自然科学

经典文选导读

谢和平　主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书从古今中外浩瀚的经典文献中精选出 17 篇自然科学文本，覆盖数学、物理、化学、生物、材料、计算机、电子信息、医学及建筑学等研究领域。这些文选将致力于让大学新生对自然科学经典有概略性了解，有利于大学生培养自然科学的思维方式，启迪心灵，激发兴趣和创造力，促进自由而全面的潜能发展，并为大学生进一步学习自然科学知识提供入门级向导。

本书共分 17 章，每章分为 4 节，第 1 节为引语，说明所选经典著作的全书内容和作者信息；第 2 节为选文，提供经典选文的部分原文及翻译，必要时提供一定的注释；第 3 节为评述，对经典选文的意义做提要性阐释；第 4 节为阅读思考与延伸阅读，为大学生深入学习提供阅读建议。

本书可供高校文、理、工、医等各专业本科一年级大学生阅读学习，也可作为自然科学通识课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

自然科学经典文选导读 / 谢和平 主编. —北京：清华大学出版社，2020.9
ISBN 978-7-302-56098-2

Ⅰ. ①自… Ⅱ. ①谢… Ⅲ. ①自然科学—文集 Ⅳ. ①N53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 137005 号

责任编辑：王 定
封面设计：周晓亮 纪劲鸿
版式设计：孔祥峰
责任校对：马遥遥
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编：**100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市吉祥印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：190mm×260mm **印 张：**20.75 **字 数：**528 千字
版 次：2020 年 9 月第 1 版 **印 次：**2020 年 9 月第 1 次印刷
定 价：68.00 元

产品编号：086970-01

本书编委会

主　编：谢和平

编　委：(按姓氏笔划数顺序排列)

王　楠	王志强	王跃飞	付洪忱
冯大权	朱卫国	朱宏宇	刘　琮
刘向宇	纪劲鸿	李　强	李工农
李存宝	李坚强	陈　文	陈　昕
陈义勇	陈之兵	陈心春	陈向东
陈彦涛	袁　磊	莫蓓莘	徐　坚
徐　希	曾燮榕	熊信柏	

序言

科学的发展必将经历初级综合、分化、再综合的过程。正如著名物理学家、量子力学的重要创始人之一马克斯·普朗克深刻指出:“科学是内在的整体。它被分解为单独的整体不是取决于事物的本身，而是取决于人类认识能力的局限性。”大学学科结构与学科发展应当与科学发展相适应，大学的人才培养也应与科学发展相适应。事实上，要培养能探索科学前沿、创造未来技术、真正具有国际竞争力的创新创业人才以及真正对社会做出贡献的杰出人才，不但要有创新的思维能力，更要有多学科的知识面和广阔的学科视野。

诺贝尔物理学奖得主丁肇中先生曾与我多次会面交流，希望我推荐优秀的学生去麻省理工学院(MIT)，并特意强调“最优秀的学生不是分数高的学生，而是会提问题和有多学科知识面的学生”;“有动手能力并不能创新，创新思想和多学科素养奠定了创新的两大支撑”。诺贝尔生理学或医学奖得主、哈佛大学医学院的绍斯塔克教授也和我谈到他在哈佛的创新人才培养体会:“要重视跨学科、跨学院的人才培养模式，哈佛医学院鼓励其学生到天文学院及其他跨学科学院学习、生活三个月或半年，对学生的思维启迪和创新能力培养至关重要。”根据《科学时报》统计，100 多年来的诺贝尔奖中，有 41.02%的奖项属于多学科交叉领域; 在近 30 年诺贝尔奖获奖学者中，从事多学科交叉研究的获奖比例接近 70%。这些事例给我们的一个重要启示就是，具有多学科交叉的知识面是我们培养具有国际竞争力的一流人才的重要条件。众多一流大学也特别重视通识教育。哈佛大学提出，本科生在上主修课之前，必须上通识课程，认识文科及理科的各种学术流派。《耶鲁大学报告》中明确指出：我们的教育应是“全面的教育”，培养的人应该“具备全面知识并拥有高尚品德”。所以，我们培养一流的人才，关键要把多学科知识素养教育体现到人才培养过程中，让我们的学生不但具有深厚的人文底蕴与扎实的专业知识，更要培养其多学科的知识面和广阔的学科视野，使学生具有更强的竞争力和后发优势。我国高等教育最大的短板是，学生人文艺术与综合性科学素养系统性的教育缺失，从而导致想象力、创造力、战略思维能力不强。而且，现有的高校学科组织制度相对单一封闭，难以培养新入学学生的科学思维和科学方法，不利于拓宽学生视野和培养强国人才。鉴于此，我们为大一新生撰写中英文对照版的《自然科学经典文选导读》(后略作《导读》)，旨在收录自然科学领域的经典选文，展示相关学科起源、发展历程或未来研究前景，为他们开启通识教育，培养综合科学知识及科学精神和科学思维，拓宽科学视野，增强创造能力。正如哈佛荣誉校长陆登庭所说，最好的教育应使学生具有更强的创造精神，并成为人格和心理更加健全的人。

在编写《导读》的过程中，有些问题不可回避。譬如，何为自然科学经典？如何选取经典？本书编委们经讨论决定，尽可能选取权威、通俗，适合本科大一新生阅读的入门级选文。一般意义上来说，人们认为自然科学起源于西方，古希腊哲学是自然科学的种子，文艺复兴的到来为自然科学提供了成长沃土，伽利略创立了实验研究方法，牛顿引入了复杂的数学工具系统，正式推开了近代自然科学的大门；工业革命的兴起让自然科学的发展进入了快车道，为整个人类社会带来了翻天覆地的变化。也正是伴随着自然科学的兴起，现代大学才得以诞生，科技创新成了大学的重要职能。考虑到自然科学发展的历史，本书的大部分选文选自西方科学经典。当然，中国悠久文明和古代哲学同样蕴含着深刻的自然科学思想内涵和科学精神，并对整个世界的科学发展产生了重要的影响。同时，中国也有着悠久的科学技术史，著名英籍科学史学家李约瑟花费近 50 年心血撰著了多卷本《中国科学技术史》，全面、系统地论述了中国古代科学技术的辉煌成就及其对世界文明的伟大贡献。而在本书的最后一章，我们专门选取了梁思成的《图像中国建筑史》，意在通过中国古建筑来展现中国智慧中关于天、地、人、物、我之间的“和谐”思想，为人类自然环境和社会人文环境的生态平衡提供宝贵的思想资源。

其二，自然科学应当把研究中心放在什么位置？基础研究和应用研究是否有所侧重、如何侧重？我们对此可能有着不同的理解和实践，比如，英国强调以基础研究为主，而日本则更重视以应用需求为导向的研究。其实，基础研究的“顶天”和应用研究的“立地”并不矛盾，日本倾向于应用研究是国家发展的需要，实质上是把实际需求问题和基础科学问题结合到一起，这也有力地推动了日本自然科学的快速发展，21 世纪以来，日本获得了 19 个诺贝尔奖。基础研究与应用研究就像是一驾马车的两匹马，无论哪一匹出现了短板都会影响整体的前进速度。所以，科学问题需要和社会问题有效对接、基础与应用并重、产学研用紧密结合才是当前自然科学发展的大趋势。深圳市政府在《深圳经济特区科技创新促进条例》(2018 年 10 月 1 号实施)实施情况说明中强调，将着力保持 30%的财政科技经费投向基础研究和应用研究，以增强城市自主创新能力；同时也加大投入，扶持创新型企业。可见，中国内地的科学政策和科学文化已然把持续推进基础研究和应用研究放在了同样重要的位置。故本书也精选了一些应用研究和当前社会关注的前沿科学经典。

《导读》将在第一部分(包括第 1~4 章)隆重推介数、理、化基础科学经典选文导读。

数学经典之中，由菲尔兹奖得主、英国著名数学家威廉·蒂莫西·高尔斯(William Timothy Gowers)撰写的《数学：一个极短介绍》(*Mathematics: A Very Short Introduction*)是一本数学科普著作。高尔斯凭借着深厚的数学功底、对数学内涵及其精神实质的深刻理解和把握，用最通俗的语言向读者介绍了现代数学的主流思想，对极限、高维空间、希尔伯特空间、微分流形等相对高深的数学概念做了通俗的解释，对数学建模和数学证明的含义和实质做出了生动的描述。通过这些通俗易懂的介绍，读者将领略主流数学的魅力和数学的精湛之处。

物理学经典之中，艾萨克·牛顿(Isaac Newton)的《自然哲学的数学原理》(*Mathematical Principles of Natural Philosophy*)揭示了宇宙中最普遍的规律，被认为是人

类科学发展史上最伟大的著作之一。爱因斯坦说：“至今还没有可能用一个同样无所不包的统一的概念，来替代牛顿关于宇宙的统一概念；而要是没有牛顿明晰的体系，我们到现在为止所取得的收获就会成为不可能。”而继爱因斯坦之后，物理学界公认的最睿智的理论物理学家是理查德·菲利普斯·费曼(Richard Phillips Feynman)。费曼提出了费曼图和重正化方法研究量子电动力学和粒子物理，并因此在1965年获得诺贝尔物理奖。其根据加州理工学院讲课录音编辑出版的《费曼物理学讲义》(*The Feynman Lectures on Physics*)，幽默生动、不拘一格，深受大一、大二本科生欢迎。我们选取该讲义的第3卷《量子力学》(*Quantum Mechanics*)，作为量子物理学经典导读奉献给读者。

在化学领域，约翰·道尔顿(John Dalton)的代表作《化学哲学新体系》(*A New System of Chemical Philosophy*)是继拉瓦锡的《化学纲要》之后又一里程碑式的化学著作。该书的出版标志着科学原子理论体系的建立。道尔顿把原子论与元素学说统一成为有机的整体，从而使化学成为一门真正的独立科学。著名化学家鲍林认为：“在所有的化学理论中，最为主要的是原子学说。”恩格斯也曾给予高度评价，认为“原子论是能给整个科学创造一个中心并给研究工作打下牢固基础的发现。”《化学哲学新体系》一书为人们研究道尔顿所开辟的化学新时代提供了极其珍贵的史料，同时，该书还全面反映了道尔顿的实验与理论思维相结合的研究方法，非常值得我们学习。

《导读》第二部分(包括第5~7章)的现代生命科学选文出自遗传学、合成生物学和脑科学三大领域。

遗传学经典《DNA：生命的秘密》(*DNA: The Secret of Life*)一书，以DNA双螺旋结构的发现、DNA密码的解读、DNA技术的应用为线索，根据时间顺序将遗传学的发展简史向人们娓娓道来，将生命的秘密向人们徐徐揭开。该书由DNA结构的发现者之一詹姆斯·杜威·沃森(James Dewey Watson)亲自执笔。20世纪90年代，沃森成为第一个主持人类基因组计划的首席科学家。在《DNA：生命的秘密》一书中，沃森集50年的研究思考，用亲历者的角度，以无比宏观的视野、深入浅出的方式和生动有趣的文笔所叙述的关于遗传学起源、发展和未来的故事，无不和我们的生活息息相关。

合成生物学选文出自《生命的未来：从双螺旋到合成生命》(*Life at the Speed of Light：From the Double Helix to the Dawn of Digital Life*)第六章。作者J. 克雷格·文特尔(J. Craig Venter)生动地记录了他们在人工合成第一个基因组、创造第一个人造细胞这一里程碑事件过程中，所面临的挑战、所取得的突破性成功，以及所伴随的沮丧和喜悦。如果解析基因组DNA序列的生命信息是回答“生命是什么”的唯物论理论，那么根据DNA序列合成生命就是上述唯物论理论的实践验证。该书贯穿着对“生命是什么”问题的极限思考。观察、假设、检验等形成科学闭环，环环相扣，将读者带入生命科学的殿堂，在一点一滴发人深省的科学进展中，展望当生命以光速“旅行”之时，合成生命技术对未来世界的影响。

脑科学经典《从神经元到脑》(*From Neuron to Brain*)是一本介绍神经生物学基础知识的著作。该书第1版于1976年问世，为脑科学开山之作。作者S. W. 库福乐(Stephen W. Kuffler)是现代神经生物学的创始人之一，合作者J. G. 尼克尔斯(John G. Nicholls)也是该

领域著名学者。2011 年该书进行第 5 版修订时，神经科学领域已发生了爆炸性的知识增长，分子生物学、遗传学和免疫学的超速发展及其在神经细胞与脑科学中的应用，为其增添了新内容、新进展，为读者展示了神经科学的神奇魅力。

《导读》第三部分(包括第 8~11 章)是在现代应用科学领域选取了比较热门的材料科学、计算机科学、人工智能、电子通信技术等作为切入点。

材料科学选文出自材料科学经典文献之一的《走进材料科学》(*The Coming of Materials Science*)，该书由著名的材料科学家罗伯特 • W. 康(Robert W. Cahn)教授撰写。罗伯特 • W. 康教授生前就职于剑桥大学，是英国皇家学会会员、中国科学院外籍院士，是国际快淬和亚稳材料三大杰出会士之一。英国皇家学会会员阿岚 • 科特雷尔(Alan Cottrell)爵士曾评价《走进材料科学》为“绝对令人不忍释读”的“旷世杰作”。师昌绪先生为该书中文版作序：“无论新老材料研究者都能从阅读中受益，从而得到急需的启发和创新的能力。”

计算机科学经典选取“计算机科学之父”艾伦 • 麦席森 • 图灵(Alan Mathison Turing)于 1936 发表的论文《论可计算数及其在判定问题上的应用》(*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*)，该论文被誉为计算机理论的开山之作。图灵提出了一种十分简单但运算能力很强的理想计算装置，描述了一种假想的、可以实现的通用计算机器，并成为 10 年后制造出来的真正计算机的逻辑原型。人们公认，图灵的这篇论文开启了计算机时代，其影响一直延续到目前的互联网、人工智能和普适计算。1966 年，美国计算机协会宣布设立图灵奖，每年授予在计算机领域做出突出贡献的人，该奖被视为“计算机界的诺贝尔奖”。

人工智能目前已经进入了第三个发展浪潮，美国斯图尔特 • 罗素(Stuart J.Russell)和彼得 • 诺维格(Peter Norvig)两位学者共同编著的《人工智能：一种现代的方法》(*Artificial Intelligence: A Modern Approach*)系统地介绍了人工智能的理论和实践，阐述了人工智能领域的核心内容，并深入介绍了各个主要研究方向，既有宽度又有深度，是权威与经典的人工智能教材，目前已被全世界 100 多个国家的包括麻省理工学院、斯坦福大学等 1200 多所大学用作教材。

电子通信技术选文取自美国国家工程院院士大卫 • 谢 (David Tse)教授与普拉默德 • 维斯瓦纳斯(Pramod Viswanath)教授合著的《无线通信基础》(*Fundamentals of Wireless Communication*)。大卫 • 谢教授于 2017 年获得香农奖(Claude E. Shannon Award，被称为信息领域的诺贝尔奖)，是历史上获得此奖项的唯一华人。该书在加州大学伯克利分校、麻省理工学院、普林斯顿大学、康奈尔大学、瑞士联邦理工学院、瑞典皇家理工学院等 60 多所知名学府和研究机构使用。

《导读》第四部分(包括第 12~15 章)纳入了现代医学领域的生物医学工程、精准医学、癌生物学、传染病学等高精尖科技的经典著作。

生物医学工程学选文出自《生物医学工程学概论》(*Introduction to Biomedical Engineering*)第三版。该书是目前涵盖生物医学工程学科最全面的一本教材，以深入浅出的方式向读者展示用工程技术探索人体生命奥秘的各种精彩纷呈的应用。该书以专题的

形式介绍了本学科的主要领域方向，每个专题都由该领域的国际知名学者或者权威专家执笔，像美国工程院院士、生物医学光学专家汪力宏教授，IEEE Fellow、生物医学超声专家熊克平(K. Kirk Shung)教授等。

精准医学选文出自中国工程院詹启敏院士撰写的“精准医学出版工程系列丛书”中的《精准医学总论》。精准是医学发展的客观追求和最终目标，也是公众对健康的必然需求；精准医学是生物技术、信息技术和多种前沿技术在医学临床实践的交汇融合应用，是医学科技发展的前沿方向。该书介绍了精准医学的概念、关注的科学问题、发展需求、我国精准医学的机遇与挑战、发展目标、重点任务、实施保障，以及精准医疗在实施过程中的原则等，让读者感受到精准医学的无穷魅力。

癌生物学选文出自《癌生物学(第二版)》(*The Biology of Cancer*，*Second Edition*)，是当今肿瘤生物学领域最具权威性的专著。本书汇集了癌生物学方面的大量相关文献报道，梳理出被认可的研究理论，形成关于癌症发生发展的清晰脉络，建立有关癌症研究的系统理论。该书集作者罗伯特 • 温伯格(Robert A. Weinberg)教授毕生所学之大成，不仅在知识上汇集了当今较为系统全面的肿瘤生物学相关内容，更体现了著者奋战在科研一线四十余年的诸多体会和感悟。

传染病学选文摘自鼠疫传染病防治专业经典著作《鼠疫概论》(*Plague Manual*)，由我国 20 世纪杰出的卫生防疫事业先驱者伍连德博士领衔系统编著。伍连德博士临危受命统领我国 1910—1911 年及 1920—1921 年东三省鼠疫大流行的防控工作。他怀着一颗赤子之心，利用其掌握的现代医学及传染病学深厚渊博的知识，在当时国家积贫积弱的年代，因地制宜，科学防控，有效地阻止了鼠疫的国内传播，创造了国内外鼠疫防控史上的奇迹。该书是我国当时鼠疫防治方面的权威著作，读者从中更能体会一个科学家在国弱民穷、苦难深重条件下的济世情怀，特别对近年来 SARS、新型冠状病毒肺炎等疫情防控更有启示意义。

《导读》第五部分(包括第 16~17 章)的建筑学经典聚焦于城市规划领域和古建筑史研究。

城市规划领域经典选取了扬 • 盖尔(Jan Gehl)教授的《人性化的城市》(*Cities for People*)。《人性化的城市》是盖尔对城市问题核心研究成果的总结。在盖尔看来，城市是有思想、有生命力的，是可以自我强化的，“我们首先塑造城市，而后城市塑造我们”。他的研究成果为人性化的城市开辟了一条全新的道路，成功的改造案例遍布世界各地的许多城市，这些实践又促使人们更加关注人性化的城市，他的“人性化”思想对整个时代和社会都产生了深远的影响。每一个读者都能从书中获得有价值的洞见和启迪。

最后，中国古建筑史研究经典选取了梁思成先生撰写的《图像中国建筑史》(*A Pictorial History of Chinese Architecture*)。该书是梁思成先生在 20 世纪 40 年代正值抗日战争后期用英文撰写的中国第一部较为系统的、论述我国古代建筑发展历史的专著，书中通过比较的方法，阐释了中国建筑结构体系 30 个世纪的发展及其性质演变，是一本理解中国古代建筑有机结构的入门读物。1946 年梁思成先生应邀到美国讲学，他带着《中国建筑史》和他在东北大学讲授“中国雕塑史”的讲稿，第一次将中华民族的文化瑰宝

展示在国际学术界面前，博得了国际学术界的敬佩与赞扬，对培养读者的科学精神具有重要的启示。

教育不仅仅是注满一桶水，更应该是点燃一把火；不只是使学生学习知识和提升能力，而是学会一种思维方式和拓展多学科知识视野；要启迪学生的心灵，把学生的兴趣和创造力激发出来，使学生具有自由全面发展和迎接未来任何挑战的潜质和能力。基于此宗旨，《导读》所选各科经典，是参编者推选出来比较适合本科大一新生选读的科学文献，它凝聚了编者们的心血和对后辈学子的殷殷期盼。仓促之间，疏漏或不足之处，希望读者品鉴时多批评指正。

中国工程院院士
深圳大学特聘教授 谢和平

目 录

第 1 章 数 学

1.1 引语

数学王子高斯说：数学是科学之王。

数学科学是研究数量关系和空间形式的一个庞大科学体系，是一门集严密性、逻辑性、精确性、创造力与想象力于一体的学问。数学又是一切科学的语言，它贯穿于所有的科学理论之中，是打开科学大门的钥匙，是自然科学、技术科学、社会科学、管理科学等的智力资源。数学科学对于人类认识自然现象和描述自然规律发挥着独特的、不可替代的巨大作用。数学是思维的工具，它的魅力在于锻炼我们的思考能力和逻辑推理能力。逻辑思维不仅是学好数学和其他科学必备的能力，也是处理日常生活问题必需的能力。数学还是创造性的艺术和文化，学习数学可以获得美的熏陶。高新技术本质上也是数学技术，人工智能的本质或者基础也是数学。如果没有数学的发展和支撑，就不可能有计算机及 4G、5G、6G 通信技术等，更不可能有比特币、区块链等。

数学经过两千多年的发展，已成为分支众多、内容非常庞大的学科，即使是职业数学家也难以对其全貌做充分的了解，更不用说普通人了。幸运的是，总会有一些数学大师，站在旁人难以企及的高度，凭着他们对数学及其精神实质的深刻理解，用普通人也能理解的语言向大家介绍他们对数学这门学科的理解与认识，留下许多经典之作。阅读这些经典，可以对数学及其意义有一个很好的了解和认识，可以粗略地领会到数学的魅力。著名数学家高尔斯的《数学：一个极短介绍》就是这样的经典著作之一。

1.1.1 全书简介

高尔斯的《数学：一个极短介绍》(*Mathematics:A Very Short Introduction*)原书于 2002 年由牛津大学出版社(Oxford University Press)出版。在书中，作者凭着深厚的数学功底、对数学内涵及其精神实质的深刻理解和把握，用最通俗的语言向读者介绍了现代数学的主流思想，对极限、高维空间、希尔伯特空间、微分流形等相对高深的数学概念做了通俗的解释，对数学证明的含义和实质做出了生动的描述。通过这些通俗易懂的介绍，本书向读者传达了主流数学的魅力，让普通读者也可以体会到数学的精湛之处。

数学是绝大多数人学得最多的一门学科，也是很多人学习起来会感到很困难的一门学科。数学之所以学起来让人感到很困难，很大程度上是因为它的抽象性。数学确实有些抽象，但是其抽象不是数学家凭空想象出来的。每一个抽象的数学概念都有着它的具体背景或规律，看似很抽象、深奥的数学

理论，其实也是数学家在研究一些具体的实际问题过程中逐步提炼、抽象出来的。在书中，作者详细讲解了数学抽象的思想、意义、方法和过程，使普通读者也可以领略到数学抽象的实质。

全书共八章，主要包括数学模型、数与抽象、数学证明、极限与无穷、维度、几何、估计与近似、若干问题等内容。作者首先从数学建模、数与抽象和数学证明入手，形象地说明了数学从具体到抽象的思维方法，阐述了数学抽象的本质；接着又选取了几个有代表性的现代数学分支，用通俗易懂的语言对其核心思想做了形象的描述，通过这些深入浅出的描述，使没有多少数学基础的读者也可以领略到现代数学的奥妙；最后，还对普通人士(非职业数学家)常遇到的一些问题提出了自己的看法。

1.1.2 作者简介

威廉•蒂莫西•高尔斯(William Timothy Gowers)出生于学术世家，他的父亲是作曲家，祖父是英国著名政府官员和作家、爵士，先祖是研究帕金森氏症的先驱神经学家。他本人早年受教于英格兰剑桥郡的国王学院，并在伊顿公学求学。学习期间表现优异，曾获得“国王学者”称号。于 1990 年在剑桥大学三一学院获得博士学位，师从著名数学家贝拉•波罗巴斯(Bela Bollbas)。高尔斯 1991—1995 年在伦敦大学学院数学系从事研究工作；1996 年获得欧洲数学会奖；1998 年获得数学界最高奖之一的菲尔兹奖；1999 年当选为英国皇家学会院士；2011 年获得美国数学协会的欧拉数学著作奖。高尔斯的主要贡献在泛函分析和组合数学领域。他巧妙地运用组合数学的方法，在巴拿赫空间中塑造了一系列完全不具备对称性的结构。高尔斯在潜心研究理论数学的同时，还致力于数学的普及工作，他亲自执笔完成并由牛津大学出版社 2002 年出版的《数学：一个极短介绍》就是这方面的代表作。他还主编了总计有一千余页的关于数学多方面介绍的巨著《普林斯顿数学指南》(*The Princeton Companion to Mathematics*，普林斯顿大学出版社 2008 年出版)。

1.2 选文[①]

1.2.1 Can four-dimensional space be visualized

In fact, the seemingly obvious statement that it is possible to visualize three-dimensional objects but not four-dimensional ones does not really stand up to close scrutiny. Although visualizing an object feels rather like looking at it, there are important differences between the two experiences. For example, if I am asked to visualize a room with which I am familiar, but not very familiar, I have no difficulty in doing so. If I am then asked simple questions about it, such as how many

1.2.1 四维空间能否图像化

三维物体能够图像化而四维物体不能——这个命题看似成立，实际上却经不起严格的审视。尽管将物体图像化和直接观察它的感觉十分相像，这两种体验却有很重要的区别。例如，如果别人要求我将一个房间画出来，这个房间我比较熟悉但不是十分熟悉，这对我来说没什么困难。如果要问我一些关于它的简单问题，诸如房间里有多少椅子或者地板是什么颜色，

① 编者注：选文的中文翻译参阅高尔斯著、刘熙译的《数学》(译林出版社，2014)。

chairs it contains or what color the floor is, I am often unable to answer them. This shows that, whatever a mental image is, it is not a photographic representation.

我通常答不上来。这说明大脑中的图像不论是什么样的，还是不同于照片式的呈现。

In a mathematical context, the important difference between being able to visualize something and not being able to is that in the former case one can somehow answer questions directly rather than having to stop and calculate. This directness is of course a matter of degree, but it is no less real for that. For example, if I am asked to give the number of edges of a three-dimensional cube, I can do it by 'just seeing' that there are four edges round the top, four round the bottom, and four going from the top to the bottom, making twelve in all.

在数学语境中，能与不能将某物图像化的重要区别在于，前一种情形下，我们能直接回答问题而无须停下来进行计算。这个“直接”当然只表示一种程度，但实际上毫不夸张。比如，如果要问我三维立方体有多少条边，我可以通过“仅仅观察”，看到顶面有 4 条边，底面有 4 条边，还有 4 条边从顶面伸到底面，所以一共是 12 条边。

In higher dimensions, 'just seeing' becomes more difficult, and one is often forced to argue more as I did when discussing the analogous question in five dimensions. However, it is sometimes possible. For example, I can think of a four-dimensional cube as consisting of two three-dimensional cubes facing each other, with corresponding vertices joined by edges (in the fourth dimension), just as a three-dimensional cube consists of two squares facing each other with corresponding vertices joined. Although I do not have a completely clear picture of tour-dimensional space, I can still 'see' that there are twelve edges for each of the two three-dimensional cubes, and eight edges linking their vertices together. This gives a total of 12 + 12 + 8 = 32. Then I can 'just see' that a five-dimensional cube is made up of two of these, again with corresponding vertices linked, making a total of 32 + 32 + 16 = 80 edges (32 for each four-dimensional cube and 16 for the edges between them), exactly the answer I obtained before. Thus, I have some rudimentary ability to visualize in four and five dimensions. (If you are bothered by the word 'visualize' then you can use another one, such as 'conceptualize'.) Of course, it is much harder than visualizing in three dimensions — for example, I cannot directly answer questions about what happens when you rotate a four-dimensional cube, whereas I can for a three-dimensional one — but it is also distinctly easier than fifty-three-dimensional visualization, which it could not be if

在高维空间中，“仅仅观察”变得困难了，我们常常被迫要像我在讨论五维空间中的推理问题时那样进行更多的论证。但观察有时也是可能的。比如，我可以思考一个四维立方体，它由两个彼此相对的三维立方体组成，对应顶点以边(在第四维中)相连，就像三维立方体由两个彼此相对的正方形组成，对应顶点也连接起来一样。尽管我对四维空间没有形成一个完全清晰的图像，但我仍然可以“看见”两个三维立方体各有 12 条边，8 条边连接着它们对应的顶点。这样，一共就有 12+12+8=32 条边。于是我可以“仅仅观察”到，五维立方体又是由这样的两个四维立方体组成的，依旧是对应顶点相连，总共有 32+32+16=80 条边(每个四维立方体有 32 条边，其间有 16 条边连接它们)，恰与我之前得到的答案相同。于是，我具有了某种初步地将四维和五维图像化的能力。(如果你对“图像化”这个词感到困扰，可以换一个词，比如“概念化”。)当然，这远比三维的图像化要困难——比如，我无法直接回答，四维立方体旋转是什么样子，而我可以说出来三维的——但是，这也明显比五十三维的图像化要容易，要是它们都不可能的话，也就谈不上谁比谁容易的问题了。有一些数学家专攻四维几何，他们四维空间图像化的能力得到了极

they were both impossible. Some mathematicians specialize in four-dimensional geometry, and their powers of four-dimensional visualization are highly developed.

大拓展。

This psychological point has an importance to mathematics that goes well beyond geometry. One of the pleasures of devoting one's life to mathematical research is that, as one gains in expertise, one finds that one can 'just see' answers to more and more questions that might once have required an hour or two of hard thought, and the questions do not have to be geometrical. An elementary example of this is the statement that 471×638 = 638×471. One could verify this by doing two different long multiplications and checking that they give the same answer. However, if one thinks instead of a grid of points arranged in a 471-by-638 rectangle, one can see that the first sum adds up the number of points in each row and the second the number of points in each column, and these must of course give the same answer. Notice that a mental picture here is quite different from a photograph: did you really visualize a 471-by-638 rectangle rather than a 463-by-641 rectangle? Could you count the number of points along the shorter side, just to check?

对数学来说，这个心理学要素的影响已远远超出几何学的范围。投身于数学研究所能得到的乐趣之一就是，随着专业领域的经验越来越丰富，你能够发现自己“仅仅观察”就能得到越来越多问题的答案，不一定非得是几何问题，而这些问题你以前可能要艰难思考上一两个小时[①]。举个很基本的例子，来看 471×638=638×471 这条陈述。为了验证，我们可以通过两个很长的竖式乘法来计算，发现它们得到相同的结果。但是，如果考虑一个 471 乘 638 的矩形点阵，你就可以看出，第一个式子是各行点之和，第二个式子是各列点之和，所以它们必然得到相同的结果。注意，在这个问题上，我们头脑中的图像与相片化的图像是很不一样的：你真的看到了一个 471 乘 638 的矩形，而不是 463 乘 641 的矩形吗？你难道能数出短边所有的点来验证吗？

1.2.2 Hyperbolic geometry

There are several equivalent ways of describing hyperbolic geometry; the one I have chosen is known as the disc model, which was discovered by the great French mathematician Henri Poincare. While I cannot define it precisely in a book like this, I can at least explain some of its main features and discuss what it tells us about the parallel postulate.

Understanding the disc model is more complicated than understanding spherical geometry because one has to reinterpret not only the terms 'line' and 'line segment', but also the idea of distance. On the surface of the sphere, distance has an easily grasped definition: the distance between two points x and y is the shortest possible length of a path from x to y that

1.2.2 双曲几何

描述双曲几何有若干种等价的方式。我所选择的这一种称为圆盘模型，是由伟大的法国数学家亨利•庞加莱所发现的。尽管在这样一本书中我无法确切地给出定义，但我至少能够解释它的一些主要特征，并且讨论一下关于平行公设能告诉我们什么。

理解圆盘模型比理解球面几何要复杂，因为我们不光要重新解释“直线”和“直线段”等词语，还要重新解释距离这个概念。在球面上，距离有一个很好理解的定义：x 和 y 两点间的距离，就是在球面上从 x 到 y 最短路径的长度。尽管双曲几何中类似的定义也是正确的，

① 编者注：这里所谓的“仅仅观察”实际上指的是“想象”，不是指实际去观察某对象，比如，三维空间中的立方体。

lies within the surface of the sphere. Although a similar definition holds for hyperbolic geometry, it is not obvious, for reasons that will become clear, what the shortest path is, or indeed what the length of any path is.

但并不显然，理由涉及什么才是最短路径——或者说任意路径的长度是什么，我们在下面能看得很清楚。

Figure 33 shows a tessellation of the hyperbolic disc by regular pentagons. Of course, this statement has to be explained, since it is untrue if we understand distance in the usual way: the edges of these ‘pentagons’ are visibly not straight and do not have the same length. However, distances in the hyperbolic disc are not defined in the usual way, and become larger, relative to normal distance, as you approach the boundary. Indeed, they become so much larger that the boundary is, despite appearances, infinitely far from the center. Thus, the reason that the pentagon marked with an asterisk appears to have one side longer than all the others is that that side is closer to the center. The other sides may look shorter, but hyperbolic distance is defined in such a way that this apparent shortness is exactly compensated for by their being closer to the edge.

图 33 所显示的，是用正五边形镶嵌的双曲平面。当然我们还需要解释这句话，因为要以通常的方式来理解，图肯定是错误的：显而易见，这些“五边形”的边不是直的，长度也不相同。然而，双曲圆盘中的距离并不是用通常的方式定义的，和常规距离相比，越靠近边缘的距离越大。实际上，虽然看似不像，但边缘处的距离特别大，以至于从圆周上到中心处的距离是无穷大。所以，标星号的五边形之所以有一条边看起来比其他四条边都长，原因就是这条边最靠近中心。其他的边可能看起来短，但由双曲距离的定义可知，这种表面上的短正好由距离边缘的近进行了补偿。

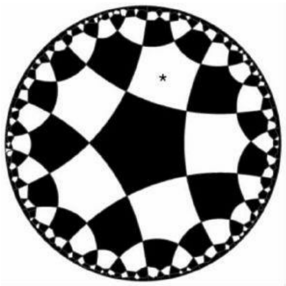

Fig.33. A tessellation of the hyperbolic plane by regular pentagons / 图33　用正五边形镶嵌双曲平面

If this seems confusing and paradoxical, then think of a typical map of the world. As everyone knows, because the world is round and the map is flat, distances are necessarily distorted. There are various ways of carrying out the distortion, and in the most common one, Mercator’s projection, countries near the poles appear to be much larger than they really are. Greenland, for example, seems to be comparable in size to the whole of South America. The nearer you are to the top or bottom of such a map, the smaller the distances are, compared with what they appear to be.

如果这看起来很难解、很矛盾，那不妨考虑一幅典型的世界地图。大家都知道，因为地球是圆的而地图是平的，所以距离必然被扭曲了。表示这种扭曲的方式有很多种，最常用的一种是墨卡托投影，靠近极地的国家会显得比它们实际的面积要大得多。比如格陵兰就看似和整个南美洲大小相当。在这样的地图上，越靠近上端或下端，实际距离就比表面上的距离越小。

A well-known effect of this distortion is that the shortest route between two points on the earth's surface appears, on the map, to be curved. This phenomenon can be understood in two ways. The first is to forget the map and visualize a globe instead, and notice that if you have two points in the northern hemisphere, the first a long way east of the other (a good example is Paris and Vancouver), then the shortest route from the first to the second will pass close to the North Pole rather than going due west. The second is to argue from the original map and reason that if distances near the top of the map are shorter than they appear, then one can shorten the journey by going somewhat north as well as west. It is difficult to see in this way precisely what the shortest path will be, but at least the principle is clear that a 'straight line' (from the point of view of spherical distances) will be curved (from the point of view of the distances on the actual map).

这种扭曲会产生一个众所周知的效应，地球表面上两点间最短路线在地图上就显示成了弯的。这种现象可以通过两种途径来理解。第一种是忘掉地图，想象一个地球仪，观察如果在北半球选两点，第一点在第二点东边很远的地方(巴黎和温哥华是个不错的例子)，那么从第一点出发到第二点的最短路径会从靠近北极的地方穿过而不是伸向正西。第二种方法是直接从地图出发，根据越靠近顶部实际距离越短来推理，那么要想缩短旅程，应该同时既向西又向北走。用这种办法很难精确看出最短路径是什么，但至少“直线”(从球面距离的角度看)是弯的(从地图距离的角度看)这条原则是很清楚的。

As I have said, when you approach the edge of the hyperbolic disc, distances become larger compared with how they look. As a result of this, the shortest path between two points has a tendency to deviate towards the center of the disc. This means that it is not a straight line in the usual sense (unless that line happens to pass exactly through the center). It turns out that a hyperbolic straight line, that is, a shortest path from the point of view of hyperbolic geometry, is the arc of a circle that meets the boundary of the main circle at right angles (see Figure 34). If you now look again at the pentagonal tessellation of Figure 33, you will see that the edges of the pentagons, though they do not appear straight, are in fact hyperbolic line segments since they can be extended to hyperbolic straight lines, according to the definition I have just given. Similarly, although the pentagons do not seem to be all of the same size and shape, they are, since the ones near the edge are far bigger than they seem — the opposite of what happens with Greenland. Thus, just like Mercator's projection, the disc model is a distorting 'map' of actual hyperbolic geometry.

我前面说过，越靠近双曲圆盘的边缘，与外表距离相比，实际距离越大。这样的结果是，两点间的最短路径倾向于朝圆盘中心偏折。这也就意味着它不会是通常意义上的直线(除非这条线恰好通过中心)。结果是，双曲直线，即双曲几何观点下的最短路径，正是与大圆边界成直角的圆弧(如图 34 所示)。现在再去观察图 33 的五边形镶嵌图，你会发现五边形的边尽管看起来不是直的，但其实都是双曲直线段，因为根据我刚才给出的定义，它们都可以延伸为双曲直线。类似地，尽管这些五边形的大小和形状看起来不都一样，但实际上的确是一样的，因为靠近边缘处的五边形要比它们看起来的大得多——与格陵兰的例子正相反。如同墨卡托投影一样，圆盘模型也是实际双曲几何的扭曲的“地图”。

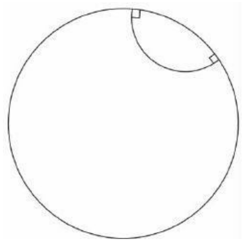

Fig.34. A typical hyperbolic line / 图34 双曲直线

It is natural to ask at this point what actual hyperbolic geometry is like. That is, what is the distorting map a map of? What stands in relation to the disc model as the sphere does to Mercator's projection? The answer to this is rather subtle. In a way it is a fluke that spherical geometry can be realized as a surface that sits in three-dimensional space. If we had started with Mercator's projection, with its strange notion of distances, without knowing that what we had was a map of the sphere, then we would have been surprised and delighted to discover that there happened to be a beautifully symmetrical surface in space, a map of this map, so to speak, where distances were particularly simple, being nothing but the lengths of shortest paths in the usual, easily understood sense.

根据这个观点，有人很自然会问，实际的双曲几何是什么样子。也就是说，这个扭曲的地图是反映什么的地图呢？什么东西和圆盘模型的关系，与球面和墨卡托投影的关系是对等的呢？这个问题的确不太好回答。球面几何之所以能够在三维空间中的曲面上实现，这某种意义上是侥幸。如果我们本来是从墨卡托投影开始，从它对距离的奇怪概念开始，并不知道这其实是球面的地图，那么我们要是发现它恰好对应于一个完美对称的曲面，正是将曲面投射到平面的地图，而地图距离只不过是常规意义下容易理解的曲面最短路径长度，那我们一定会既惊讶又高兴。

Unfortunately, nothing like this exists for hyperbolic geometry. Yet, curiously, this does not make hyperbolic geometry any less real than spherical geometry. It makes it harder to understand, at least initially, but as I stressed in Chapter 2 the reality of a mathematical concept has more to do with what it does than with what it is. Since it is possible to say what the hyperbolic disc does (for example, if you asked me what it would mean to rotate the pentagonal tessellation through 30 degrees about one of the vertices of the central pentagon, then I could tell you), hyperbolic geometry is as real as any other mathematical concept. Spherical geometry may be easier to understand from the point of view of three-dimensional Euclidean geometry, but this is not a fundamental difference.

不幸的是，对于双曲几何来说，这种情况却不存在。但有意思的是，这并没有使双曲几何比起球面几何来缺乏真实性。这有点难以理解——至少刚开始有点，但正如我在第二章中强调的，数学概念的真实性更多地与它做什么而不是与它是什么相关。因为我们能够说清楚双曲圆盘做什么(例如，你要问我，将五边形镶嵌图沿中心五边形的一个顶点旋转 30 度是什么意思，那我是能够回答你的)，所以双曲几何就和其他所有数学概念一样真实。从三维欧氏几何的视角来看，球面几何可能更易于理解，但这并不构成根本的差异。

Another of the properties of hyperbolic geometry is that it satisfies the first four of Euclid's axioms. For example, any two points can be joined by exactly one hyperbolic straight line

双曲几何的另一个性质是它满足欧几里得前四条公理。例如，任意两点都可以且仅可以被一条双曲直线段(即与主圆垂直相交的圆弧)

segment (that is, arc of a circle that cuts the main circle at right angles). It may seem as though you cannot find a circle of large radius about any given point, but to think that is to have forgotten that distances become larger near the edge of the disc. In fact, if a hyperbolic circle almost brushes the edge, then its radius (its hyperbolic radius, that is) will be very large indeed. (Hyperbolic circles happen to look like ordinary circles, but their centers are not where one expects them to be. See Figure 35.)

相连。尽管看上去好像不能以任意圆心画半径比较长的圆，但这是因为你忘了，越靠近圆盘边缘距离越大。实际上，如果双曲圆几乎要擦上圆盘边缘了，那它的半径(双曲半径)将会非常大。(双曲圆恰好与普通圆外形一样，但它们的圆心却不在我们所料想的位置。参见图 35。)

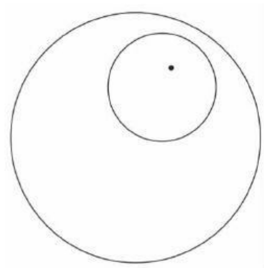

Fig.35. A typical hyperbolic circle, and its center / 图35 双曲圆及圆心

As for the parallel postulate, it is false for hyperbolic geometry, just as we hoped. This can be seen in Figure 36, where I have marked three of the (hyperbolic) lines L, M_1, and M_2. The lines M_1 and M_2 meet at a point marked x , but neither of them meets L. Thus, there are two lines through x (and in fact infinitely many) that do not meet L. This contradicts the parallel postulate, which stipulates that there should be only one. In other words, in hyperbolic geometry we have exactly the alternative interpretation of the Euclidean axioms that we were looking for in order to show that the parallel postulate was not a consequence of the other four axioms.

至于平行公设，如我们所期望的，它对于双曲几何不成立。这可以从图 36 中看出，在图中我将三条(双曲)直线标为 L、M_1 和 M_2，直线 M_1 和 M_2 在 x 点相交，但它们都不与 L 相交。因此，经过 x 有两条(实际上有无穷多)直线不与 L 相交。这违背了平行公设，平行公设说的是只能有一条直线。换言之，我们在双曲几何中恰好如愿找到了对欧几里得公理新的解释，从而说明了平行公设不是另外四条公理的推论。

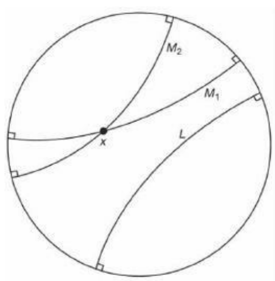

Fig.36. The parallel postulate is false in the hyperbolic plane / 图36 平行公设在双曲平面中不成立

Of course, I have not actually proved in this book that hyperbolic geometry has all the properties I have claimed for

当然，在本书中我其实没有证明双曲几何具有我所声称的全部性质。要这样做的话，需

it. To do so takes a few lectures in a typical university mathematics course, but I can at least say more precisely how to define hyperbolic distance. To do this, I must specify by how much distances near the edge of the disc are larger than they appear. The answer is that hyperbolic distances at a point P are larger than ‘normal’ distances by $1/d^2$, where d is the distance from P to the boundary of the circle. To put that another way, if you were to move about in the hyperbolic disc, then your speed as you passed P would, according to hyperbolic notions of distance, be $1/d^2$ times your apparent speed, which means that if you maintained a constant hyperbolic speed, you would appear to move more and more slowly as you approached the boundary of the disc.

要在一般的大学数学课程中花好几次课的时间，不过至少我还能就如何定义双曲距离说得更确切一些。要说清它，我就必须明确说明，在靠近圆盘边缘处，实际距离比看起来大了多少。答案是，点 P 处的双曲距离是“常规”距离的 $1/d^2$ 倍，其中 d 是 P 到主圆边界的(常规)距离。换一种说法，如果你在双曲圆盘中移动，那么根据双曲距离的概念，你经过 P 点的速度是你表面速度的 $1/d^2$ 倍。这就意味着，如果你保持恒定的双曲速度，在当你接近圆盘边界时，看起来速度就会越来越慢。

Just before we leave hyperbolic geometry, let us see why argument(4) that I gave earlier fails to prove the uniqueness of parallel lines. The idea was that, given a line L, a point x not on L, and a line M through x that did not meet L, one could join L to M by several line segments that were perpendicular to both L and M, dividing up the space between L and M into rectangles. It seems obvious that one can do this, but in the hyperbolic world it is not possible because the angles of a quadrilateral always add up to less than 360 degrees. In other words, in the hyperbolic disc the rectangles needed for the argument simply do not exist.

离开双曲几何之前，让我们来看看我前面给出的论证(4)为何不能证明平行线的唯一性。它的想法是这样的：给定直线 L 和直线外一点 x，过 x 画一条直线 M 与 L 不相交，我们可以用几条垂直于 L 和 M 的线段将两条线连起来，将 L 和 M 之间的空间划分为矩形。这件事看似显然能够做到，但在双曲世界中却是不可能的，因为在其中四边形的内角和总是小于 360 度。换句话说，在双曲圆盘中，论证所需的矩形是不存在的。①

1.2.3　How can space be curved

1.2.3　空间何以能够弯曲

What evidence might persuade us that space is curved? The question becomes easier if one takes an abstract approach. Start at the North Pole and travel due south for about 6,200 miles, having marked your initial direction. Then turn to your

什么样的证据有可能说服我们空间是弯曲的呢？如果我们采取抽象方法，这个问题就变得简单些了。从北极点出发一直向正南走大约 6200 英里，记下你初始的方向。然后向左转，

① 编者注：
(1) 双曲几何也称罗巴切夫斯基几何，是非欧几何的一种。非欧几何包括罗巴切夫斯基几何(双曲几何)和黎曼的椭圆几何。它们与欧氏几何最主要的区别在于公理体系中采用了不同的平行定理。
(2) 欧几里得的公理是指：(a)任意两点有且只有一条直线段相连。(b)任意直线段可以两端延伸形成一条直线，且只能形成一条直线。(c) p 及任意长度 x，存在以 x 为半径、p 为圆心的圆。(d)任意两个直角全等。(e) N 与两条直线 L 和 M 相交，若 N 的同旁内角之和小于两直角，则 L 和 M 相交于 N 的这一侧。
第五条公理与所谓的“平行公设”是等价的。平行公设断言，给定任意直线 L 和直线外一点 x，有且只有一条直线 M 经过 x 且永远不与 L 相交。

left and go the same distance again. Then turn to your left and go the same distance one more time. 6,200 miles is roughly the distance from the North Pole to the equator, so your journey will have taken you from the North Pole to the equator, a quarter of the way round the equator, and back to the North Pole again. Moreover, the direction at which you arrive back will be at right angles to your starting direction. It follows that on the earth's surface there is an equilateral triangle with all its angles equal to a right angle. On a flat surface, the angles of an equilateral triangle have to be 60 degrees, as they are all equal and add up to 180, so the surface of the earth is not flat.

Thus, one way of demonstrating that a two-dimensional surface is curved, from within that surface, is to find a triangle whose angles do not add up to 180 degrees, and this is something that can be attempted in three dimensions as well. If we measure the angles of triangles in space and find that they add up to more than 180 degrees, then that will suggest that space is more like a three-dimensional version of the surface of a sphere than like the sort of space that can be described by three Cartesian coordinates.

1.2.4 Manifolds

A closed surface means a two-dimensional shape that has no boundary. The surface of a sphere is a good example, as is a torus (the mathematical name for the shape of the surface of a quoit, or a ring-shaped doughnut). As the discussion of curvature made clear, it can be useful to think about such surfaces without reference to some three-dimensional space in which they live, and this becomes even more important if we want to generalize the notion of a closed surface to higher dimensions.

It is not just mathematicians who like to think about surfaces in a purely two-dimensional way. For example, the geometry of the United States is significantly affected by the curvature of the earth, but if one wishes to design a useful road map, it does not have to be printed on a single large curved piece of paper. Much more practical is to produce a book with

再走相同的距离。然后再向左转，再走一次相同的距离。6200 英里大致是北极点到赤道的距离，所以你的旅程会把你从北极点带到赤道，绕赤道走过四分之一，然后再次回到北极点。而且，你回到北极点时的方向应当与你出发的方向夹一直角。于是我们得到，在地球表面上，有一个各角均等于直角的等边三角形。在平面中，等边三角形的内角必须相等且和为 180 度，所以各角均为 60 度。因此，地球表面不是平坦的。

于是，从曲面内部说明二维曲面弯曲的一种方法，就是找出内角和不为 180 度的三角形，而且这种方法也可以在三维中尝试。如果我们测量空间三角形的角度，发现它们的和大于 180 度，这就说明空间更接近于三维版本的球体表面，而不太接近于能用三个笛卡尔坐标描述的那类空间。

1.2.4 流形

闭曲面是指没有边界的二维形状。球面就是一个不错的例子，环面(即铁圈或面包圈的形状的数学称谓)也是。对曲率的讨论表明，曲面虽存在于三维空间之中，但若脱离开三维空间的参照来思考曲面，可能会很有益。如果我们要将闭曲面的概念扩展到高维空间，这样的想法就更加重要了。

不是只有数学家愿意从纯二维的角度来思考曲面。比如，美国的几何结构受到地球弯曲的显著影响，但如果想设计一幅实用的公路地图，则并不需要印在单张弯曲的大纸上。更实际的办法是印成数页的书，每一页上都是这个国家的一小部分。这些局部最好部分重叠，这

several pages, each dealing with a small part of the country. It is best if these parts overlap, so that if a town lies inconveniently near the edge of one page, there will be another page where it doesn't. Moreover, at the edges of each page will be an indication of which other pages represent overlapping regions and how the overlap works. Because of the curvature of the earth, none of the pages will be exactly accurate, but one can include lines of constant latitude and longitude to indicate the small distortion, and in that way the geometry of the United States can be encapsulated in a book of flat pages.

样一来，如果有城镇位于某一页的边缘，显得不太方便，那它在另一页将不再处于边缘位置。另外，在每一页的边上都要指明，哪一页包含了重叠的区域，重叠以怎样的形式出现。由于地球的弯曲，没有哪一页是绝对精确的，但我们可以在图中画出经线和纬线以指明微小的扭曲。用这种办法，我们就可以用书中平坦的几页纸把美国的几何结构完全包纳了。

One of the most important branches of mathematics is the study of objects known as manifolds, which result from generalizing these ideas to three or more dimensions. Roughly speaking, a d-dimensional manifold is any geometrical object in which every point is surrounded by a region that closely resembles a small piece of d-dimensional space. Since manifolds become much harder to visualize as the number of dimensions increases, the idea of an atlas becomes correspondingly more useful.

数学中一大重要分支研究的就是称为流形的对象。流形正是将上述思想扩展到三维或更高维所得的结果。粗略地讲，一个 d 维流形就是任何一个这样的几何对象，其中任意一点都会被一小块极为类似于 d 维空间的区域所包围。由于随着维数的增加，流形会变得越来越难以图像化，所以地图册的思想也就相应变得更加有用了。

1.2.5 All you need to know about logarithms, square roots etc

1.2.5 关于对数、平方根等你只需要知道这些

Part of the reason that the estimates and approximations that pervade mathematics are not well known outside the discipline is that in order to talk about them one uses phrases like 'about as fast as log$n$' or 'the square root of t, to within a constant', which mean little to most people. Fortunately, if one is concerned only with the approximate values of logarithms or square roots of large numbers, 115 then they can be understood very easily, and so can this sort of language.

估计和近似遍布于数学之中，而这个领域以外的人却不太了解这一点，部分原因在于，为了谈论近似，要使用类似于“大约和 log$n$ 的速度一样快”，或者“限制在相差一个常数内为根号 t”这样的语言，而这对多数人来说意义不大。幸而，对于较大数的对数或平方根，如果有人只关心近似值，便很容易理解，这一类语言也不难懂。

If you are interested in numbers only 'up to a multiplicative constant', then multiplication suddenly becomes very easy: take m and n, count their combined digits, subtract one (if you can be bothered), and write down a number with that many digits. For example, 1293875 (7 digits) times 20986759777 (11 digits) is in the region of

如果你只在“相差常数倍以内”的程度上关心某个数，那么乘法立刻就变简单了：取 m 和 n 两个数，数数它们合起来的位数，减去 1(如果你在乎这一点)，写下一个有这么多位的数。例如，1 293 875(7 位)乘以 20 986 759 777(11 位)，得数大致接近 10 000 000 000 000 000(17

10000000000000000(17 digits). If you want to be a little more careful, you can note that the first number begins with a 1 and the second with a 2, which means that 20000000000000000 is a better estimate, but for many purposes such precision is unnecessary.

位)。如果你想做得更仔细一点，那么可以用上第一个数的首位 1 及第二个数的首位 2，也就意味着 20 000 000 000 000 000 是个更优的估计值，不过在很多场合下这样的精度是不必要的。

Though the number e is indeed very natural and important, all we need to know here is that the natural logarithm of a number, the number you get by pressing LN on a calculator, is roughly the number of digits it has, multiplied by about 2.3. Thus, the natural logarithm of 2305799985748 is about 13×2.3=29.9. (If you know about logarithms, you will see that what you should really multiply by is $\log_e 10$).

尽管 e 这个数的确很自然也很重要，但我们在此只要了解：一个数的自然对数，即在计算器上按 LN 键得到的数，大体上是它的位数乘以 2.3 左右。于是 2 305 799 985 748 的自然对数约为：13×2.3=29.9。(如果你了解对数，你会知道真正应当乘上的数是 $\log_e 10$。)

1.2.6 The prime number theorem

1.2.6 素数定理

A prime number is a whole number greater than 1 that is divisible by no other whole numbers, with the obvious exceptions of 1 and itself. If you were to write out the first thousand primes, then the tendency for the gaps between successive ones to get larger would become more obvious. In other words, large primes appear to be thinner on the ground than small ones. If you choose a number at random between 1,000,001 and 1,010,000, then what are the chances that it will be a prime? In other words, what is the 'density' of primes near 1,000,000? Is it fantastically small or only quite small?

素数是大于 1 且不能被其他整数——1 和自身显然除外——整除的整数。如果你写出前 1000 个素数，那么相邻素数间距增大的趋势就会变得更加明显。也就是说，和小素数比起来，大素数的出现越来越稀疏。如果你在 1 000 001 和 1 010 000 之间随机取一数，那么这个数有多大的机会是素数？换言之，1 000 000 附近的素数"密度"是多大？它是极其小还是仅仅比较小？

The reason such questions rarely occur to people who have not been exposed to university-level mathematics is that they lack the language in which to formulate and think about them. However, if you have understood this chapter so far, you are in a position to appreciate one of the greatest achievements of mathematics: the prime number theorem. This states that the density of primes near a number n is around $1/\log_e n$ —that is, one divided by the natural logarithm of n.

没有接触过大学数学的人很少会提出这样的问题，其原因在于，他们没掌握将问题公式化表达并进一步思考所需的语言。不过，若是这章到现在为止你都看懂了，那么你就能够欣赏到数学中最伟大的成就之一：素数定理。定理陈述的是，在数 n 附近的素数密度约为 $1/\log_e n$，即 1 除以 n 的自然对数。

Given the sporadic, random-like quality of the primes, it is quite surprising how much can be proved about them. Interestingly, theorems about the primes are usually proved by exploiting this seeming randomness.

既然素数分布有零零散散、颇似随机的性质，而我们却能证明其如此多的特点，这足以令人十分惊讶。有意思的是，关于素数的定理通常都是通过利用这种看似随机的性质得到证明的。

Perhaps the most famous open problem in mathematics is the Riemann hypothesis. This has several equivalent formulations. One of them concerns the accuracy of the estimate given by the prime number theorem. As I have said, the prime number theorem tells you the approximate density of the primes near any given number. From this information one can calculate roughly how many prime numbers there are up to any given number n. But how rough is rough? If $p(n)$ is the true number of primes up to n and $q(n)$ is the estimate suggested by the prime number theorem, then the Riemann hypothesis asserts that the difference between $p(n)$and $q(n)$ will be not much larger than $\sqrt{n}$. If that sort of accuracy could be proved to hold, then it would have many applications, but what is known to date is far weaker.

数学中最著名的未决问题大概要数黎曼假设了。这个假设有若干种等价的表达形式，其中一种涉及素数定理给出的估计的精度。我之前说过，素数定理告诉我们在某数附近素数的近似密度。根据这个信息，我们可以计算出，不大于 n 的素数大约有多少。但这个“大约”有多“大约”？如果 $p(n)$是不大于 n 的素数个数的真实值，$q(n)$是根据素数定理得到的估计值，那么黎曼猜想断言，$p(n)$和 $q(n)$的差不会比 $\sqrt{n}$ 大太多。如果能够证明这样的精度确实成立，那么它将会有很多的应用，但迄今所得到的结果比这要弱得多。

1.2.7　Sorting algorithms

1.2.7　排序算法

Another area of mathematics that is full of rough estimates is theoretical computer science. If one is writing a computer program to perform a certain task, then it is a good idea to design it in such a way that it will run as quickly as possible. Theoretical computer scientists ask the question: what is the fastest one could possibly hope for?

数学另有一个分支领域，即理论计算机科学，其中满是粗略的估计。如果有人要写一个计算机程序完成特定任务，那么程序当然运行得越快越好。理论计算机科学家提出了这样的问题：我们所能期望的最快速度是多快？

One very useful task that computers can do is known as sorting — that is, putting a large number of objects in order according to a given criterion. It is known that, up to a multiplicative constant, the number of comparisons needed to sort n objects is $n\log n$.

计算机能够完成的一项非常有用的任务被称为排序，即将为数很多的对象按照给定标准排列顺序。众所周知，相差常数倍情况下，对 n 个对象进行排序所需的比较次数为 $n\log n$。

The following method, known as Quicksort, is not guaranteed to work any faster, but usually it works much faster. It is defined recursively (that is, in terms of itself) as follows. First choose any one of the objects, x, say, and arrange the others into two piles, the ones that are better than x and the ones that are worse. This needs $n-1$ comparisons. All you need to do now is sort the two piles - which you do using Quicksort. That is, for each pile you choose one object and arrange the others into two further piles, and so on. Usually, unless you are

下述方法被称为“快速排序”，它并不能保证一定就会更快，但通常情况它都会快很多。它是如下递归(即利用自身)定义的。首先选择任一对象，比如 x，再将其他对象分成两堆，一堆全都优于 x，另一堆全都劣于 x。这需要比较 $n-1$ 次。接下来你只需分别对两堆进行排序 —— 再次利用快速排序。也就是，对每一堆来讲，选出一个对象，将剩余对象分成两小堆，依此类推。一般来说，除非你运气很差，否则

unlucky, when you divide a pile into two further ones, they will be of roughly the same size. Then it can be shown that the number of comparisons you make will be roughly $n\log n$. In other words, generally this method works as well as you could possibly hope for, to within a multiplicative constant.

分出的两堆中对象数量是差不多的。于是可以表明，所需比较次数大致为 $n\log n$。换句话说，这种方法通常都能以你期待的效率运作，相差常数倍以内。

1.3 评述①

1.3.1 发展轨迹

从数学的发展历史来看，可以大致分为古典数学、近代数学和现代数学三个阶段。

17 世纪初之前的数学为古典数学阶段，这时的数学主要研究数、代数方程和初等几何，主要关注常见的代数运算和几何形体内部及相互间的对应关系。古典数学阶段形成了初等代数和初等几何两大领域。

从 17 世纪初到 19 世纪末，数学发展到近代数学阶段。近代数学以笛卡尔建立的解析几何为起点，以微积分诞生为标志，以宏观世界中的物理运动为背景。在这个阶段，“数”从常量发展到变量，简单的几何体发展到一般的曲线和曲面。这个阶段的数学把数和形紧密联系起来，研究它们之间的函数和变换关系。近代数学阶段形成了代数、几何和分析三大领域。

从 19 世纪末开始，数学进入了现代数学阶段。现代数学则以集合论的创立为起点、以公理化体系和结构分析观点(希尔伯特的形式主义)为明显标志。这一阶段数学研究的对象是集合、空间和流形，并把它们用集合和映射的方式统一起来。

现代数学的一大特征是高度抽象和统一，这也使得更本质的数学规律不断获得发现和应用。现代数学除注重公理化体系的建立，也强调结构的分析。运用“结构”这一工具，能使数学形成统一的整体，还能发现各个分支之间的联系，有助于解决数学问题。现代数学还注重不同分支间的交叉融合，开辟新的研究领域。同时，随着技术的进步，现代数学也注重建立数学模型，解决更复杂的实际问题，从而推动技术的进步和人类文明的发展。

1.3.2 理解数学

怎么理解数学？

通常的方式是走“技术”路线，即按照某一数学领域的内在逻辑顺序，由浅入深，逐步加以学习。比如，要学习“希尔伯特空间”，典型的大学课程是要先学习收敛、柯西列、向量空间、内积等概念，然后进一步学习内积空间、空间完备性等概念。

① 编者注：本节参阅杜珣编著的《现代数学引论》(北京大学出版社，1996)、李大潜发表的文章《数学建模与素质教育》(《中国大学数学》，2010(10)：41-43)。

在我们所导读的这本由著名数学家高尔斯带来的牛津数学通识读本中，作者更关注“哲学路线”，不用陷进“技术”的漩涡里，同样可以理解数学。这本书的一大亮点是作者鼓励读者应当学会抽象思维，因为借助于抽象思维，许多理解的困难就消失了。这本书的目的是生动形象地介绍我们在学校里学到的数学与那种高深的、研究级别的数学的区别。读者会对那些听起来有些矛盾的概念(比如，无穷、虚数、弯曲的空间等)获得清晰的理解，会发现最根本的区别还是在哲学层面。

该书作者凭着深厚的数学功力、对数学的深刻理解和把握，没有借助任何公式和符号，深入浅出而又形象生动地介绍了数学发展史上那些具有里程碑意义的概念、思想和方法。比如，作者通过四维空间的例子告诉读者如何从有形到无形的抽象思维；通过双曲几何的例子引出非欧几何，告诉读者如何打破固有思维(两条平行线永不相交)，展示了非欧几何的现实意义，并据此通俗地讲解了空间弯曲的实质；通过地图册的思想形象地理解高维流形；通过讨论估计与近似，不经意间引入了素数定理以及与之密切相关的黎曼猜想这一著名的公开问题；通过快速排序算法说明将读者引入理论计算机领域，让读者从一个侧面理解到算法的重要性。就像一场公众讲座的最后一个环节一样，作者在该书的最后一章回答了一些有趣的大众问题，比如，“数学家到了 30 岁就已经不如当年了，这是否是真的？”对这些大众问题的回答也是该书的一个亮点。

1.3.3 数学之用

首届国际数学日(2011.3.14)的主题是“数学处处可见(mathematics is everywhere)”。日常生活中的“加、减、乘、除”作为数学的“通俗”应用自不多言。数学除了为其他学科提供支撑和表达形式外，还是解决实际问题的强有力工具。比如，疫情分析中的传染病模型、医疗 CT 背后的拉东变换、地质勘探中的数学反问题、航空领域的流体动力学方程、大数据及人工智能里的统计方法、图像处理中的矩阵变换和映射、通信领域的编码、金融分析中的数学模型等，都是应用数学工具来解决实际问题的。著名企业家任正非在 2019 年 1 月的一次采访中说：“这 30 年，其实我们真正的突破是数学，手机系统设备是以数学为中心的。”

拿破仑曾说，数学的进步与国家兴亡紧密相连。数学的实力往往影响着国家的实力，世界强国基本上都是数学强国。我国近年来也加大了对数学的重视和投入。2018 年 1 月，国务院发布《关于全面加强基础科学研究的若干意见》，明确提出了“潜心加强基础科学研究，对数学、物理等重点基础学科给予更多倾斜”。2019 年 7 月，科技部、教育部、中国科学院、自然科学基金委联合制定了《关于加强数学科学研究方案》。2020 年 2 月，国家首批 13 个应用数学中心由科技部批准设立。

1.3.4 启迪展望

对于我们绝大多数人来说，终将离开学校，进入各行各业，学过的数学知识可能很少能直接用上。那么，学习数学对我们有什么意义呢？

接受数学教育，通过一定的数学学习和训练，培养逻辑思考和逻辑推理的能力，可以使我们具备一些特殊的素质和能力，这些素质和能力应该是通过其他科目的学习或其他方面的实践所无法代替或难以达到的。诸如，对事物的数、量或形状及其变化规律方面的敏感性，处理头绪纷繁的各项工作的条理性和逻辑性，一丝不苟的作风和习惯，精益求精的做事风格，运用数学知识处理实际问题的意识

和能力，具有某种数学上的直观和想象力等。通过数学的学习和使用，我们耳濡目染，铭刻于心，形成习惯，逐渐变成为自身优秀素质和能力的一个重要组成部分，我们也很有可能会因此而终身受益无穷。

喜欢数学，接受它的熏陶，让你的气质因数学而与众不同吧。

1.4 阅读思考与延伸阅读

1.4.1 阅读思考

1. 我们熟悉理解一维、二维、三维空间，或许甚至可以想象四维空间(再加上时间的)。如何理解和认识四维以上的任意维空间，乃至无穷维空间？如何理解分数维空间？

2. 我们熟知欧氏空间，如何理解和认识双曲空间、球面空间，乃至弯曲的空间？

3. 试从数学的观点来看现实社会、经济中时时出现的不确定性和随机现象。

1.4.2 延伸阅读

1.《古今数学思想》

《古今数学思想》由莫里斯·克莱茵著，于 1972 年在牛津大学出版社出版。(Morris Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modem Times. Oxford University Press, 1972)。《古今数学思想》是数学发展历史的经典名著，着重阐述了古往今来一些重要的数学思想的来源与数学的意义，以及数学和其他自然科学，尤其是力学、物理学的关系。

2. 《数盲：数学无知者眼中的迷惘世界》

《数盲：数学无知者眼中的迷惘世界》由约翰·艾伦·保罗士著，于 1989 年在 Viking 出版社出版。(John Allen Paulos. Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences. Viking, 1989)。《数盲：数学无知者眼中的迷惘世界》是一本著名数学畅销书，通过一些生动和有趣的事例，讲述数学方法和数学能力如何影响现实社会、人类生活的各个层面。

3. 《什么是数学》

《什么是数学》由 R. 柯朗和 H. 罗宾著，于 1996 年在牛津大学出版社出版。(Richard Courant and Herbert Robbins. What is Mathematics? 2nd ed. Oxford University Press, 1996)。《什么是数学》是另一本经典名著，搜集了许多经典的数学珍品，对数学领域中的基本概念与方法做了精深而生动的阐述。

(本章由王跃飞、陈之兵、李工农、徐希撰稿)

王跃飞，1992 年在中国科学院数学所获博士学位，现为深圳大学特聘教授、博士生导师。曾获得国家杰出青年科学基金，首批“新世纪百千万人才工程”入选者、中科院“百人计划”入选者，享受国务院政府特殊津贴等。历任中国科学院数学与系统科学研究院研究员、博士生导师、数学所所长、研究院执行院长、深圳大学数学与统计学院名誉院长等。曾先后访问过美国哈佛大学、普林斯顿大学、德国柏林理工、法国南特大学、皮卡迪大学等 50 余所大学和科研机构。主要从事基础数学研究，在 *Advances in Mathematics*、*Transactions of the American Mathematical Society*、《法国科学院院刊》《中国科学》等国际著名刊物发表论文 60 余篇。先后担任过中国数学会两任副理事长，国家杰出青年科学基金评审委员会成员，国家自然科学基金委员会监督委员会委员、数学天元基金学术领导小组成员、数理学部评审专家组成员，国务院学位委员会第六、七届学科评议组成员，“华罗庚数学奖”评选委员会委员，“陈省身数学奖”评选委员会委员，“钟家庆数学奖”评选委员会主任和委员，*Mathematische Nachrichten*、《中国科学》《数学学报》等 10 余个学术刊物正、副主编或编委。

陈之兵，博士，教授，历任深圳大学数学与统计学院书记、院长，兼任中国工业与应用数学学会理事、广东省数学会常务理事，曾获“深圳市十佳青年教师”称号，先后学术访问比利时鲁汶大学、中国香港理工大学。研究兴趣为应用逼近理论、矩阵分析及其应用等，在 *Discrete Mathematics*、*Linear Algebra and Its Application*、*Journal of Computational Mathematics* 等国际重要杂志发表论文 30 余篇。主要承担本科生“数学分析”等课程的教学。

李工农，深圳大学数学与统计学院应用数学系副教授。2001 年 3 月至 2004 年 3 月在中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所攻读博士学位，获得理学博士学位后于同年 5 月任职于深圳大学数学学院。部分研究成果发表在国际杂志《应用数学与计算》(*Applied Mathematics and Computation*) 上。研究方向为运筹学、概率论及数理统计、数学规划。参加三项国家自然科学基金项目的研究。已出版教材《运筹学基础及其 MATLAB 应用》《经济预测与决策及其 MATLAB 实现》。

徐希，1999 年获中山大学博士学位，同年起在深圳大学数学学院工作至今。研究方向为常微分方程及动力系统。发表论文多篇，2003 年被评为副教授，曾获“深圳市优秀教师”称号。主讲研究生课程“常微分方程定性理论”“分支理论”，以及本科生课程“数学分析”“高等代数”“解析几何”“常微分方程”等。曾参与指导学生参加全国大学生数学建模竞赛并取得优异成绩。开设选修课“数学思想发展史”近 20 年，一直深受学生欢迎。