第 1 章
函数及其初步知识

1.1 集　　合

教学说明

- 本章概述：本章属于中学与大学的衔接内容，通过对函数基础知识的概括、总结和归类，引出基本初等函数和初等函数的概念以及复合函数的概念，补充了 3 个三角函数和 4 个反三角函数，初步建立起高等数学微积分与初等数学之间的简单联系，考虑到相关专业和专升本的需求，本章补充了向量和复数的相关知识. 同时，为了配合教学改革的实际需求，本章也增设了 MATLAB 的初步知识.
- 本章主要内容：集合的概念与运算、函数的概念与性质、基本初等函数与初等函数的概念、复合函数的概念、向量的概念、复数的概念以及 MATLAB 的初步知识.
- 本章难点：初等函数的复合表述.
- 本章重点：基本初等函数.

1.1.1　集合的概念

把研究的对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫作集合. 集合的三要素是确定性、互异性、无序性. 只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合相等. 集合的表示方法有列举法、描述法.

常见集合有：正整数集合，用 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}^+$ 表示；整数集合，用 $\mathbf{Z}$ 表示；有理数集合，用 $\mathbf{Q}$ 表示；实数集合，用 $\mathbf{R}$ 表示.

例 1.1　试用列举法表示集合 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y<2,x,y\in\mathbf{Z}\}$.

解：集合元素是点，要求列举满足条件的点.

答案：该集合列举法表示为 $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$.

例 1.2　已知 $A=\{1,2\}$，$B=\{x|x\in A\}$，则集合 A 与 B 的关系为________.

解：由集合 $B=\{x|x\in A\}$ 知，$B=\{1,2\}$.

答案：$A=B$.

1.1.2　集合间的基本关系

一般地，对于两个集合 A、B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的子集，记作：$A\subseteq B$. 如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，则称

集合 A 是集合 B 的真子集，记作：$A \subsetneqq B$. 把不含任何元素的集合叫作空集，记作：$\varnothing$. 并规定：空集是任何集合的子集.

如果集合 A 中含有 n 个元素，则集合 A 有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

例 1.3 已知集合 $A=\{x \mid x^2-x-2<0\}$，$B=\{x \mid -1<x<1\}$，则(　　).

A. $A \subsetneqq B$　　B. $B \subsetneqq A$　　C. $A=B$　　D. $A \cap B=\varnothing$

解：本题主要考查一元二次不等式解法与集合间的关系，是简单题.

答案：B.

例 1.4 若全集 $U=\{0,1,2,3\}$ 且 $C_UA=\{2\}$，则集合 A 的真子集共有(　　)个.

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 8

解：$A=\{0,1,3\}$，真子集有 $2^3-1=7$.

答案：C.

1.1.3 集合间的基本运算

一般地，由所有属于集合 A 或集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集，记作：$A \cup B$. 由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作：$A \cap B$.

全集、补集：$C_UA=\{x \mid x \in U，且\ x \notin A\}$.

例 1.5 已知全集 $U=\{0,1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4\}$，则 $(C_UA) \cup B$ 为(　　).

A. $\{1,2,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{0,2,4\}$　　D. $\{0,2,3,4\}$

解：$C_UA=\{0,4\}$，$(C_UA) \cup B=\{0,2,4\}$

答案：C.

例 1.6 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x \mid x>0\}$，$B=\{x \mid x>1\}$，则 $A \cap (C_UB)=$________.

解：$C_UB=\{x \mid x \leqslant 1\}$，所以 $A \cap (C_UB)=\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$.

答案：$\{x \mid 0<x \leqslant 1\}$.

1.2 函　　数

1.2.1 函数的概念

设 A、B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 与它对应，那么就称 $f: A \to B$ 为集合 A 到集合 B 的一个函数，记作：$y=f(x)$，$x \in A$. 一个函数的构成要素为：定义域、对应关系、值域. 如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，则称这两个函数相等. 函数有以下三种表示方法：解析法、图像法、列表法.

知识提炼：函数概念的关注点.

例 1.7 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$.

(2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$.

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$.

解：(1) 在分式$\dfrac{3}{5x^2+2x}$中，分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq -\dfrac{2}{5}$，且 $x\neq 0$，即定义域为$\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2\geqslant 0$，解得$-3\leqslant x\leqslant 3$，即定义域为$[-3,3]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，即定义域为$\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

例 1.8　下列各组中的两个函数是同一函数的为(　　).

(1) $y_1=\dfrac{(x+3)(x-5)}{x+3}$，$y_2=x-5$.

(2) $y_1=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$，$y_2=\sqrt{(x+1)(x-1)}$.

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$.

(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$F(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

(5) $f_1(x)=(\sqrt{2x-5})^2$，$f_2(x)=2x-5$.

A. (1)、(2)　　B. (2)、(3)　　C. (4)　　D. (3)、(5)

解：(1) 定义域不同；(2) 定义域不同；(3) 对应法则不同；(4) 定义域相同，且对应法则相同；(5) 定义域不同.

答案：C.

同步训练：非函数关系举例.

1.2.2　函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$在某区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得$|f(x)|\leqslant M$(或$-M\leqslant f(x)\leqslant M$)，则称 $f(x)$在 I 上有界.既有上界又有下界方可称有界，否则都称为无界.函数 $f(x)$在 I 上有界，如图 1.1 所示；函数 $f(x)$在 I 上无界，如图 1.2 所示.

2. 单调性

设函数 $f(x)$在某区间 I 上有定义，对于区间内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上是增函数，区间 I 称为单调增区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 上是减函数，区间 I 称为单调减区间.单调增函数与单调减函数统称为单调函数.

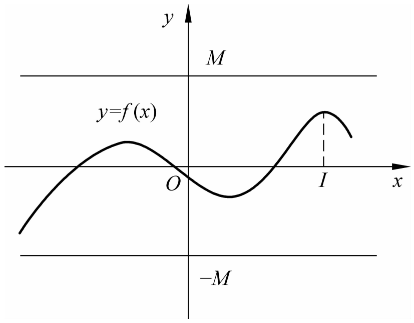

图 1.1

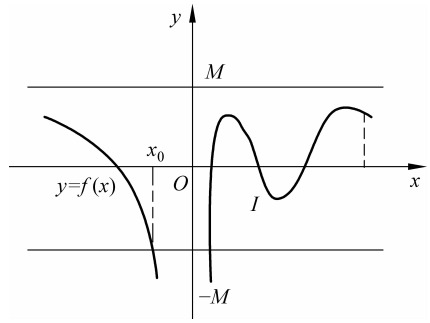

图 1.2

单调增加的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的(见图 1.3);单调减少的函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的(见图 1.4).

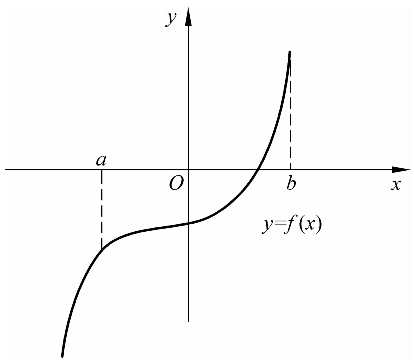

图 1.3

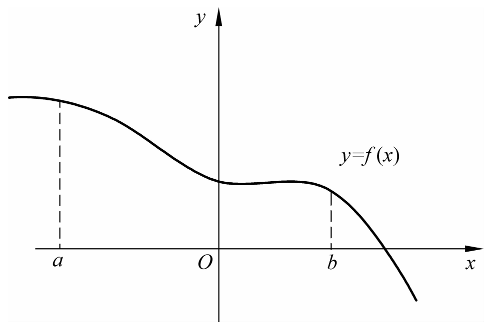

图 1.4

步骤:取值→作差→变形→定号→判断.

解:设 $x_1,x_2\in[a,b]$且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\cdots$

例 1.9 验证函数 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

解:在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点 $x_1<x_2$,于是 $f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

例 1.10 下列函数 $f(x)$中,满足"对任意 x_1 和 $x_2\in(0,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$"的是________.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (2) $f(x)=(x-1)^2$ (3) $f(x)=e^x$ (4) $f(x)=\ln(x+1)$

解:(1) 因为对任意的 x_1 和 $x_2\in(0,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数.

(2)、(3)、(4)均不符合.

答案:(1).

知识提炼:根据函数的单调性对函数分类.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$在某区间 I 上有定义，I 为关于原点对称的区间，若对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 偶函数的图像是对称于 y 轴的(见图 1.5)，奇函数的图像是对称于原点的(见图 1.6).

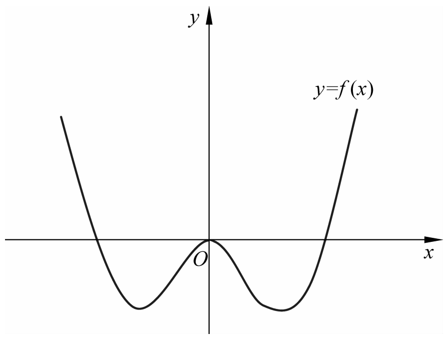

图　1.5

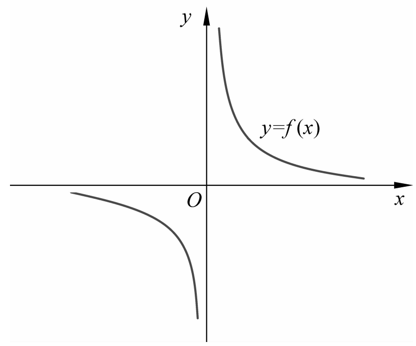

图　1.6

知识提炼：根据函数的奇偶性对函数分类.

例 1.11　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=2x^2+\sin x$.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})(a>0,a\neq 1)$.

解：(1) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x)$，同样可以得到 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=\frac{1}{2}[a^{-(-x)}-a^{-x}]=\frac{1}{2}(a^{x}-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})=-f(x)$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^{-x}-a^{x})$是奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$在某区间 I 上有定义，若存在不为零的数 T，使得对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期，但并非每一个函数都有最小正周期.

知识提炼：周期函数中，是否存在没有最小正周期的函数？

1.3　基本初等函数

1.3.1　常值函数

常值函数 $y=c$(c 是常数)，$x\in\mathbf{R}$. 其图像是一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线(见图 1.7).

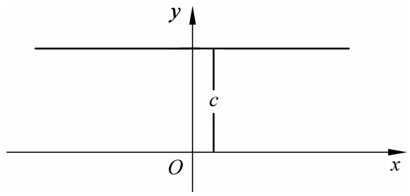

图 1.7

1.3.2 幂函数

1. 幂函数的定义

形如 $y=x^\alpha$(α 为实数)的函数称为幂函数.几种幂函数的图像如图 1.8 所示.

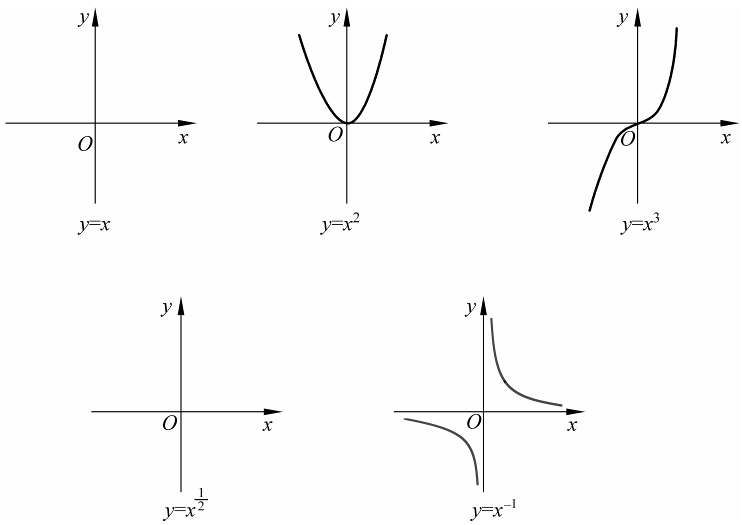

图 1.8

2. 幂函数的性质

这里,我们只讨论 $x\geqslant 0$ 的情形.

当 $\alpha>0$ 时,函数的图像通过原点(0,0)和点(1,1),在$(0,+\infty)$内单调增加且无界(见图 1.9).当 $\alpha<0$,图像不过原点,但仍通过点(1,1),在$(0,+\infty)$内单调减少、无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐进线(见图 1.10).

例 1.12 如图 1.11 所示的图像中,表示 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的是________.

解:$y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$是偶函数,所以排除②、③;当 $x>1$ 时,而$\dfrac{x}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{1}{3}}>1$,所以 $x>x^{\frac{2}{3}}$,故排除①.

答案:④.

例 1.13 函数 $y=x^3$( ).

A. 是奇函数,且在 **R** 上是单调增函数

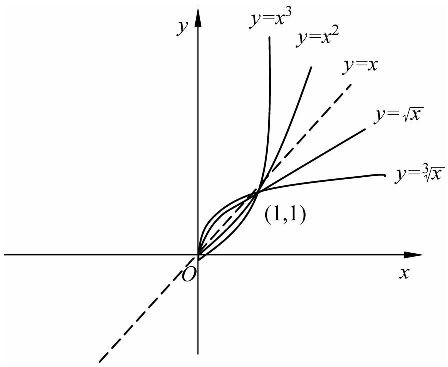

图　1.9

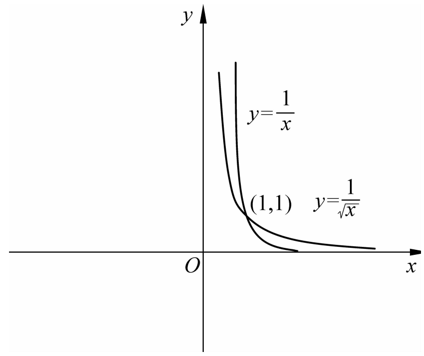

图　1.10

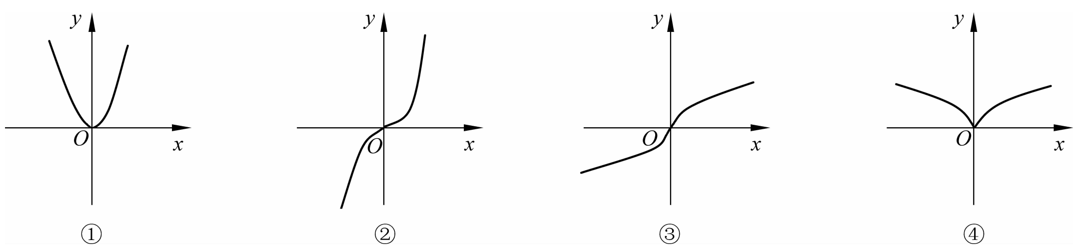

图　1.11

B. 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是单调减函数

C. 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数

D. 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是单调减函数

解：$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$为奇函数且为增函数.

答案：A.

1.3.3　指数函数

1. 指数函数的定义

形如 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$的函数称为指数函数.

一般地，如果 $x^n=a$，那么 x 叫作 a 的 n 次方根，其中 $n>1,n\in\mathbf{N}^+$. 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

我们规定：①$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}(a>0;m,n\in\mathbf{N}^*;m>1)$；②$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(n>0)$.

运算性质：

(1) $a^ra^s=a^{r+s}(a>0;r,s\in\mathbf{Q})$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0;r,s\in\mathbf{Q})$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

2. 指数函数的性质

指数函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$，它的图像全部在x轴上方，且通过点$(0,1)$（见图 1.12）.

当$a>1$时，函数单调增加且无界，曲线以x轴负半轴为渐近线；当$0<a<1$时，函数单调减少且无界，曲线以x轴正半轴为渐近线.

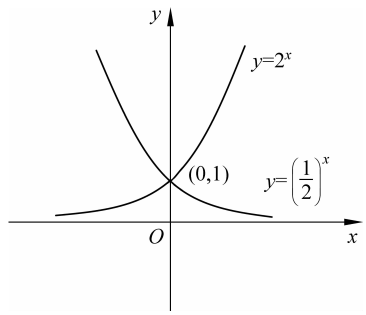

图 1.12

例 1.14 $\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[5]{4}$、$\sqrt[8]{8}$、$\sqrt[9]{16}$从小到大的排列顺序是________.

解：$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt[5]{4}=2^{\frac{2}{5}}$，$\sqrt[8]{8}=2^{\frac{3}{8}}$，$\sqrt[9]{16}=2^{\frac{4}{9}}$，而$\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}<\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$.

答案：$\sqrt[3]{2}<\sqrt[8]{8}<\sqrt[5]{4}<\sqrt[9]{16}<\sqrt{2}$.

1.3.4 对数函数

1. 对数函数的定义

形如$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）的函数称为对数函数.

指数与对数互化式：$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_a N$.

对数恒等式：$a^{\log_a N}=N$.

基本性质：$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$.

运算性质：当$a>0,a\neq1,M>0,N>0$时，有

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$.

(2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$.

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$.

换底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(a>0,a\neq1,c>0,c\neq1,b>0)$.

重要公式：$\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$.

倒数关系：$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1)$.

2. 对数函数的性质

对数函数的定义域是$(0,+\infty)$，图像全部在y轴右方，值域是$(-\infty,+\infty)$. 无论a取何值，曲线都通过点$(1,0)$（见图 1.13）.

当$a>1$时，函数单调增加且无界，曲线以y轴负半轴为渐近线；当$0<a<1$时，函数单调减少且无界，曲线以y轴正半轴为渐近线.

对数函数$y=\log_a x$和指数函数$y=a^x$互为反函数，它们的图像关于$y=x$对称（见图 1.14）.

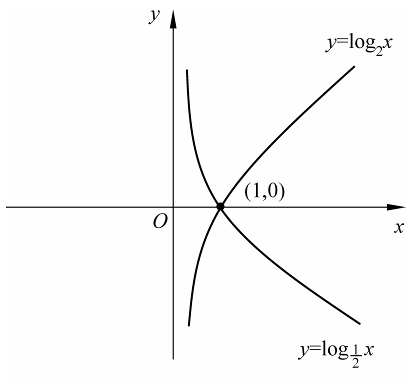

图　1.13

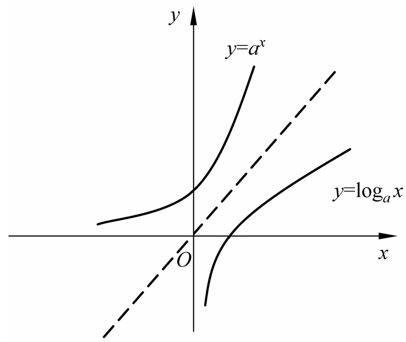

图　1.14

以无理数 $e=2.7182818\cdots$ 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫作自然对数函数，简记作 $y=\ln x$.

例 1.15　函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}$ 的定义域是(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$　　C. $\left[\frac{2}{3},1\right]$　　D. $\left(\frac{2}{3},1\right]$

解：$\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)\geqslant 0=\log_{\frac{1}{2}}1$，$0<3x-2\leqslant 1$，$\frac{2}{3}<x\leqslant 1$

答案：D.

1.3.5　三角函数

1. 任意角

角，即一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形，其中顶点、始边、终边称为角的三要素. 角可以是任意大小的. 角按其旋转方向可分为正角、零角、负角. 在直角坐标系中：①角的顶点在原点，始边在 x 轴的非负半轴上，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角. ②若角的终边在坐标轴上，就说这个角不属于任何象限，它叫象限界角. 与角 α 终边相同的角的集合：$\{\beta|\beta=k\times 360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

例 1.16　下列命题中正确的是________.

(1) 弧度角与实数之间建立了一一对应　　(2) 终边相同的角必相等

(3) 锐角必是第一象限的角　　(4) 小于 90° 的角是锐角

(5) 第二象限的角必大于第一象限的角

A. (1)　　B. (1)(2)(5)　　C. (3)(4)(5)　　D. (1)(3)

解：终边相同的角不一定相等，但相等的角的终边一定相同；终边相同的角有无数个，它们相差 360° 的整数倍.

正确理解角：“$0^\circ\sim 90^\circ$ 的角”指的是 $0^\circ\leqslant\theta<90^\circ$；“第一象限的角”“锐角”“小于 90° 的角”这三种角的集合分别表示为：

$\{\theta|k\times 360^\circ<\theta<k\times 360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$\{\theta\mid 0^\circ<\theta<90^\circ\}$，$\{\theta\mid\theta<90^\circ\}$.

答案：(1).

2. 弧度制

规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零．任一已知角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\dfrac{l}{r}$．这种以“弧度”作为单位来度量角的制度叫作弧度制．比值 $\dfrac{l}{r}$ 与所取圆的半径大小无关，仅与角的大小有关．

弧度与角度的换算：$180°=\pi$（弧度），1 弧度$=180°/\pi\approx57°18'$．

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫作 1 弧度的角．

弧长公式：$l=\dfrac{n\pi R}{180}=|\alpha|R$．

扇形面积公式：$S=\dfrac{n\pi R^2}{360}=\dfrac{1}{2}lR$．

例 1.17 点 P 从$(-1,0)$出发，沿单位圆 $x^2+y^2=1$ 顺时针方向运动 $\dfrac{\pi}{3}$ 弧长后到达 Q 点，则 Q 点的坐标为________．

解：由于点 P 从$(-1,0)$出发，顺时针方向运动 $\dfrac{\pi}{3}$ 弧长到达 Q 点，因此 Q 点的坐标为 $\left(\cos\dfrac{2\pi}{3},\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$，即 Q 点的坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

答案：$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$．

例 1.18 如果一扇形的圆心角为 $120°$，半径等于 10cm，则扇形的面积为________．

解：$S=\dfrac{1}{2}|\alpha|x^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}\times100=\dfrac{100\pi}{3}(\mathrm{cm}^2)$

答案：$\dfrac{100\pi}{3}\mathrm{cm}^2$．

3. 任意角的三角函数

设 α 是一个任意角，点 $A(x,y)$ 为角 α 终边上任意一点，那么（设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$）：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \tan\alpha=\frac{y}{x},\quad \cot\alpha=\frac{x}{y}$$

注意牢记特殊角 $0°$、$30°$、$45°$、$60°$、$90°$、$180°$、$270°$、$360°$的三角函数值．

例 1.19 已知角 α 的终边过点 $P(-5,12)$，则 $\cos\alpha=$________，$\tan\alpha=$________．

答案：$-\dfrac{5}{13}$，$-\dfrac{12}{5}$．

4. 同角三角函数的基本关系式

(1) 平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$．

(2) 商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$．

(3) 倒数关系：$\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$．