必须首先通过这段距离的一半；而在通过这一半距离之前，必须先通过给定距离的四分之一；而在这之前，又必须通过给定距离的八分之一；以此类推，它必须通过无穷多个细分的距离. 物体移动之前，必须在有限时间内触及无穷多个点，而穷尽一个无穷集合是不可能的.

(2) 阿喀琉斯与一只超前一段距离的乌龟赛跑. 起跑后，当阿喀琉斯到达乌龟的起始位置的时候，乌龟又前行了一段路程；如此下去，不管乌龟跑得多慢，阿喀琉斯跑得多快，阿喀琉斯永远也追不上乌龟.

(3) “飞矢不动”. 一支飞行的箭在任意时刻都是静止的，因为在任意时刻都没有时间的变化，因而也就没有空间的变化. 于是得到“飞矢不动”的结论.

悖论(1)和(2)涉及无穷多个微小的数的和的问题. 而悖论(3)则涉及瞬时速度问题. 长期以来，这些问题一直困扰着数学家们.

经过黑暗漫长的中世纪之后，欧洲被文艺复兴运动唤醒，束缚人们思想的烦琐哲学和神学的教条权威逐步被摒弃. 封建社会开始解体，资本主义开始兴起，工场手工业日益繁荣，机器生产大力发展. 在航海方面，对天文观测的精确性要求越来越高. 在军事方面，弹道学的研究成为热门. 准确时计的制造、运河的开凿、堤坝的修筑、行星的轨道理论等，都需要很多复杂的计算. 现有的数学成果已不能满足需要.

到了 16 世纪末期和 17 世纪，有许多科学问题需要解决，诸如瞬时速度的问题、曲线的切线、函数的最大值和最小值问题、曲线长、曲线围成的图形的面积、立体的体积、物体的重

心、引力等.这一时期,许多数学家、天文学家、物理学家都为解决上述问题做了大量的研究工作,为微积分的创立作出了贡献.其间,意大利数学家卡瓦列里提出了“不可分原理”:线是由无穷多个点构成的,面是由无穷多条线构成的,体则是由无穷多个面构成的.点、线、面分别就是线、面、体的不可分量.这一思想对微积分的创立有重要影响.

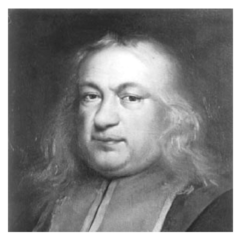
卡瓦列里(Franeesco Bonaventura Cavalieri,1598—1647),意大利数学家

约翰尼斯·开普勒(Johannes Kepler,1571—1630),德国杰出的天文学家、物理学家、数学家

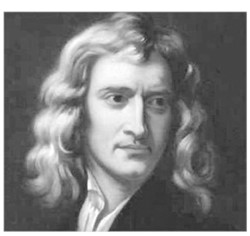
开普勒的《酒桶的新立体几何》将酒桶看作由无数的圆薄片累积而成,从而求出其体积.这也是积分学的前驱工作.

法国哲学家、数学家、物理学家笛卡儿所创建的解析几何将几何与代数有机地融合在一起,为微积分的创立提供了完美的工具.法国“业余数学家之王”费马也为解析几何与微积分的创立与发展作出了突出贡献.另外,法国的数学家罗伯瓦、笛沙格,英国的巴罗、瓦里士等人都为微积分大厦的创立贡献了重要的基石.

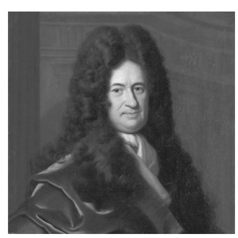
勒内·笛卡儿(Rene Descartes,1596—1650),法国哲学家、数学家、物理学家.名言:“我思故我在”



费马(Pierre de Fermat,1601—1665),法国数学家



艾萨克·牛顿(Isaac Newton,1643—1727),英国物理学家、数学家和哲学家,大百科科学巨匠



戈特弗里德·威廉·莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716),德国哲学家、数学家

17 世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿和德国数学家莱布尼兹分别从运动学和几何学的角度独立地创建了微积分.

微积分学的创立,极大地推动了数学和物理学以及其他学科的发展.毫不夸张地说,在我们的日常生活和工作中、在科学技术的各个领域里,处处渗透着微积分的元素,没有微积分,就没有我们今天的生活方式.

什么是微积分

简单地说,微积分是研究变量的变化率以及量的求值方法的数学学科.

微积分由微分学和积分学两大板块构成.微分学研究一个变量随另外变量变化而产生的变化率,如运动的速度、曲线切线的斜率等;积分学研究一些量的求值问题,如几何图形的弧长、面积和体积,物体的质量、质心、转动惯量以及磁通量和电通量等;在概率论中,利用积分方法可以求随机事件的概率.

微分学和积分学都是建立在极限概念的基础之上,它们又通过“微积分基本定理”紧密地联系在一起.

预 备 知 识

一、一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式

一元二次方程及其解法出现于公元前2000年前后(夏代)的古巴比伦人的泥版书中,但当时并不接受负数.

埃及的纸草文书中也涉及最简单的二次方程.

在公元前4、5世纪时(春秋战国时期),中国也有关于一元二次方程的求根公式的研究.

古希腊的丢番图(246—330)也给出了二次方程的求根法,但他只取二次方程的正根.

公元628年的印度著作《婆罗摩修正体系》中有二次方程的求根公式.

阿尔·花剌子模(约780—约850,今乌兹别克斯坦花剌子模州希瓦市人)给出了二次方程的一般解法,承认方程有两个根,并有无理根存在,但却未有虚根的认识.

直至文艺复兴后期,法国数学家韦达指出了一元二次方程在复数范围内恒有解,给出了根与系数的关系,即韦达定理.韦达是第一个有意识地和系统地使用字母来表示已知数、未知数及其乘幂的人,带来了代数理论研究的重大进步.他在欧洲被尊称为“代数学之父”.

韦达(François Viète,1540—1603),法国数学家

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

韦达定理:$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

二、毕达哥拉斯定理(勾股定理)

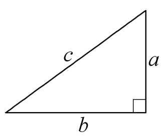


图 1

设 a、b、c 分别为直角三角形的两直角边和斜边,如图1所示,则有关系式

$$a^2+b^2=c^2.$$

在毕达哥拉斯之前,这个关系已经被多个民族发现.但毕达哥拉斯被认为是第一个给出证明的人.在中国,相传商代的商高也发现了这一关系,故称之为“商高定理”,也称“勾股定理”.

三、三角公式

三角学被认为起源于古希腊.为了预报天体运行路线、计算日历、航海等需要,古希腊人研究了球面三角形的边角关系.泰勒斯(公元前624—公元前546)的理论被认为是三角学的萌芽.

印度人和阿拉伯人对三角学也有研究与推进,但主要是应用在天文学方面.

15、16世纪三角学的研究转入平面三角.

16世纪法国数学家韦达系统地研究了平面三角,因而成为三角公式的集大成者.除汇总前人的成果外,还补充了自己发现的新公式,如和差化积公式、多倍角关系式、余弦定理等.此后,平面三角从天文学中分离出来,形成了一个独立的分支.

正弦、余弦、正切、余切、正割和余割的定义与关系式(图2):

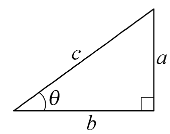


图 2

正弦 $\sin\theta=\dfrac{a}{c}$, 余弦 $\cos\theta=\dfrac{b}{c}$;

正切 $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$, 余切 $\cot\theta=\dfrac{b}{a}$;

正割 $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

余割 $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\theta\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

正切 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,

余切 $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\theta\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$.

$1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta$.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$,

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$.

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$,

$\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$.

$1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$, $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$.

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2},\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}.$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\quad \cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1.$$

积化和差公式：

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

正弦定理： $\dfrac{BC}{\sin\angle A}=\dfrac{AC}{\sin\angle B}=\dfrac{AB}{\sin\angle C}=2R$，

其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，$BC=2R\sin\angle A'=2R\sin\angle A$，如图 3 所示.

余弦定理： 在 $\triangle ABC$ 中，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$.

这是因为(图 4)

$$\begin{aligned}BC^2&=BD^2+CD^2=BD^2+(AC-AD)^2\\&=BD^2+AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\\&=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A.\end{aligned}$$

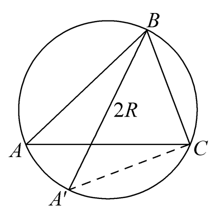


图 3

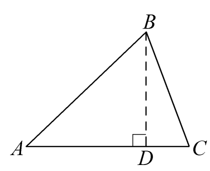


图 4

四、因式分解

英国代数学学派的奠基人托马斯·哈里奥特(Thomas Harriot，1560—1621)在数学史上第一次给出了因式分解的方法.

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$

$$
\begin{aligned}
x^n-1&=x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+\cdots-x+x-1\\
&=(x-1)x^{n-1}+(x-1)x^{n-2}+\cdots+(x-1)\\
&=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1),
\end{aligned}
$$

$$1-x-y+xy=(1-x)(1-y).$$

五、排列与组合

有文献记载，苏胥如塔(Suśruta，公元前1500年，古印度医生，被誉为“手术学之父”)是最早研究组合数的人.

n 个元素构成的全排列数为 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$(称为 n 的阶乘).

规定　$0!=1$.

从 n 个元素中任取 k 个构成一个排列，不同排列的排列数记为 A_n^k. 有

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

从 n 个元素中任取 k 个构成一个组合，不同组合的组合数记为 C_n^k. 有

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}.$$

容易证明下列简单组合关系式：

(1) $A_n^0=0!=1, C_n^0=C_n^n=1, C_n^k=C_n^{n-k}, A_n^r=k!\ C_n^k$；

(2) $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

【解释】 (1) A_n^0 表示从 n 个元素中任取0个构成一个排列的排列数，即一个元素也不取的排列数只有一种.

C_n^0 表示从 n 个元素中不取任何元素的组合数. 这等于将 n 个元素全部留下的组合数 C_n^n. 这样的组合只有一种.

C_n^k 表示从 n 个元素中任取 k 个构成的不同组合的组合数. 这等于从 n 个元素中任取 $n-k$ 个留下构成的不同组合的组合数 C_n^{n-k}.

至于(2)，我们可以先选定一个元素，称之为 e，则从 n 个元素中任取 k 个构成的组合有两类：一类含元素 e，另一类不含元素 e. 对于含 e 的组合，其中的 $k-1$ 个元素是从除 e 以外的 $n-1$ 个元素中选出来的，因而含 e 的组合数为 C_{n-1}^{k-1}. 而对于不含元素 e 的组合，其中的 k 个元素是从除 e 以外的 $n-1$ 个元素中选出来的，因而不含 e 的组合数为 C_{n-1}^k. 于是从 n 个元素中任取 k 个构成的组合数为 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

六、帕斯卡三角形(杨辉三角)

法国数学家、物理学家、哲学家、散文家布莱士·帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)在其1655年的著作中介绍了图5所示的三角形. 因而在数学史上一直称之为帕斯卡三角形. 这个三角形的特点是：

(1) 每一个数都等于上一层中与之相连的数的和；

(2) 第 n 层第 k 个数等于 C_n^k；

(3) 满足关系式 $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$.

杨辉(南宋时期杭州人)1261年所著的《详解九章算法》一书中，辑录了三角形数表，并

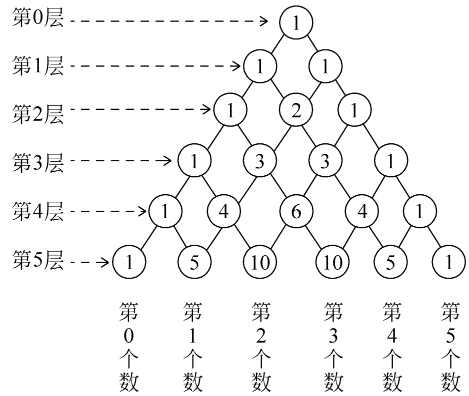


图 5

说明此表引自11世纪前半叶贾宪的《释锁算术》，并绘制了“古法七乘方图”，如图6所示. 因而帕斯卡三角形也称“杨辉三角”或“贾宪三角”.

图 6

帕斯卡还发明了注射器，创造了水压机，研究大气压强规律. 后人为纪念帕斯卡，用他的名字来命名压强的单位，简称“帕”.

七、二项式定理

下面的公式称为牛顿二项式定理，简称二项式定理，由牛顿于1664年、1665年期间提出.

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+y^n\\&=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^ny^n\\&=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^ky^{n-k}.\end{aligned}$$

其中 $\sum$ 称为和号，$\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$ 表示数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的和，即

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+a_1+\cdots+a_n.$$

可以看到，$(x+y)^n$ 的展开式中的系数恰好就是帕斯卡三角形中第 n 层的数，其组合意义为：$(x+y)^n$ 是 n 项 $(x+y)$ 相乘，其展开式中的每一项都是从 n 项 $(x+y)$ 的每一项中选择 x 和 y 中的一个，然后相乘，也就是从 n 项 $(x+y)$ 中选择 k 项取 x，再从剩余的 $n-k$ 项中取 y，然后相乘得到的，因而每一项都具有 $x^ky^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 的形式. 而这样的取法有 C_n^k 种，因而 x^ky^{n-k} 的系数为 C_n^k.

八、基本不等式及其衍生不等式

由 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\geqslant 0$ 可得到基本不等式