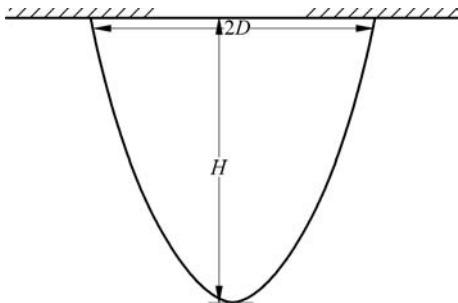


平 衡

001 悬链线的几何特征

问题：拿出一根蛇骨链，两手捻住两端，使其处在同一高度，你会看到一个神奇的曲线。这个曲线是什么曲线，有没有解析表达式？你可以移动双手改变蛇骨链两端的水平距离。在做这个实验的过程中，你会发现，水平距离 $2D$ 缩短，链条的高度 H 就加长，反之亦然（参照题图）。那么，这两个几何特征长度到底满足什么样的关系？



解析：首先利用微元分析法来推导悬链线方程。设悬链线的长度是 $2l$ ，线密度是 ρ 。由对称性，设悬链线的最低点（通常为中点）为原点，最低点悬挂重物，质量为 m 。弧长坐标为 $s \sim s+ds$ 的绳子微元受到三个力：两端的张力，大小分别为 $T(s)$ 和 $T(s+ds)$ ，重力 $G = \rho g ds$ ，如图 1 所示。

绳子微元受力平衡，将其在水平和竖直方向进行分解，得

$$d(T(s)\cos\theta(s)) = 0 \quad (1)$$

$$d(T(s)\sin\theta(s)) = \rho g ds \quad (2)$$

其中 $\theta(s)$ 为弧长坐标 s 处悬链线切线与水平方向的夹角，且有

$$dx(s) = \cos\theta(s)ds, \quad dy(s) = \sin\theta(s)ds \quad (3)$$

悬链线最低点重物受力平衡，有

$$2T_0\sin\theta_0 = mg \quad (4)$$

其中 T_0 为悬链线最低端的张力， θ_0 为悬链线最低端切线与水平方向的夹角。由式(1)、式(2)和式(4)解得

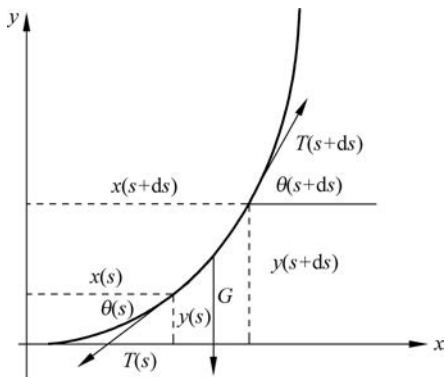


图 1 绳子微元受力分析示意图

$$T_0 \cos \theta_0 (\tan \theta(s) - \tan \theta_0) = \rho g s \quad (5)$$

作变量代换 $\tan \theta = \sinh \tau$, 则有 $\cos \theta = 1/\cosh \tau$, $\sin \theta = \tanh \tau$ 。设 τ_0 为绳子最低端对应的参数, τ_1 为绳子其中一个端点(不妨设为右端)对应的参数。将式(5)代入式(3), 计算得到悬链线形状的参数方程:

$$x(\tau) = \frac{kl}{\sinh \tau_0} (\tau - \tau_0) \quad (6)$$

$$y(\tau) = \frac{kl}{\sinh \tau_0} (\cosh \tau - \cosh \tau_0) \quad (7)$$

其中比例系数 k 为重物质量 m 与悬链线质量 $2\rho l$ 的比值, 它与参数 τ_1, τ_0 的关系式为

$$\frac{1}{k} = \frac{2\rho l}{m} = \frac{\sinh \tau_1 - \sinh \tau_0}{\sinh \tau_0} \quad (8)$$

由式(6)和式(7)得到悬链线的半宽度 D 和高度 H 分别为

$$D = x(\tau_1) = \frac{kl}{\sinh \tau_0} (\tau_1 - \tau_0) \quad (9)$$

$$H = y(\tau_1) = \frac{kl}{\sinh \tau_0} (\cosh \tau_1 - \cosh \tau_0) \quad (10)$$

式(8)中, 两个参数 τ_0 和 τ_1 是有约束关系的, 不是独立的。所以式(9)和式(10)实际上只是一个独立参数的表达式, 也就是悬链线半宽度 D 和高度 H 的参数方程。

练习: 实际做实验, 验证式(9)和式(10)。

注解: 以上推导最关键的一步是变量替换, 即 $\tan \theta = \sinh \tau$ 。这样做的好处是几乎所有的物理(数学)量都有初等函数的解析表达式, 便于物理上的表示和求解。

002 越过光滑钉子的悬链线

问题: 把两个光滑钉子并排钉在墙壁上, 链条的总长度超过两个钉子的水平距离, 把链条轻轻搭放在两个钉子上。或者把链条的一端固定在一个钉子上, 其余部分搭在另一个钉子上。满足什么条件时这个链条才能不滑落?

解析: 利用上一题的结论, 当链条底端(中点部分)不挂重物时, $k=0$ 和 $\tau_0=0$, 悬链线

形状方程为

$$x(\tau) = \frac{l}{\sinh\tau_1}\tau, \quad y(\tau) = \frac{l}{\sinh\tau_1}(\cosh\tau - 1)$$

τ_0, τ_1 等参数含义同上题,最低端处的张力为

$$T_0 = \frac{\rho gl}{\sinh\tau_1}$$

端点上的张力 T_{end} 为

$$T_{\text{end}} = T_0 \cosh\tau_1 = \rho gl \coth\tau_1$$

如果两个钉子间距离 $2d$ 固定,那么链条在两个钉子之间的半长度 l 和两个端点上的张力 T_{end} 表达式为

$$l = d \frac{\sinh\tau_1}{\tau_1}, \quad T_{\text{end}} = d\rho g \frac{\cosh\tau_1}{\tau_1}$$

平衡时端点上的张力 T_{end} 等于端点处下垂链条的重力,由此得到下垂长度为

$$l_{\text{down}} = \frac{T_{\text{end}}}{\rho g} = d \frac{\cosh\tau_1}{\tau_1}$$

先考虑搭在两个钉子上的链条,由对称性,链条总长度的一半 L 等于两个钉子之间悬链长度的一半 l 加上下垂长度 l_{down} ,即

$$d \frac{\cosh\tau_1}{\tau_1} + d \frac{\sinh\tau_1}{\tau_1} = L$$

继续化简得到

$$\frac{\exp\tau_1}{\tau_1} = \frac{L}{d} \quad (1)$$

令 $f(\tau) = \exp(\tau)/\tau$, 分析发现函数 $f(\tau)$ 在 $\tau=1$ 处有极小值 $\exp(1)$ 。这意味着当链条总长度与钉子间距离比值大于 $\exp(1) = 2.72$ 时,式(1)才有解,且有两个解。譬如取 $\tau_1 = 0.5$, 那么另一个解为 1.75, 相应的链条平衡位形如图 1(比例不同)所示。

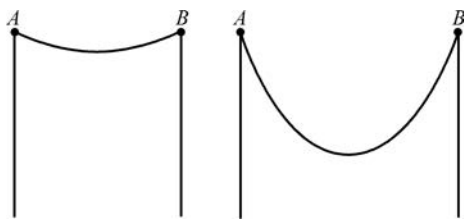


图 1 链条轻搭两钉上超过极限长度时链条的两个平衡位形

再考虑一端固定,其余部分搭放在另一钉子上的链条。此时链条的总长度 $2L$ 等于两个钉子之间悬链长度的 $2l$ 加上下垂长度 l_{down} :

$$d \frac{\cosh\tau_1}{\tau_1} + 2d \frac{\sinh\tau_1}{\tau_1} = 2L$$

继续化简得到

$$\frac{1}{2} \frac{\cosh\tau_1}{\tau_1} + \frac{\sinh\tau_1}{\tau_1} = \frac{L}{d} \quad (2)$$

令 $g(\tau) = (2\sinh\tau + \cosh\tau)/2\tau$, 分析发现函数 $g(\tau)$ 在 $\tau = 0.89$ 处有极小值 1.94。这意味着当链条总长度与钉子间距离的比值大于 1.94 时, 式(2)才有解, 且有两个解。譬如, 取 $\tau_1 = 0.3$, 那么另一个解为 2.00, 相应的链条平衡位形如图 2(比例不同)所示。

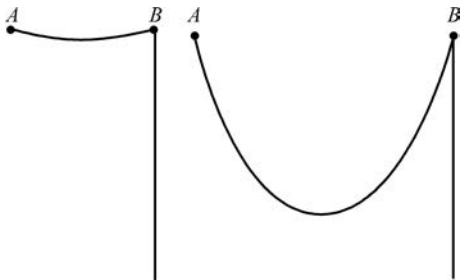


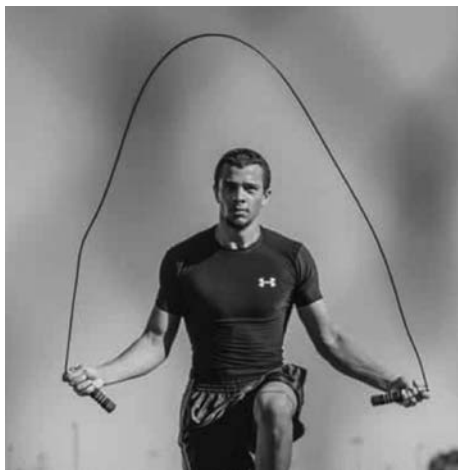
图 2 一端固定情况超过极限长度时链条的两个平衡位形

练习: 实验上如何使钉子光滑? 使链条能摆放成图 1 和图 2 中的理论图形?

注解: 图 1 和图 2 中链条的两个平衡位形, 哪个更稳定?

003 跳绳的形状

问题: 现在让链条动起来, 绕着两端连线的水平轴匀速转动起来, 这就是我们所熟悉的跳绳。那么跳绳的形状是什么样的?



解析: 为简单起见, 先不考虑重力的影响, 这样不同角度(界面)的跳绳形状都一样。以绳子两个固定端点的连线为 x 轴, 设转动绳子中的张力(分布)为 T , 绳子微元的坐标为 (x, y) , 并采用弧长 s 和切角 θ 坐标, 如图 1 所示。

由微分几何知识可知

$$dx = \cos\theta ds, \quad dy = \sin\theta ds$$

绳子微元水平方向受力为零, 张力垂直分量之差提供向心力, 由此得

$$d(T \sin\theta) = -\omega^2 \rho y ds, \quad d(T \cos\theta) = 0 \quad (1)$$

由式(1)中第二个方程很容易积分得

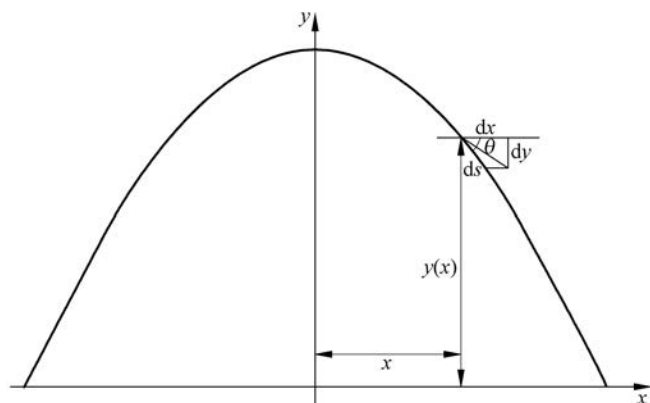


图1 跳绳模型示意图

$$T \cos \theta = T_0$$

其中 T_0 为绳子中点部分的张力,代入式(1)中的第一个方程,得到

$$T_0 d(\tan \theta) = -\omega^2 \rho y ds \quad (2)$$

再设

$$p = \tan \theta = dy/dx$$

式(2)化为

$$T_0 dp = -\omega^2 \rho y \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} dy$$

继续化简得

$$\frac{p dp}{\sqrt{p^2 + 1}} = -\frac{\omega^2 \rho}{T_0} y dy$$

积分得

$$\sqrt{p^2 + 1} - 1 = \frac{\omega^2 \rho}{T_0} (h^2 - y^2)$$

其中 h 为绳子中点到两端水平连线的垂直距离,长度以 h 为单位,并设 $\lambda = \omega^2 h^2 \rho / T_0$,则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \lambda - \lambda y^2)^2 - 1}} \quad (3)$$

令 $k^2 = \lambda / (\lambda + 2)$,则式(3)化为

$$\sqrt{\lambda(\lambda + 2)} dx = \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} \quad (4)$$

对上式积分,并定义 a 为绳子两端距离的一半,则有

$$\sqrt{\lambda(\lambda + 2)} a = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = K(k)$$

由椭圆函数的定义,可得式(4)的解

$$y = \operatorname{sn}(\sqrt{\lambda(\lambda + 2)}(a - x), k)$$

其中 sn 为雅可比椭圆函数,这就是无重力环境下两端固定转动绳子时绳子的形状方程。

注解 1: 按以上的模型, 跳绳的形状与转速没有关系, 转速越大, 最高处(中心)的张力也越大, 使参数 $\lambda = \omega^2 h^2 \rho / T_0$ 保持为常数。

注解 2: 跳绳是最常见的健身运动, 没想到绳子运动时的形状居然与特殊函数——椭圆函数有关。图 1 就是按照椭圆函数画出来的, 它与真实的跳绳形状有多大区别?

004 泪滴状旋转悬链线

问题: 用工字钉把蛇骨链的两端穿在塑料饮料管(直径)两侧, 然后用双手掌心搓动饮料管。调节转速, 你看到的转起来的链条轮廓线是什么形状? 能看到泪滴状吗? (参考下图)

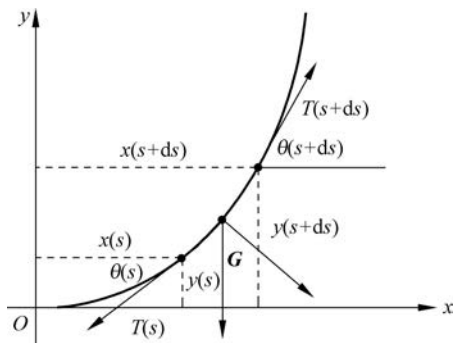


图 1 悬链线微元的受力分析

解析: 设链条质量均匀分布, 线密度为 ρ , 长度为 $2l$ 。利用微元分析法来推导转动悬链线方程, 设弧长坐标 s 处的绳子张力为 $T(s)$ 。弧长坐标为 $(s, s+ds)$ 的绳子微元受到三个力, 重力 $G = \rho g ds$, 两端的绳子张力, 大小分别为 $T(s)$ 和 $T(s+ds)$, 如图 1 所示。

绳子微元竖直方向受力平衡, 有

$$T(s+ds)\sin(\theta(s+ds)) - T(s)\sin(\theta(s)) = \rho g ds$$

绳子张力水平方向分力的合力等于绳子微元的

向心力, 即

$$T(s+ds)\cos(\theta(s+ds)) - T(s)\cos(\theta(s)) = -\omega^2 x(s)\rho ds$$

频率以 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ 为单位, 长度以 l 为单位, 力以 ρgl 为单位, 忽略上式中 ds 的高阶小量, 计算得到量纲归一化后的旋转悬链线方程为

$$d(T(s)\cos\theta(s)) = -\omega^2 x(s)ds \quad (1)$$

$$d(T(s)\sin\theta(s)) = ds \quad (2)$$

加上几何约束方程

$$dx = \cos\theta ds, \quad dy = \sin\theta ds \quad (3)$$

这组微分方程没有解析解,只能通过数学软件数值求解。未知量有四个,分别为 x 、 y 、 θ 、 T ,都是弧长 s 的隐函数。初始条件为

$$x(0)=0, \quad y(0)=0, \quad \theta(0)=0, \quad T(0)=T_0 \quad (4)$$

数值求解以上方程,悬链的最上端横坐标 $a=x(1)$ 是悬链最低端的张力 T_0 和转速平方 ω^2 的数值函数。实验中通过测量确定转速,当最上端横坐标 a 为零时,可以确定最低端的张力 T_0 的值。把这个张力值反代回原来的微分方程组中,得到 x 、 y 的数值解,以及泪滴状的旋转悬链,如图 2 所示。

练习: 做实验让折线状的蛇骨链转起来,看看什么参数下,转动链条的侧面轮廓线最像一个泪滴。

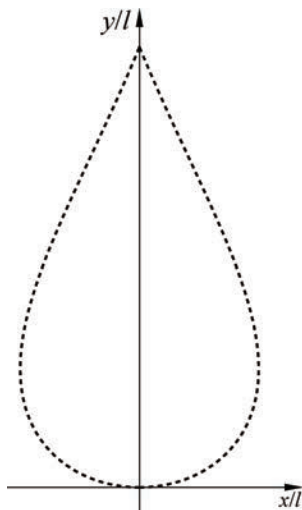


图 2 泪滴状旋转悬链

005 倒放的心形旋转悬链线

问题: 用工字钉把蛇骨链的两端穿在塑料饮料管同一侧的上下两处,然后用双手掌心搓动饮料管。调节转速,你看到的转起来的链条轮廓线会呈现什么样的奇怪曲线? 能看到倒放裂开的心形吗?



解析: 链条的形状方程与上一问题中一样,为解答完整,把形状方程重新写一下:

$$d(T(s)\cos\theta(s)) = -\omega^2 x(s) ds \quad (1)$$

$$d(T(s)\sin\theta(s)) = ds \quad (2)$$

$$dx = \cos\theta ds, \quad dy = \sin\theta ds \quad (3)$$

但是初始条件不同:

$$x(0)=0, \quad y(0)=0, \quad \theta(0)=\theta_0, \quad T(0)=T_0$$

数值求解以上微分方程组,得到悬链最上端横坐标和纵坐标的数值函数:

$$x(1)=F(\omega^2, \theta_0, T_0), \quad y(1)=G(\omega^2, \theta_0, T_0)$$

其中 F 和 G 是张力 T_0 、切角 θ_0 和转速平方 ω^2 的数值隐函数。当角速度平方确定时,由链条上端的边界条件 $x(1)=0, y(1)=h$, 就能确定剩下两个初始条件,即张力 T_0 和切角 θ_0 。把这三个初始值反代回原来的方程组,得到链条曲线坐标的数值解和形状。

旋转链条形状非常敏感地依赖于转速平方 ω^2 和上下两端的距离 h , 如果这两个参数选取不好, 会得到蝴蝶状和瓜子状, 如图 1 和图 2 所示。

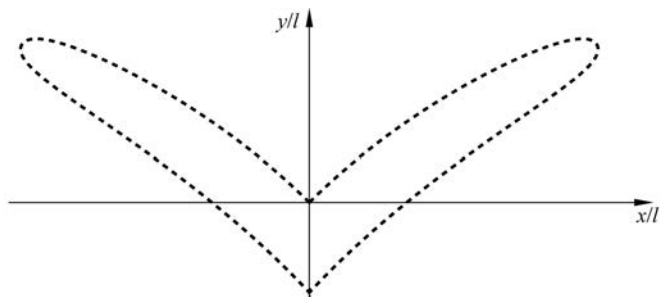


图 1 蝴蝶状旋转链条

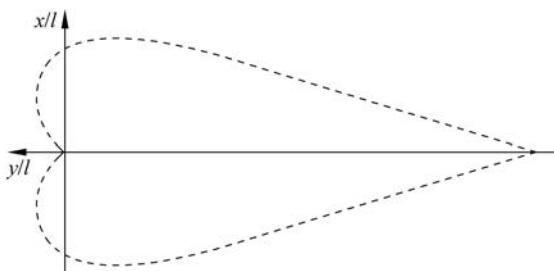


图 2 瓜子状旋转链条(图形逆时针旋转 90° 得到的)

只有选择合适的初始条件,才能在理论上得到最像心形的转动链条,如图 3 所示。

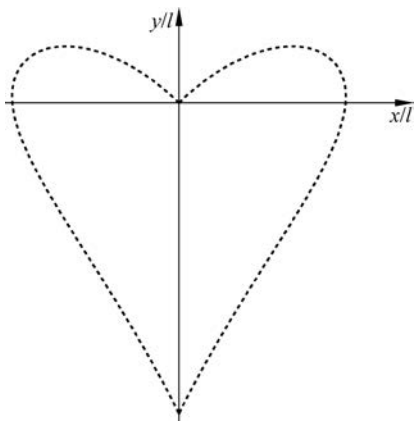


图 3 心形旋转链条

练习: 实际做实验,调节转速和链条上下两端距离,看看什么参数下链条的轮廓线最像一颗破裂的心。

注解：这两个题目(004,005)中,匀速转动链条的形状方程,利用微元分析法很容易推导出来,但是这些微分方程组一般是没有解析解的(与跳绳形状不一样,跳绳的形状方程有解析解)。所以题目的难点在于如何借助数学软件,把满足边界条件的微分方程组解出来。

006 竖直悬挂转动的链条

问题：用工字钉把蛇骨链的一端穿在塑料饮料管最下面,然后用双手掌心搓动饮料管,带动链条旋转。或者直接用食指和大拇指捻住蛇骨链的上端,旋转链条。调节转速,你看到的转起来的链条是什么曲线?



解析：假设链条底端还挂着一个重物(视为质点),质量为 m 。链条长度为 L ,单位长度的质量为 ρ ,转动频率为 ω 。稳定旋转时绳上的坐标为 $(x(s), y(s))$, y 轴向下,其中 s 为弧长参数, $x(s)$ 为绳上一点到转轴的距离,角度 θ 为绳子线元与 y 轴的夹角, $T(s)$ 为绳子线元在弧长 s 处的张力,如图 1 所示。

由微分几何知识,可得坐标对弧长的参数方程是

$$dx(s) = \sin\theta(s)ds, \quad dy(s) = \cos\theta(s)ds \quad (1)$$

稳定旋转时,绳子线元的竖直坐标不变,在竖直方向上受力平衡:

$$T(s)\cos\theta(s) = T(s+ds)\cos\theta(s+ds) + \rho g ds \quad (2)$$

绳子线元两端张力水平方向的合力充当向心力,即

$$T(s)\sin\theta(s) - T(s+ds)\sin\theta(s+ds) = \omega^2 \rho x ds \quad (3)$$

当线元长度趋向于零时,忽略高阶小量,将式(2)和式(3)化简得

$$d(T\cos\theta) = -\rho g ds, \quad d(T\sin\theta) = -\omega^2 x \rho ds \quad (4)$$

以“0”标记原点,“1”标记端点,在端点 1 处绳子张力的竖直分量与重物重力平衡,水平分量充当向心力,所以边界条件为

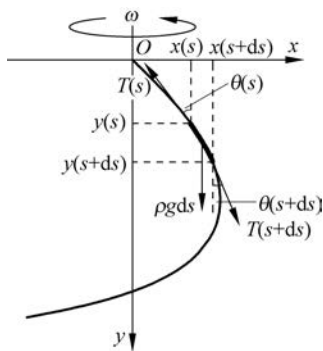


图 1 稳定旋转链条受力分析示意图

$$T_1 \cos \theta_1 = mg, \quad T_1 \sin \theta_1 = m\omega^2 x_1 \quad (5)$$

在原点的边界条件为

$$x(0) = y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0$$

为了方便数值求解,先把绳长参数 s 、绳中的张力 T 无量纲化: $s \rightarrow s/L, T \rightarrow T/\rho g L$ 。再定义两个无量纲的数: $k_1 = \omega^2 L/g$ 和 $k_2 = m/\rho L$ 。无量纲化后,式(4)中的第一个方程可以直接积分出来:

$$T \cos \theta = 1 - s + k_2 \quad (6)$$

将式(6)代入式(4)中的第二个方程,得到

$$d((1 + k_2 - s) \tan \theta(s)) = -k_1 x(s) ds \quad (7)$$

由式(5),得端点 $s=1$ 的边界条件为

$$F(k_1, k_2, \theta_0) = \tan \theta_1 - k_1 x_1 = 0 \quad (8)$$

数值求解联立方程式(1)和式(7),其中共有三个未知函数 $x(s)$ 、 $y(s)$ 、 $\theta(s)$ 。数值求解得到 $F(k_1, k_2, \theta_0)$ 为关于 θ_0 的函数,它与 θ_0 横轴有多个交点,每个交点理论上对应于一个稳定旋转形变的起始倾角。数值计算发现,当重物与链条质量比 k_2 固定时,只有当转速参数 k_1 超过某个极限(临界)值(第一激发角速度)时,数值函数与什么概念才有交点(有解)。数值计算还发现,重物越重,第一激发角速度越小,越容易转起来。就算不挂重物,从理论上讲,只有驱动角速度超过特定值时,链条才能转(弯)起来。

练习: 实际做实验,测量转速和所有相关物理量,把转起来弯曲链条的实际形状(曲线)和数值求解微分方程得到的理论曲线进行对比,看看多大程度上能符合。

注解: 临界转速的精确值是多少? 有没有近似(解析)方法来得到该值,并对照?

007 表面张力作用下的悬链线

问题: 把柔软纤细的棉线两端系在一个杆上,将整个体系浸没在肥皂水中,然后小心提出使杆水平,棉线和内部的肥皂膜在竖直平面上。调节棉线两端距离,你会看到棉线呈现什么样的形状?

解析: 物理模型还是质量均匀分布的棉线(链条),不过除了重力外,棉线还受到内部肥皂膜的表面张力作用,受力分析示意图如图1所示。

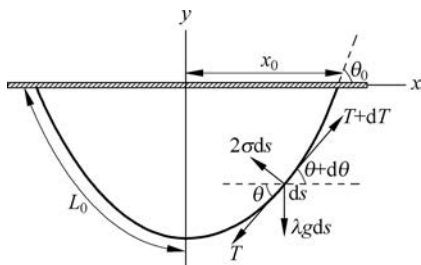


图1 表面张力作用下的棉线

由微元分析法,可得切向方向的张力之差等于微元重力的切向分量,即

$$dT = \lambda g \sin \theta ds \quad (1)$$

其中 λ 为链条的线质量密度。微元法向方向的受力为表面张力、法向方向的张力之差和重力的法向分量,由此得

$$2\sigma ds + T d\theta = \lambda g \cos \theta ds \quad (2)$$

其中 σ 为表面张力系数。式(2)也可以写为

$$T d\theta = \lambda g (\cos \theta - \alpha) ds, \quad \alpha = 2\sigma/\lambda g \quad (3)$$

式(1)除以式(3),并化简得