第1章

复变函数

1.1 复数及几何表示

1. 复数和复数域

1）复数

在求解实系数一元二次方程时，常常会遇到负实数开平方，最初人们只是简单地认为这是无意义的，即方程无解。后来在实践中发现，负实数开平方是一个普遍且不可回避的问题，于是引入了“虚数”单位 $\mathrm{i}\equiv\sqrt{-1}$，满足 $\mathrm{i}^2=-1$，这样实数就推广到由两个实数组成的数对：

$$z=(x,y)\overset{\text{def}}{=}x+\mathrm{i}y$$

称作复数。x 和 y 分别称作复数的实部和虚部，记作 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$。如果两个复数相等，$z_1=z_2$，则 $\mathrm{Re}z_1=\mathrm{Re}z_2$，$\mathrm{Im}z_1=\mathrm{Im}z_2$。

全部实数对 $(x,y)\in\mathbb{R}$ 的集合称作复数集 $\mathbb{C}$。另外，定义复数 z 的复共轭为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，我们有时也用 z^* 表示复共轭。

2）运算法则

定义复数的四则运算法则如下。

（1）加减法

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

即实部和虚部分别相加减，加法运算满足交换律、结合律和分配律。

（2）乘法

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

乘法运算按照实数的分配律进行，其结果仍然是一个复数。容易验证，复数的乘法运算满足交换律、结合律和分配律。对于复共轭，有 $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$。

（3）除法

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}$$

其中 $z_2 \neq 0$，可见复数做除法运算的结果仍然是复数。

3）复数域

对于由某类数构成的集合，如果其元素之间按加、减、乘、除做代数运算，得到的数仍然属于该集合，则称该集合构成数域。如全体有理数集$\mathbb{Q}$构成有理数域，全体实数集$\mathbb{R}$构成实数域。复数按照加、减、乘、除运算，仍然得到一个复数，因此，复数集$\mathbb{C}$构成复数域。与实数不同的是，复数不可比较大小，因此复数域不是有序域。

思考 如果采用下面的复数乘积定义，有什么不好？

（1）$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 + \mathrm{i}y_1y_2$；（2）$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$。

2. 几何表示

用二维笛卡儿坐标系的横轴和纵轴分别表示一对有序实数(x, y)，任意复数可以用平面上的一个点表示，这个平面称作复平面$\mathbb{C}$，横轴和纵轴分别称作实轴和虚轴，如图1.1所示。采用极坐标系，有

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

1）复数的模

$$|z| \overset{\text{def}}{=} (z \cdot \bar{z})^{1/2} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2）复数的辐角

$$\arg z \overset{\text{def}}{=} \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

其中$\mathbb{Z}$表示整数集。通常将 $k=0$ 时的辐角称为主辐角，记作

$$\mathrm{Arg}z = \theta \quad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

两个复数的加法和减法分别满足平行四边形法则和三角形法则（图1.2）。由三角函数关系，复数的乘法可表示为

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \tag{1.1.1}$$

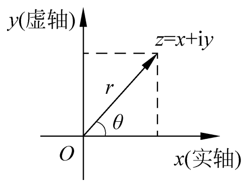

图 1.1

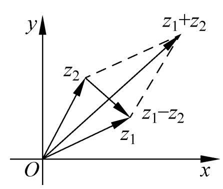

图 1.2

由式(1.1.1)可知，复数乘法存在映射关系，即

$$f(\theta_1) \cdot f(\theta_2) \mapsto f(\theta_1 + \theta_2)$$

它暗示复数的辐角可表示成指数形式。事实上我们将证明，复数 z 确实可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.1.2}$$

这个重要的关系式称为欧拉公式。

因此，两个复数的乘（除）运算分别为两复数的模相乘（除）、辐角相加（减），即

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

由欧拉公式(1.1.2)，可以得到棣莫弗(A. De Moivre)公式：

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.1.3}$$

以及传说中最完美的数学公式：

$$e^{i\pi}+1=0$$

例 1.1　求复数值：(1) $(1+i)^{100}$；(2) $\sqrt[4]{1-i}$。

解

(1) $(1+i)^{100}=(\sqrt{2}\,e^{\pi i/4})^{100}=2^{50}e^{25\pi i}=-2^{50}$；

(2) $\sqrt[4]{1-i}=(\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi i}{4}+2k\pi i})^{1/4}=\sqrt[8]{2}\,e^{-\frac{\pi i}{16}+\frac{k\pi i}{2}}=\sqrt[8]{2}\,e^{-\frac{\pi i}{16}},\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{7\pi i}{16}},\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{15\pi i}{16}},\sqrt[8]{2}\,e^{\frac{23\pi i}{16}}$。

需要强调的是，开根式会出现多个复数值；在例 1.1(2)中，四个复数值构成复平面上半径为$\sqrt[8]{2}$的圆内接正四边形的顶点，它们的四次方都等于 $1-i$。

例 1.2　求复数值：(1) i^{i}；(2) i^{-i}。

解

(1) $i^{i}=e^{\left(\frac{\pi i}{2}+2k\pi i\right)i}=e^{-\frac{\pi}{2}}e^{-2k\pi}\quad(k\in\mathbb{Z})$；

(2) $i^{-i}=e^{-\left(\frac{\pi i}{2}+2k\pi i\right)i}=e^{\frac{\pi}{2}}e^{2k\pi}\quad(k\in\mathbb{Z})$。

说明　如果将两个多值复数做乘积，如

$$(i^{i})\cdot(i^{-i})=e^{2k\pi}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

可见

$$(i^{i})\cdot(i^{-i})\neq i^{0}=1$$

这就是说，通常的代数乘积不适用于具有多值的复数运算。

例 1.3　用复数表示以 z_1 和 z_2 为焦点的椭圆方程。

解　椭圆为到两个固定点的距离之和不变的点集，所以用复数表示十分方便，即

$$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$$

其中 $2a$ 为椭圆的长轴。

3. 球极投影

将复数集$\mathbb{C}$加上一个理想数 $z=\infty$，构成紧致的闭集合$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$，理想数 $z=\infty$ 不参与代数运算。这样闭复平面$\overline{\mathbb{C}}$上任一点都和单位球面$\mathbb{S}$上的点一一对应，构成如图 1.3 所示的球极投影(stereographic projection)：$z\mapsto P$。闭复平面的∞点对应球面的北极点 N，球面$\mathbb{S}$称作黎曼球。

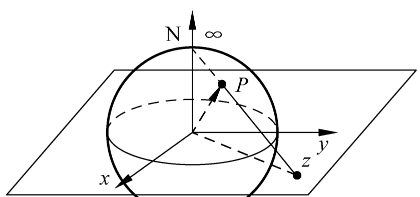

图　1.3

设黎曼球面$\mathbb{S}$上点 P 的笛卡儿坐标为(X,Y,Z)，有 $X^2+Y^2+Z^2=1$，它与闭复平面$\overline{\mathbb{C}}$上的投影点 $z(x,y)$有如下关系：

$$X=\frac{2x}{1+|z|^2},\quad Y=\frac{2y}{1+|z|^2},\quad Z=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\tag{1.1.4}$$

4. 代数基本定理

任何多项式方程 $p(z)=0$ 都至少有一个复数根。

如果每个多项式都有一个根 z_1，我们便可以从 $p(z)$中分解出一个乘积因子$(z-z_1)$，

设 $p(z)$的次数为 n，于是可以将 $p(z)$分解为 n 个乘积因子。因此可以得到推论：任何 n 次多项式方程有且只有 n 个复数根。

注记

16 世纪的意大利数学家卡尔丹(G. Cardano)也许是最早提出复数作为负数平方根的人，虽然他并不认为复数有什么实际用处，是“虚幻的数”。对于一元二次代数方程，并不要求一定有解，因此复数可有可无。但对于一元三次方程，复数的出现就有其必然性了，如方程 $x^3=px+q$，其解称作卡尔丹公式：

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

当 $(q/2)^2-(p/3)^3<0$ 时，公式里就会出现负数开平方根！然而，我们不能再以方程无解为理由而忽视它，事实上该式确实表达方程的一个实数根，尽管它似乎含有虚数。于是提出了这样一个问题，即寻找如

$$x=\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}$$

表达形式的实数。1572 年，邦贝利(R. Bombelli)提出可以利用虚数来解三次方程，按照卡尔丹公式，方程 $x^3=15x+4$ 的一个根是

$$x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$$

显然该方程有一个实根 $x=4$，邦贝利猜测公式中的两部分可能具有 $2+n\sqrt{-1}$ 和 $2-n\sqrt{-1}$ 的形式，将其分别取三次方，并利用 $(\sqrt{-1})^2=-1$，果然有

$$\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1},\quad \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2-\sqrt{-1}$$

因此卡尔丹公式给出的确实是实数解 $x=4$，尽管构成它的两部分都含有“虚幻的数”。卡尔丹还曾设计了一个智力挑战：能否将 10 分成两部分，使其乘积等于 40？他的答案是，如果将 10 写成 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$，就可以达到此目的。

复数的广泛应用主要是从欧拉开始的，但在其 1770 年的代数著作中，他还是写下了拗口的评语：“一切形如 $\sqrt{-1}$ 的数学式都是不可能有的、想象的数，它们既不是什么都不是，也不比什么都不是多些什么，更不比什么都不是少些什么。”复数的几何表示首先出现在丹麦的大地测量员维塞尔(C. Wessel)的著作中。高斯第一次系统地阐述了复数及其运算，代数基本定理的第一个完整证明也是高斯做出的。

鉴于复数的巨大成功和深刻含义，人们开始寻求更具一般意义的数。很早以前，丢番都(Diophantine)曾考虑由两个数组成的有序数对的运算，发现了两平方数之和的规律，为后来的四平方数之和以及八平方数之和的探究奠定了基础。丢番都在他的《算数》中指出：“65 有两种方式表示成两平方数之和，即 $65=7^2+4^2=8^2+1^2$，这是由于 $65=13\times 5$，而 $13=2^2+3^2$ 和 $5=1^2+2^2$ 都是两平方数之和”，即两平方数之和的乘积仍然是两平方数之和：

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

将数组 (a,b) 理解成 $a+\mathrm{i}b$，则上述公式正是复数的乘法法则，即将下列等式两边取模

$$(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(ac+bd)$$

哈密顿(W. Hamilton)认识到有序实数组对乘法的重要性，他开始研究更大的数

组——三元数和四元数的乘法。但是他在三元数的乘法中遭遇了很大的挫折，耗费了大量的时间，因为无论他怎样定义乘法，都无法进行除法操作，更深刻的原因却是并不存在“自然数的三平方数之和的乘积公式”，比如

$$3=1^2+1^2+1^2,\quad 21=1^2+2^2+4^2$$

但 3×21 却不能表示成三个自然数的平方和。

另一方面，巴歇(C. Bachet)和拉格朗日(J.-L. Lagrange)曾证明自然数的四平方数之和的乘积可以表示为四个平方数之和：

$$\begin{gathered}(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\\=(a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta)^2+(a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma)^2+\\(a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta)^2+(a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha)^2\end{gathered}$$

但其中的意义并没有被人们充分认识到。当哈密顿由三元数组转而考虑四元数组的乘法时，一切就豁然开朗了！他引入三个虚数符号(i,j,k)，令其满足

$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1$$

它们构成一个非交换的循环关系：

$$\begin{gathered}\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k}\\\mathrm{jk}=-\mathrm{kj}=\mathrm{i}\\\mathrm{ki}=-\mathrm{ik}=\mathrm{j}\end{gathered}$$

以此代表的四元数(quaternions)表示为

$$(a,b,c,d)=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$$

其一般乘积为

$$\begin{gathered}(a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k})(\alpha+\beta\mathrm{i}+\gamma\mathrm{j}+\delta\mathrm{k})\\=(a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta)+(a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma)\mathrm{i}+\\(a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta)\mathrm{j}+(a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha)\mathrm{k}\end{gathered}$$

四平方数之和定理意味着存在模的乘积。不久，约翰·格雷夫斯(J. Graves)以及稍后的阿瑟·凯莱(A. Cayley)在四元数的基础上进一步发现了八元数(octonions)，又被称为凯莱数或凯莱-格雷夫斯数

$$\alpha+\beta\mathrm{i}+\gamma\mathrm{j}+\delta\mathrm{k}+\varepsilon\mathrm{l}+\zeta\mathrm{m}+\eta\mathrm{n}+\theta\mathrm{o}$$

其基向量分别称为(1,i,j,k,l,m,n,o)，它对应于“八平方数之和定理”。八元数看上去相当怪异，它不仅不满足乘法的交换律，甚至不满足结合律：

$$(\mathrm{m}\times\mathrm{j})\times\mathrm{i}\neq\mathrm{m}\times(\mathrm{j}\times\mathrm{i})$$

具体关系可由图 1.4 表示，沿箭头方向规定乘积顺序：j×l=n，i×j=k，等等。四元数和八元数，以及由它们构成的多元数组，统称为超复数。

尽管哈密顿信心满满地宣称四元素是自然界最完美的数，但四元数并没有获得像二元复数一样的巨大成功。人们本来期望利用四元数来描述物理中常见的三维向量场，结果不成功。由吉布斯(J. W. Jibbs)和赫维赛德(O. Heaviside)创立的向量分析，实质上是将完整统一的四元数肢解为几个独立的分量，尽管它在物理学应用中大行其道，并且硕果累累，却令许多追求完美的数学家深感愤懑不平。四元数实际上表示空间转动而不是向量本身，并不适合描述经典的向量

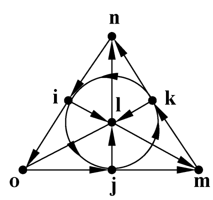

图　1.4

场。当卡丹(E. Cartan)将四元数等价于旋量后,它恰如其分地描述了微观粒子的量子化自旋。

最后,胡尔维茨(A. Hurwitz)证明除了 $n=2,4,8$ 之外,不再有其他的 n 平方和恒等式,亦即基本数系在八元数之外,不可能再有更高维数的推广。图 1.5 展示了实数、复数与四元数、八元数的相互关系;图 1.6 是一幅各种数系在运算法则演进中的联络图,揭示了从自然数、实数扩展为复数、四元数组,直到超复数的逻辑过程。

顺便提一句,近年来八元数在描述基本粒子相互作用的基础物理理论中,出现了一些活跃的迹象。它会是那把打开新世界的钥匙吗?

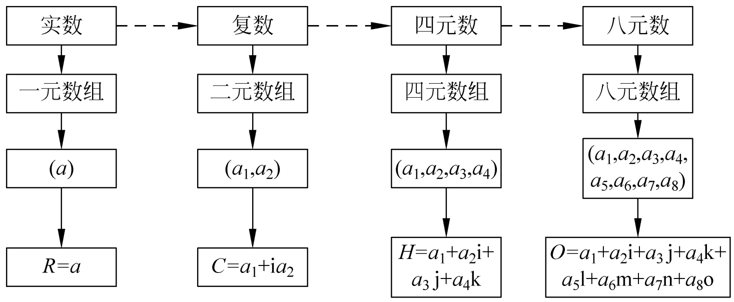

图 1.5

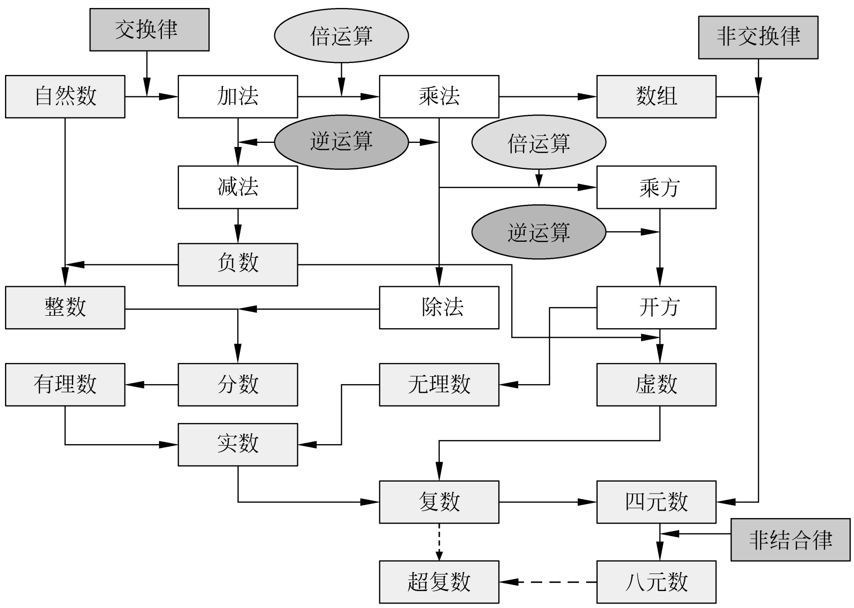

图 1.6

习题

[1] 计算:(1) $(-1)^{\mathrm{i}}$; (2) $\sqrt[\mathrm{i}]{2+\mathrm{i}}$; (3) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{1-\mathrm{i}}$。

[2] 证明:

(1) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\dfrac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\cos\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$;

(2) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$。

[3] 设 $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{n-1}(n>1)$是方程 $z^n-1=0$ 的 n 个根，证明：

(1) $\omega_0+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{n-1}=0$；

(2) $\omega_0^k+\omega_1^k+\omega_2^k+\cdots+\omega_{n-1}^k=\begin{cases}0 & (1\leqslant k\leqslant n-1)\\ n & (k=n)\end{cases}$；

(3) $\omega_0\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1}=(-1)^{n-1}$。

[4] 证明：三角形的内角和等于 π。

[5] 证明球极投影关系：

$$X=\frac{2x}{1+|z|^2},\quad Y=\frac{2y}{1+|z|^2},\quad Z=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

提示：过 N,P 直线的参数方程为 $Q(t)=N+t(P-N)$。

[6] 解释为什么有

$$6=\sqrt[3]{18+26\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{18-26\sqrt{-1}}$$

1.2 函数定义

1. 映射与区域

设 E 是复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的集合，如果 E 中的每一个元素 z，都映射到另一个复数集合 B 中的一个或多个元素 w，那么称 w 是复变数 z 的函数，记为 $w=f(z)$，$z\in E$。如果每个 z 值对应着 B 中唯一的一个 w 值，则称函数 $f(z)$ 是单值的。如果一个 z 对应多个 w 值，则称 $f(z)$ 为多值函数，如图 1.7 所示，其中 $B=B_1\cup B_2$。

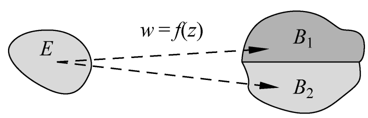

图 1.7

下面介绍几个基本概念：

(1) 邻域

复平面上以 z_0 为中心，以任意小的正数 ε 为半径的圆，其内部的点所组成的集合，称为 z_0 的邻域。

(2) 内点

如果 z_0 及其邻域内的点都属于集合 E，那么称 z_0 为 E 的内点。

(3) 外点

如果 z_0 及其邻域内的点都不属于 E，那么称 z_0 为 E 的外点。

(4) 开集

如果 E 内的每一点都是内点，那么称 E 为开集。

(5) 边界点

如果在 z_0 的邻域内，既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 z_0 为集合 E 的边界点；边界点的全体构成集合 E 的边界线。

（6）连通性

如果集合 E 中的任意两点，都可以用属于该集合的一条连续曲线连接起来，则称集合 E 是连通的。如果找不到这样一条线，则称集合 E 是非连通的（图 1.8(a)）。

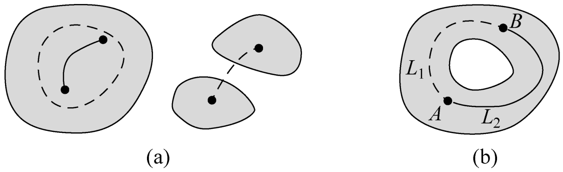

图 1.8

（7）区域

如果集合 B 全部由内点组成，且整个集合是互相连通的，我们称该集合构成一个区域。

（8）闭区域

区域 B 及其边界线所组成的集合，称作闭区域，以 $\bar{B}$ 表示。

（9）单连通区域

如果区域中的任意一条闭合曲线可以连续收缩到一点（图 1.8(a)），则称该区域为单连通区域；在单连通区域中，连接任意两点之间的所有路径都可以连续地互相转化，它们在拓扑上都是互相等价的，称作路径同伦。

（10）多连通区域

区域中的两点，可以用属于该点集的两条或多条拓扑不等价的连续曲线连接起来（图 1.8(b)）。L_1 不能连续地形变到 L_2，或者说图中由 L_1 和 L_2 构成的闭合回路不能连续收缩到一点。

用汉字举例，图 1.9 中的(a)是单连通的，(b)是非连通的，(c)、(d)和(e)是多连通的。(c)和(d)都含有两个“亏格”，它们在拓扑上互相等价，即从一个通过连续变形（不做割裂）可以变为另一个，在数学中称二者同胚（homeomorphism）。

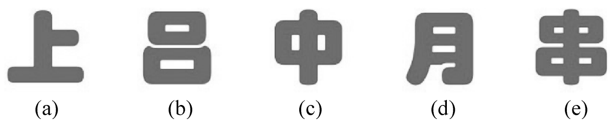

图 1.9

2. 初等复变函数

对于复自变量 $z=x+\mathrm{i}y$，定义几种常见的初等复变函数。

（1）指数函数

$$\mathrm{e}^z \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \tag{1.2.1}$$

对于任意 $z\in\mathbb{C}$，有

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{n/2}$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arctan\frac{y/n}{1+x/n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y$$

指数函数的模和辐角分别为 $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$ 和 $\arg\mathrm{e}^z = y$，由此得到欧拉公式：

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

由欧拉公式可以推知，指数函数在沿虚轴方向是周期函数：$\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$，并且容易证明，指数函数满足关系：

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}$$

（2）三角函数

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\quad \cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \tag{1.2.2}$$

可以验证，复三角函数有类似于实三角函数的性质，即

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1\cos z_2 \pm \cos z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1\cos z_2 \mp \sin z_1\sin z_2$$

类似地，还可定义正切函数和余切函数等。

说明　只有在复数域中，三角函数才与指数发生联系。

例 1.4　令 $z=x+\mathrm{i}y$，证明：① $|\sin z|^2=\sin^2 x+\sinh^2 y$；② $|\cos z|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y$。

证明

① 根据定义，有

$$|\sin z|^2 = \frac{1}{4}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}|^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x+y})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x-y}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x+y})$$

$$= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-2y}+\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}) = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

同样可证明②。可见 $|\sin z|$ 和 $|\cos z|$ 可以大于 1，这与实变函数不同。

（3）双曲函数

$$\sinh z \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2},\quad \cosh z \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2} \tag{1.2.3}$$

双曲函数在沿虚轴方向也是周期函数，且有

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z),\quad \cosh z = \cos(\mathrm{i}z)$$

（4）对数函数

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)\quad (k\in\mathbb{Z}) \tag{1.2.4}$$

对数函数是指数函数的反函数，由于指数函数是周期函数，所以对数函数是多值函数。称 $k=0$ 为对数的主值，记作

$$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z\quad (0 \leqslant \arg z < 2\pi)$$

例 1.5 计算对数值：① $\ln(-1)$；② $\ln(1+\mathrm{i})$。

解 根据定义，有

① $\ln(-1)=\ln \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}=\pi\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$；

② $\ln(1+\mathrm{i})=\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}+2k\pi\mathrm{i}})=\ln\sqrt{2}+\dfrac{\pi\mathrm{i}}{4}+2k\pi\mathrm{i}\ (k\in\mathbb{Z})$。

(5) 反三角/双曲函数

$$\begin{cases}\arcsin z=-\mathrm{i}\ln(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}), & \arccos z=-\mathrm{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})\\ \arctan z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\ln\dfrac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, & \operatorname{arcsinh} z=\ln(z+\sqrt{1+z^2})\end{cases}\tag{1.2.5}$$

由于三角函数是周期函数，所以反三角函数是多值函数，它们都可由对数函数表示。

(6) 一般幂函数

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{\alpha\ln z}$$

当 α 为整数时，幂函数是单值函数；当 α 为有理数时，分数幂函数是多值函数，比如 $\alpha=1/2$ 称为根式函数，

$$\sqrt{z}=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)\quad(k=0,1)$$

对应于每一个 z，有两个不同的函数值：$\sqrt{z}=\pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$。当 α 为无理数或复数时，幂函数是无穷重多值函数。

(7) 一般指数函数

$$w=a^z \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{z\ln a}$$

式中 $a\neq 0,\infty$，函数 $w=a^z$ 不是通常语义下的函数，因为

$$\ln a=\ln|a|+\mathrm{i}\arg a+2k\pi\mathrm{i}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

取无穷多值，因而 a^z 有多重值，但它不是多值函数，它的多值性不是来自 z 的辐角增加，所以它应视作不同函数的集合：

$$\mathrm{e}^{z(\ln|a|+\mathrm{i}\arg a)}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi z}\quad(k\in\mathbb{Z})$$

例 1.6 求方程的根：(1) $\sin z=0$；(2) $\sin z=2$。

解

(1) 根据定义

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=0$$

所以

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}=1\rightarrow z=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

(2) 根据

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})=2$$

有

$$\mathrm{e}^{4\mathrm{i}z}-4\mathrm{i}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-1=0\rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=(2\pm\sqrt{3})\mathrm{i}$$

于是有