第 9 章　多元函数微分法及其应用

上册中讨论的函数只有一个自变量，这种函数称为一元函数. 然而在许多实际问题中，很多量是由多方面的因素决定的，反映到数学上就是一个变量依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数的微积分问题.

本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用. 讨论时以二元函数为主，进而推广到二元以上的多元函数.

9.1　多元函数的基本概念

9.1.1　平面点集

定义 9.1.1　坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为**平面点集**，记作

$$D = \{(x,y) \mid (x,y)\ 具有性质\ P\}$$

例如，平面上以原点为圆心，半径为 2 的圆内所有点的集合是

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$$

与数轴上点的邻域概念类似，引入平面上点的邻域概念.

定义 9.1.2　设 $P_0(x_0, y_0)$ 为直角坐标平面上的一点，δ 为一正数，称点集

$$\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $U(P_0, \delta)$（如图 9.1.1(a)所示）.

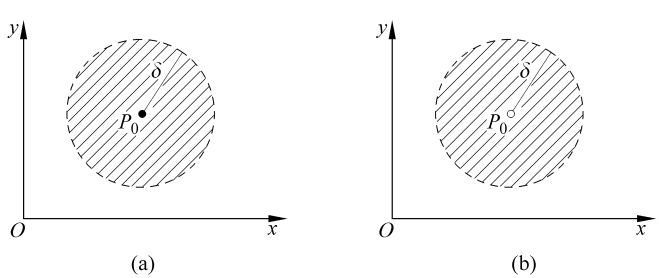

图　9.1.1

点 P_0 的去心 δ 邻域就是把 P_0 的 δ 邻域的心 P_0 去掉，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

如果不指明邻域的半径 δ 时，则把 P_0 的邻域表示为 $U(P_0)$（如图 9.1.1(b)所示）.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

设 D 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点，则点 P 与点集 D 必存在以下三种关系之一.

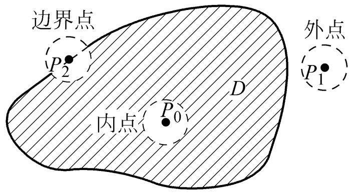

图　9.1.2

(1) 若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset D$，则称 P 为 D 的内点(如图 9.1.2 中 P_0 所示).

(2) 若存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap D=\varnothing$，则称 P 为 D 的**外点**(如图 9.1.2 中 P_1 所示).

(3) 若点 P 的任意一个邻域内既有属于 D 的点，也有不属于 D 的点，则称 P 为 D 的**边界点**(如图 9.1.2 中 P_2 所示).

点集 D 的边界点的全体称为 D 的**边界**，记作 ∂D.

注　由边界点的定义可以知道，D 的边界点可能属于 D，也可能不属于 D.

如果点集 D 全由内点组成的，则称 D 为**开集**. 如果点集 D 全由它的内点和边界点组成的，则称 D 为**闭集**. 例如，集合

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4\}$$

为一个开集，集合

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$$

为一个闭集，集合

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$$

为 D 的边界，但集合

$$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$$

既不是开集也不是闭集.

如果点集 D 内任意两点都可用有限条折线连接起来，且该折线上的点都属于 D，则称点集 D 是**连通集**(如图 9.1.3 所示).

连通的开集称为**区域**或**开区域**. 开区域同它的边界组成的点集称为**闭区域**. 例如，集合

$$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$$

是开区域，而集合

$$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

是闭区域.

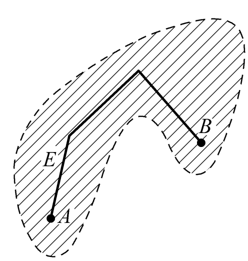

图　9.1.3

对于点集 D，如果存在原点的某一个邻域 $U(O)$，使得

$$D \subset U(O)$$

则称点集 D 为**有界集**(如图 9.1.4 所示). 反之,称 D 为**无界集**. 例如,集合

$$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$$

是有界闭区域,集合

$$\{(x,y) \mid x+y>0\}$$

是无界开区域,集合

$$\{(x,y) \mid x+y \geqslant 0\}$$

是无界闭区域.

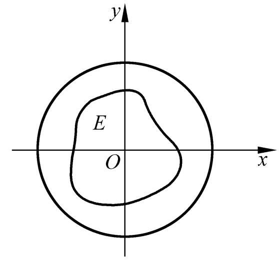

图 9.1.4

9.1.2 n 维空间

由平面解析几何知道 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$ 分别表示实数,二元有序数组 (x,y),三元有序数组 (x,y,z) 的全体,它们分别对应于数轴,二维平面,三维立体空间. 推广到一般情况,n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体用 $\mathbf{R}^n$ 来表示,它对应于 n 维空间. 即

$$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}$$

任意一个 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间的一个点 P,表示为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$称为点 P 的第 i 个坐标.

为了集合 $\mathbf{R}^n$ 中的元素建立联系,在 $\mathbf{R}^n$ 中定义的线性运算如下:

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两个元素,$\lambda \in \mathbf{R}$. 规定

$$x \pm y=(x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2,\cdots,x_n \pm y_n), \qquad \lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$$

设 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则 P 与 Q 之间的距离表示为 $|PQ|$,规定

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

显然,$n=1,2,3$ 时,上述规定与数轴上,平面直角坐标系及空间直角坐标系中两点间的距离公式是一致的. 由于 $\mathbf{R}^n$ 中线性运算和距离的引入,则前面平面点集所叙述的一系列概念,都可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去了. 例如,$\mathbf{R}^n$ 中的点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的邻域 $U(P,\delta)$ 可表示为

$$U(P,\delta)=\left\{Q \,\middle|\, |PQ|<\delta, Q \in \mathbf{R}^n\right\}$$

9.1.3 多元函数的概念

在一元函数中,函数关系是因变量的取值仅依赖于一个自变量,而在实际问题中需研究的是因变量依赖于多个自变量的函数关系. 例如,圆柱体的体积 $V=\pi r^2 h$,其中 V 是由圆柱体的半径 r 和 h 决定的.

定义 9.1.3 设 D 是平面上的一个非空点集,如果按照某种对应法则 f,对于 D

中的任意一点 (x,y)，都存在唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的**二元函数**，记为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

其中 x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 点集 D 称为函数 $z=f(x,y)$ 的**定义域**，函数值的集合称为该函数的**值域**，记为 $f(D)$. 即

$$f(D)=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

二元函数在点 (x_0,y_0) 取得的函数值，记为

$$z\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad z\Big|_{(x_0,y_0)}\quad 或\quad f(x_0,y_0)$$

类似地可定义三元及以上的函数.

定义 9.1.4　设 D 是 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的一个非空点集，如果按照某种对应法则 f，对于 D 中的任意一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都存在唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的 n **元函数**，记为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 点集 D 称为函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**定义域**，函数值的集合称为该函数的**值域**，记为 $f(D)$.

当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数称为**多元函数**. 与一元函数类似，一般地，由解析式给出的多元函数 $y=f(P)$ 的**自然定义域**就是使这个式子有意义的自变量所组成的点集.

例 1　求 $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-4)$ 的定义域.

解　要使表达式有意义，必须

$$\begin{cases}9-x^2-y^2\geqslant 0\\ x^2+y^2-4>0\end{cases}$$

即

$$4<x^2+y^2\leqslant 9$$

则所求函数的定义域为 $\{(x,y)\,|\,4<x^2+y^2\leqslant 9\}$.

二元函数的几何意义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，取 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$，于是有序数组 (x,y,z) 确定了空间上的一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 中的所有点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为**二元函数** $z=f(x,y)$ **的图形**(如图 9.1.5 所示).

二元函数的图形是空间中一张曲面，它在 xOy 平面上的投影区域就是该函数的定义域. 例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示以原点为中心，1 为半径的上半球面(如图 9.1.6 所示).

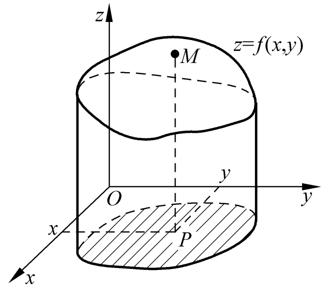

图 9.1.5

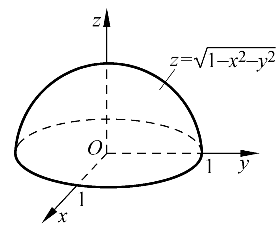

图 9.1.6

9.1.4 多元函数的极限

先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当自变量 $x\to x_0, y\to y_0$ 即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的变化趋势.

与一元函数极限类似，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，函数 $f(x,y)$ 的函数值无限接近于某一确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 在 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限.

这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于 P_0，也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$$

定义 9.1.5 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点，A 为常数，若对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $P(x,y)\in D$ 且 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$（或 $P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$）时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(x,y)=A$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0}(x,y)=A \quad 或 \quad f(P)\to A(P\to P_0)$$

为区别于一元函数的极限，将二元函数的极限叫做**二重极限**. 当 x,y 趋向于无穷大时 $f(x,y)$ 的极限也可以类似定义.

例 2 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

证 对于 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ 成立，只需

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2<\varepsilon$$

即

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\sqrt{\varepsilon}$$

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，对于 $\forall\,\varepsilon>0$，当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

即 $P(x,y)\in\mathring{U}(O,\delta)\cap D$ 时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

恒成立. 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

需要注意的是，由于一元函数的极限趋近方式只有两种：左极限和右极限，但二元函数趋近一点的方式有无数种，所以它要求变量以任意方式趋近于 (x_0,y_0) 时极限都存在并且相等. 即二重极限存在是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 即沿任意方向与任意路径趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 都趋于同一数值. 反之，则极限不存在.

例 3　讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

的极限.

解　考虑 $(x,y)\to(0,0)$ 的不同方式. 当 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 的方向趋近于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{2k}{1+k^2}$$

显然，上式的极限值与 k 的取值有关. 说明 $P(x,y)$ 沿不同的直线方向趋近于 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 趋向于不同的数值. 所以，该函数在 $(0,0)$ 处的极限不存在.

例 4　讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

的极限.

解　考虑 $(x,y)\to(0,0)$ 的不同方式. 当 $P(x,y)$ 沿 $y=kx$ 的方向趋近于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{(x^2+k^2)x^2}=0$$

但此时仍不能断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在. 因为当 (x,y) 沿曲线 $y=kx^2$ 趋近于 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{(1+k^2)x^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

显然,上式的极限值与 k 的取值有关. 说明 (x,y) 沿不同路径趋近于 $(0,0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 趋向于不同的数值. 所以,该函数在 $(0,0)$ 处的极限不存在.

关于多元函数的极限运算法则,也与一元函数类似,简述如下:

若函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 存在极限,则

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)}\quad\left(\text{其中}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)\neq 0\right)$.

例 5　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\tan xy}{x}$.

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\tan xy}{x}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\tan xy}{xy}\cdot y=\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\tan xy}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 3} y=1\times 3=3.$

注　令 $u=xy$,则可得到 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\tan xy}{xy}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\tan u}{u}=1.$

以上关于二元函数的极限概念,也可相应推广到 n 元函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 即 $y=f(P)$ 中去.

9.1.5　多元函数的连续性

多元函数的连续性定义与一元函数的连续性定义也是相似的,即函数在某点的极限值等于函数在该点的函数值,则称函数在该点连续. 二元函数的连续严格定义如下:

定义 9.1.6　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内有定义, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点,且 $P_0\in D$,若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$**处连续**.

令 $x=x_0+\Delta x, y=y_0+\Delta y$,则

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$$

即

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0$$

规定函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的**全增量**为

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

则

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$$

所以,上述定义又可叙述如下:

定义 9.1.7　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点,且 $P_0\in D$,$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,若

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0$$

则称**函数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在点 $\boldsymbol{P_0(x_0,y_0)}$ 处连续.**

如果函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内每一点都连续,则称**函数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 上连续**,或称 **$\boldsymbol{f(x,y)}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 上的连续函数**. 从几何意义上说,连续的二元函数表示空间中一张无孔无隙的曲面.

与一元函数类似,可以给出二元函数间断点的严格定义.

定义 9.1.8　设二元函数 $f(x,y)$ 在 D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点,若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续,则称 **$\boldsymbol{P_0(x_0,y_0)}$ 为函数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ 的间断点.**

由定义可知,函数 $f(x,y)$ 间断的原因可能是以下 3 种情况之一:

(1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在;

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 没有定义;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$.

例如,本节例 3 讨论过的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处的极限不存在,所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续,$(0,0)$ 点就是函数 $f(x,y)$ 的一个间断点. 又如函数

$$f(x,y)=\sin\frac{2xy}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上无定义,故该圆周上的每一点都是间断点.

以上关于二元函数的连续性概念,也可相应推广到 n 元函数 $f(P)$ 上去. 比如,如果 n 元函数 $f(P)$ 在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点 P_0 处不连续,则称 P_0 点为函数 $f(P)$ 的间断点.

前面已经指出，一元函数与多元函数的极限运算法则类似，所以根据多元函数的极限运算法则可以证明：

(1) 多元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)均为连续函数；

(2) 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

同一元函数类似，**多元初等函数**是指可用一个解析式表示的多元函数，这个式子是由常数和具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的. 例如 x^2+y, $\sin(x+y)$, e^{x^2y}, $\ln\dfrac{1}{x^2+y^4}$等都是多元初等函数.

根据以上多元连续函数的性质和基本初等函数的连续性，可以得到如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的. 其中，所谓的定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

一般地，若 $f(P)$是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$的定义域的内点，则 $f(P)$在点 P_0 处连续，于是

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

例 6　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$.

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0}{0+1}=1$.

例 7　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+4}-2)(\sqrt{xy+4}+2)}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

9.1.6　多元函数在有界闭区域上的连续性

与闭区间上一元连续函数的性质类似，多元函数在有界闭区域上具有如下性质：

性质 1(有界性与最值定理)　在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

该性质也可叙述为，若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则必存在常数 $M>0$，使得对一切 $P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$；且存在点 $P_1, P_2\in D$，使得对于任意的 $P\in D$，都有

$$f(P_1)\leqslant f(P)\leqslant f(P_2)$$

性质 2(介值定理)　在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

习题 9-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+y-1}}$；　(2) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\arccos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $z=\ln(xy+x-y-1)$.

2. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

*3. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

4. 求下列函数的不连续点：

(1) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　(2) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$.

9.2　偏导数

9.2.1　偏导数的定义及其计算方法

多元函数的极限和连续性刻画了自变量变化时，函数的变化趋势，但是在许多实际问题中还需要考虑函数变化的快慢问题，即函数的变化率. 在研究一元函数的变化率时，我们引入了导数的概念，而多元函数的变化率复杂得多. 在本节中只考虑多元函数对其中一个自变量的变化率，而其余的自变量不变(看成常数). 这种多元函数随一个自变量变化的变化率，就是偏导数.

定义 9.2.1　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，固定 $y=y_0$，而 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应的函数 z 的增量(称为**偏增量**)为

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$