中国大学生数学竞赛大纲(初稿)

为了进一步推动高等学校数学课程的改革和建设，提高大学数学课程的教学水平，激励大学生学习数学的兴趣，发现和选拔数学创新人才，更好地实现“中国大学生数学竞赛”的目标，特制订本大纲。

一、竞赛的性质和参赛对象

“中国大学生数学竞赛”的目的是：激励大学生学习数学的兴趣，进一步推动高等学校数学课程的改革和建设，提高大学数学课程的教学水平，发现和选拔数学创新人才。

“中国大学生数学竞赛”的参赛对象为大学本科二年级及二年级以上的在校大学生。

二、竞赛的内容

中国大学生数学竞赛竞赛内容为大学本科理工科专业高等数学课程的教学内容，具体内容如下：

(一)函数、极限、连续

1. 函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立。
2. 函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数。
4. 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限。
5. 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较。
6. 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限。
7. 函数的连续性(含左连续与右连续)、函数间断点的类型。
8. 连续函数的性质和初等函数的连续性。
9. 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)。

(二)一元函数微分学

1. 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线。
2. 基本初等函数的导数、导数和微分的四则运算、一阶微分形式的不变性。
3. 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法。
4. 高阶导数的概念、分段函数的二阶导数、某些简单函数的 n 阶导数。
5. 微分中值定理，包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理。
6. 洛必达(L'Hospital)法则与求未定式极限。
7. 函数的极值、函数单调性、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线(水平、铅直和斜渐近线)、函数图形的描绘。
8. 函数最大值和最小值及其简单应用。
9. 弧微分、曲率、曲率半径。

(三)一元函数积分学

1.原函数和不定积分的概念。

2.不定积分的基本性质、基本积分公式。

3.定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、变上限定积分确定的函数及其导数、牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式。

4.不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法。

5.有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分。

6.广义积分。

7.定积分的应用:平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力及函数的平均值。

(四)常微分方程

1.常微分方程的基本概念:微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等。

2.变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、全微分方程。

3.可用简单的变量代换求解的某些微分方程、可降阶的高阶微分方程:$y^{(n)}=f(x)$,$y''=f(x,y')$,$y''=f(y,y')$。

4.线性微分方程解的性质及解的结构定理。

5.二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程。

6.简单的二阶常系数非齐次线性微分方程:自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数,以及它们的和与积。

7.欧拉(Euler)方程。

8.微分方程的简单应用。

(五)向量代数和空间解析几何

1.向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积。

2.两向量垂直、平行的条件、两向量的夹角。

3.向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦。

4.曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程。

5.平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件,点到平面和点到直线的距离。

6.球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程,常用的二次曲面方程及其图形。

7.空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

(六)多元函数微分学

1.多元函数的概念、二元函数的几何意义。

2.二元函数的极限和连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质。

3.多元函数偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件。

4.多元复合函数、隐函数的求导法。

5.二阶偏导数、方向导数和梯度。

6.空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线。

7. 二元函数的二阶泰勒公式。

8. 多元函数极值和条件极值、拉格朗日乘数法、多元函数的最大值、最小值及其简单应用。

(七)多元函数积分学

1. 二重积分和三重积分的概念及性质、二重积分的计算(直角坐标、极坐标)、三重积分的计算(直角坐标、柱面坐标、球面坐标)。

2. 两类曲线积分的概念、性质及计算,两类曲线积分的关系。

3. 格林(Green)公式、平面曲线积分与路径无关的条件、已知二元函数全微分求原函数。

4. 两类曲面积分的概念、性质及计算,两类曲面积分的关系。

5. 高斯(Gauss)公式、斯托克斯(Stokes)公式、散度和旋度的概念及计算。

6. 重积分、曲线积分和曲面积分的应用(平面图形的面积、立体图形的体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等)。

(八)无穷级数

1. 常数项级数的收敛与发散、收敛级数的和、级数的基本性质与收敛的必要条件。

2. 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨(Leibniz)判别法。

3. 任意项级数的绝对收敛与条件收敛。

4. 函数项级数的收敛域与和函数的概念。

5. 幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)、收敛域与和函数。

6. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)、简单幂级数的和函数的求法。

7. 初等函数的幂级数展开式。

8. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlet)定理、函数在[-1,1]上的傅里叶级数、函数在[0,1]上的正弦级数和余弦级数。

第 1 部分

十届预赛试题及参考答案

Y0 预赛信息

首届全国大学生数学竞赛预赛(2009 年非数学类)

试　　题

一、填空题(本题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分)

(1)计算 $\iint\limits_{D} \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ __________,其中区域 D 是由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域。

(2)设 $f(x)$ 是连续函数,且满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$,则 $f(x)=$__________。

(3)曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________。

(4)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 29$ 确定,其中 f 具有二阶导数,且 $f'\neq 1$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$__________。

二、(5 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$,其中 n 是给定的正整数。

三、(15 分)设函数 $f(x)$ 连续,$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,$A$ 为常数,求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

四、(15 分)已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界,试证:

(1)$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;

(2)$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant \dfrac{5}{2}\pi^2$。

五、(10 分)已知

$$y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x},\quad y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x},\quad y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解,试求此微分方程。

六、(10 分)设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y\geqslant 0$,又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$。试确定 a,b,c,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小。

七、(15 分)已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x,\qquad n=1,2,\cdots,$$

且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$,求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和。

八、(10 分)求 $x\to 1^-$ 时,与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

参考答案

一、(1)解 取变换 $u=x+y$，$v=x$，则 $dxdy=|J|dudv=dudv$，

$$原积分=\int_0^1 du\int_0^u \frac{u\ln u-u\ln v}{\sqrt{1-u}}dv=\frac{16}{15}。$$

(2)解 令 $a=\int_0^2 f(x)dx$，则 $f(x)=3x^2-a-2$，两端积分解出 $a=\frac{4}{3}$，从而得$\Rightarrow f(x)=3x^2-\frac{10}{3}$。

(3)解 曲面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,2y,-1)$，则切点处的法向量平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量 $(2,2,-1)$，因此对应坐标成比例 $\frac{2}{x}=\frac{2}{2y}=\frac{-1}{-1}$，得切点为$(2,1,1)$，从而得切平面为 $2x+2y-z-5=0$。

(4)解 方程两端对 x 求导可得 $y'=\frac{e^{f(y)}}{(1-f'(y))e^y\ln 29}=\frac{1}{x(1-f'(y))}$，再求导得

$$y''=-\frac{(1-f'(y))-xf''(y)y'}{x^2(1-f'(y))^2}=-\frac{(1-f'(y))^2-f''(y)}{x^2(1-f(y))^3}。$$

二、解

$$原式=\lim_{x\to0}\exp\left\{\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\right\},$$

其中大括号内的极限是$\frac{0}{0}$型未定式，由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e(e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)e,$$

于是

$$原式=e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)e}。$$

三、解 由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$。令 $u=xt$，得

$$g(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x},x\neq0。$$

而

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2},x\neq0。$$

由导数的定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}。$$

另外

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)。$$

从而知 $g'(x)$在 $x=0$ 处连续。

四、证法 1 由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算。

(1)左边 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

右边 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

所以

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dy = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx。$$

(2)由泰勒公式得 $e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geqslant 2 + \sin^2 x$,故

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^{\pi} (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geqslant \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin^2 x) dx = \frac{5}{2}\pi^2。$$

证法 2　(1)根据格林公式,将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma,$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma。$$

因为关于 $y=x$ 对称,所以

$$\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\sigma,$$

故

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx。$$

(2)由 $e^t + e^{-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geqslant 2 + t^2$,有

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\sigma = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) d\sigma \geqslant \frac{5}{2}\pi^2。$$

五、解　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识,由题设可知 $2y_1 - y_2 - y_3 = e^{2x}$ 与 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 是相应齐次方程两个线性无关的解,且 xe^x 是非齐次方程的一个特解,因此可以用下述两种解法。

解法 1　设此方程式为

$$y'' - y' - 2y = f(x)。$$

将 $y=xe^x$ 代入上式,得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x,$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$。

解法 2　设 $y=xe^x+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$ 是所求方程的通解,由

$$y' = e^x + xe^x + 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}, \qquad y'' = 2e^x + xe^x + 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x},$$

消去 C_1,C_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$。

六、解　因抛物线过原点,故 $c=1$。由题设有

$$\int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3},$$

即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$,而

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi\left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2\right) \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}(1-a)^2\right]。 \end{aligned}$$

令

$$\frac{dV}{da} = \pi\left[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)\right] = 0,$$

得 $a=-\frac{5}{4}$,代入 b 的表达式得 $b=\frac{3}{2}$,所以 $y\geqslant 0$。

又因 $\left.\frac{d^2V}{da^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27}\right) = \frac{4}{135}\pi > 0$ 及实际情况,当 $a=-\frac{5}{4}$,$b=\frac{3}{2}$,$c=1$ 时,体积最小。

七、解 先解一阶常系数微分方程,求出 $u_n(x)$的表达式,然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和。

由已知条件可知 $u'_n(x)-u_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x$ 是关于 $u_n(x)$的一个一阶常系数线性微分方程,故其通解为

$$u_n(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right)。$$

由条件 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$,得 $C=0$,故 $u_n(x)=\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$,从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}。$$

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$,其收敛域为$[-1,1)$,当 $x\in(-1,1)$时,有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故

$$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)。$$

当 $x=-1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^{-1}\ln 2。$$

于是,当$-1\leqslant x<1$ 时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x)。$$

八、解 $\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$,故有

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}。$$

Y1 第一届预赛微课

第二届全国大学生数学竞赛预赛(2010 年非数学类)

试　　题

一、计算下列各题(本题共 5 个小题,每小题 5 分,共 25 分)(要求写出重要步骤)

(1)设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$,其中 $|a|<1$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

(2)求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$。

(3)设 $s>0$,求 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$。

(4)设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$,求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

(5)求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0,\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离。

二、(15 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数,并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0,使得 $f(x_0)<0$。证明:方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根。

三、(15 分)设函数 $y=f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t>-1$$

所确定,且 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数,曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\displaystyle\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$ 在 $t=1$ 处相切。求函数 $\psi(t)$。

四、(15 分)设 $a_n>0$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 证明:

(1)当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2)当 $\alpha\leqslant1$,且 $S_n\to\infty\,(n\to\infty)$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散。

五、(15 分)设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ)(其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线,均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant1$(其中 $0<c<b<a$,密度为 1)绕 l 旋转。

(1)求其转动惯量;

(2)求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值。

六、(15 分)设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上,曲线积分 $\displaystyle\oint_C\frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数。