

数学培优竞赛新思维

数学培优竞赛讲座

(六年级)

朱华伟 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是以国内外小学数学各种培优竞赛为背景,以《义务教育数学课程标准》的理念和要求为准绳编写的,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,构建通往数学奥林匹克前沿的捷径.本书分培优篇和竞赛篇两大部分,按照专题讲座的形式编写,每讲均设置知识方法扫描、经典例题解析,并配有强化训练及参考答案,注重数学思想的渗透,通过穿插数学案例、名家名言及独特的解题思路,引导学生发现数学的美妙,从而激发学生学习数学的兴趣.

本书可供小学六年级师生及家长使用,也可供小学生数学竞赛培训机构人员参考.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座.六年级 / 朱华伟编著. —北京:清华大学出版社, 2021.6

(数学培优竞赛新思维)

ISBN 978-7-302-56095-1

I. ①数… II. ①朱… III. ①小学数学课—教学参考资料 IV. ①G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020)第 137001 号

责任编辑:王 定

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:成凤进

责任印制:朱雨萌

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:小森印刷霸州有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:15.25 字 数:419千字

版 次:2021年8月第1版 印 次:2021年8月第1次印刷

定 价:58.00元

产品编号:087080-01

前 言

从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(International Mathematical Olympiad, IMO)以来,中国代表队参加了34次IMO,其中,20次团队总分居第一位(有12次六位队员都获得金牌),8次团队总分居第二位,2次团队总分居第三位,团队总分居第四、六、八位各1次,共有200人参赛,共获金牌157块、银牌35块、铜牌6块.早在1994年,中国科学院数学物理学部的王梓坤院士就写道:“(我国中学生在IMO中)连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋.我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞.”这对青少年学好数学无疑是莫大的鼓舞和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的小学生提供一个提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以国内外小学数学各种培优竞赛为背景,以《义务教育数学课程标准》的理念和要求为准绳,根据多年培训“华罗庚金杯赛”选手和辅导小学数学资优生参加数学考试的经验、体会和素材,编写了这套“数学培优竞赛新思维”丛书.本丛书包括《数学培优竞赛讲座》(三年级、四年级、五年级、六年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(三年级、四年级、五年级、六年级).

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分.

● 培优篇,与课堂教学同步,从课内到课外逐步引申扩充,由浅入深,由易到难,循序渐进,是课堂教学的自然延伸;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往数学奥林匹克前沿的捷径;在学生力所能及的范围内扩展知识视野,提高思维能力;在巩固深化小学数学教材知识的同时,拓宽小学数学和竞赛数学的知识.

● 竞赛篇,以小学数学各种竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生发现与创新的灵感.这些内容是数学奥林匹克竞赛中生动活泼、富于创新性的内容.这类问题的特点是涉及的数学知识较少而包含的技巧较多,理解和解决这类问题往往不需要很多专门的数学知识,而发现解法却相当困难,没有固定的模式可以套用.它要求学生自己去探索、尝试,通过观察、思考,利用归纳、枚举、类比、排序、估计、构造、递推、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法,发现规律,找到解决问题的门径,这恰是数学奥林匹克竞赛试题所应有的风格.这些内容可帮助学生开发智力、提高水平,去参加高层次的竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

(1) 数学名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

(2) 知识方法扫描：概括竞赛数学的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

(3) 经典例题解析：主要包含“分析”“解”“分析与解”和“评注”，由基础题、提高题、综合题组成。本书中很多例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，以起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，意在引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系。总之，评注的目的在于，一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的。

(4) 强化训练：含填空题、解答题，为方便自学，在参考答案中给出了每题详细的解答过程。

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测；书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度。“一讲一练”与“讲座”配套使用，才能达到较好的学习效果。

希望通过本丛书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。

本丛书是小学生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点中学、破解数学考试压轴题的利器，是小学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友。

在本丛书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此谨向原题编者表示感谢。由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正。



2020年5月1日

目 录

培 优 篇/1

第 1 讲	分数的巧算	1
第 2 讲	比较大小	8
第 3 讲	估计与估算	13
第 4 讲	定义新运算	18
第 5 讲	分数的分拆	26
第 6 讲	工程问题	32
第 7 讲	分数应用题	38
第 8 讲	百分数应用题	44
第 9 讲	比和比例问题	50
第 10 讲	行程问题	56
第 11 讲	列方程解应用题	63
第 12 讲	方程组	69
第 13 讲	不定方程	75
第 14 讲	列表与图解	81
第 15 讲	圆与组合图形	88
第 16 讲	勾股定理与弦图	94
第 17 讲	立体图形	101
第 18 讲	面积与比例(1)	108
第 19 讲	面积与比例(2)	115

竞 赛 篇/121

第 20 讲	枚举与筛选	121
第 21 讲	最优化问题	126
第 22 讲	配对法	135
第 23 讲	对策问题	139



第 24 讲	反证法	145
第 25 讲	不变量原理	149
第 26 讲	抽屉原理	155
第 27 讲	染色与赋值	159
第 28 讲	构造法	165
第 29 讲	极端原理	170
第 30 讲	离散最值问题	175

强化训练参考答案/181

优 培优篇

第 1 讲 分数的巧算

我们有些青少年学习数学时,害怕运算,特别是比较复杂一些的计算题,他们往往半途而废……要学好数学,就要不怕繁,不怕难,要有算到底的决心.

——华罗庚



知识方法扫描

在三年级第 2 讲高斯的故事、第 6 讲加减法的巧算,四年级第 2 讲乘除法的巧算,五年级第 1 讲小数的巧算、第 25 讲数列的求和中,同学们已经学会了许多计算的方法与技巧,这些都是我们进一步学习分数巧算的基础.

对于复杂的分数运算题,先要全面审题,仔细观察已知数的特征,分清运算顺序,再根据运算法则和运算律以及分数的性质选择合理而巧妙的算法.常用的方法和技巧有通分、约分、凑整、分解、分拆等.



经典例题解析

【例 1-1】 计算: $\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}\right) \times 2\frac{1}{7}$.

解法 1 先求出 30, 35, 63 的最小公倍数. $30 = 2 \times 3 \times 5$; $35 = 5 \times 7$; $63 = 3 \times 3 \times 7$; 所以最小公倍数是 $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$. 原式通分, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(\frac{21}{630} + \frac{18}{630} + \frac{10}{630}\right) \times \frac{15}{7} \\ &= \frac{49}{630} \times \frac{15}{7} \text{(约分)} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法 2} \quad \text{原式} &= \left(\frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{3 \times 3 \times 7} \right) \times \frac{15}{7} \\
 &= \frac{21 + 18 + 10}{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} \times \frac{15}{7} \\
 &= \frac{49}{2 \times 3 \times 7 \times 7} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

评注 例 1-1 这两种解法同样都用到通分和约分的技巧,只有一点小区别:解法 2 在通分时不急于把分母算出,而是边算边约分.只是这一点小小的不同,却节省了求连乘积的运算,约分也简单些,使计算快了不少.

$$\text{【例 1-2】 计算: } \frac{2 \frac{5}{8} - \frac{2}{3} \times 2 \frac{5}{14}}{\left(3 \frac{1}{12} + 4.375 \right) \div 19 \frac{8}{9}}.$$

分析 分数、小数合在一起的四则运算,是小学数学的重要训练内容,要求算得准、算得快.这个题目,是用繁分式的形式给出了加、减、乘、除的混合运算,它的另一个形式是

$$\left(2 \frac{5}{8} - \frac{2}{3} \times 2 \frac{5}{14} \right) \div \left[\left(3 \frac{1}{12} + 4.375 \right) \div 19 \frac{8}{9} \right].$$

算这道题时,要注意两点:

- (1) 在乘除运算中,带分数要化为假分数,及时约分.
- (2) 在加减运算中,如果分数、小数同时出现,那么就把它都化为分数,或都化为小数.

$$\begin{aligned}
 \text{解法 1} \quad \text{原式} &= \frac{\frac{21}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12} + \frac{35}{8} \right) \div \frac{179}{9}} \\
 &= \frac{\frac{21}{8} - \frac{11}{7}}{\frac{179}{24} \times \frac{9}{179}} \\
 &= \left(\frac{21}{8} - \frac{11}{7} \right) \times \frac{8}{3} \\
 &= 7 - 4 \frac{4}{21} \\
 &= 2 \frac{17}{21}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法 2 原式} &= \frac{\frac{21}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12} + \frac{35}{8}\right) \times \frac{9}{179}} \\
 &= \frac{\frac{21}{8} - \frac{11}{7}}{\frac{179}{24} \times \frac{9}{179}} \times \frac{56}{56} \\
 &= \frac{147 - 88}{21} \\
 &= 2\frac{17}{21}.
 \end{aligned}$$

评注 例 1-2 这两种方法的共同之处,其一是在前两步运算中都将乘除运算中的带分数化成了假分数,及时进行了约分;其二是将 4.375 化成了分数 $\frac{35}{8}$,这两步很关键.两种方法的不同之处是解法 1 运用了乘法的分配律,解法 2 则是采用了化简繁分式的通常方法——分子、分母同乘以一个不为 0 的数.这里还要指出: $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{5}{8}$ 、 $\frac{7}{8}$ 的小数形式为 0.5、0.25、0.75、0.125、0.375、0.625、0.875,同学们一定要很熟悉,在具体计算时,可以节省时间.

$$\text{【例 1-3】 计算: } \frac{19\frac{5}{9} + 3\frac{9}{10} - 5.22}{19\frac{5}{9} - 6\frac{27}{50} + 5.22} \div \left(\frac{1993 \times 0.4}{1995 \times 0.5} + \frac{1.6}{1995} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \frac{19\frac{5}{9} + \frac{45}{50} - 2 - \frac{11}{50}}{19\frac{5}{9} - 1 - \frac{27}{50} + \frac{11}{50}} \div \left(\frac{1993 \times 0.4}{1995 \times 0.5} + \frac{4 \times 0.4 \times 0.5}{1995 \times 0.5} \right) \\
 &= \frac{19\frac{5}{9} - 1\frac{8}{25}}{19\frac{5}{9} - 1\frac{8}{25}} \div \left[\frac{1993 + (4 \times 0.5)}{1995} \times \frac{0.4}{0.5} \right] \\
 &= 1 \div \frac{0.4}{0.5} \\
 &= 1\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【例 1-4】 化简: } \frac{3.875 \times \frac{1}{5} + 38\frac{3}{4} \times 0.09 - 0.155 \div 0.4}{2\frac{1}{6} + \left[(4.32 - 1.68 - 1\frac{8}{25}) \times \frac{5}{11} - \frac{2}{7} \right] \div 1\frac{9}{35} + 1\frac{11}{24}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式的分子} &= \frac{31}{40} + \frac{31}{40} \times \frac{9}{2} - \frac{31}{40} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{31}{40} \times \left(1 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{31}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{原式的分母} &= \frac{13}{6} + \left[\left(\frac{108}{25} - \frac{42}{25} - \frac{33}{25} \right) \times \frac{5}{11} - \frac{2}{7} \right] \times \frac{35}{44} + \frac{35}{24} \\ &= \frac{13}{6} + \left[\frac{33}{25} \times \frac{5}{11} - \frac{2}{7} \right] \times \frac{35}{44} + \frac{35}{24} \\ &= \frac{13}{6} + \left[\frac{3}{5} - \frac{2}{7} \right] \times \frac{35}{44} + \frac{35}{24} \\ &= \frac{13}{6} + \frac{11}{35} \times \frac{35}{44} + \frac{35}{24} \\ &= \frac{93}{24} \\ &= \frac{31}{8}. \end{aligned}$$

所以,原式等于1.

评注 解例1-4这类题时,在乘除运算中,小数宜化为分数,带分数宜化为假分数,并将运算结果及时约分.在加减运算中,当小数、分数都出现时,通常都化为分数,因为分数化为小数时,有可能出现无限循环小数.当然,在能都化为有限小数时,也可以都化为小数.

$$\text{【例 1-5】 计算: } \frac{(1+17) \times \left(1+\frac{17}{2}\right) \times \left(1+\frac{17}{3}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{17}{19}\right)}{(1+19) \times \left(1+\frac{19}{2}\right) \times \left(1+\frac{19}{3}\right) \times \cdots \times \left(1+\frac{19}{17}\right)}.$$

分析 本题的分子、分母不能按照计算顺序逐个乘起来,比较观察可知,分子部分为:

$$18 \times \frac{19}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{21}{4} \times \cdots \times \frac{36}{19} = 18 \times 19 \times 20 \times \cdots \times 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{19}, \text{分母部分为: } 20 \times \frac{21}{2} \times \frac{22}{3} \times \cdots \times \frac{36}{17} = 20 \times 21 \times \cdots \times 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{17}. \text{再通过约分就可以简便地算出结果来.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{18 \times \frac{19}{2} \times \frac{20}{3} \times \cdots \times \frac{36}{19}}{20 \times \frac{21}{2} \times \frac{22}{3} \times \cdots \times \frac{36}{17}} \\ &= \frac{18 \times 19 \times 20 \times \cdots \times 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{19}}{20 \times 21 \times 22 \times \cdots \times 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{17}} \\ &= 18 \times 19 \times \frac{1}{18} \times \frac{1}{19} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{【例 1-6】 计算: } \frac{1.2 \times 2.4 \times 4.8 + 2 \times 4 \times 8 + \frac{1}{13} \times \frac{2}{13} \times \frac{4}{13}}{1.2 \times 3.6 \times 10.8 + 2 \times 6 \times 18 + \frac{1}{13} \times \frac{3}{13} \times \frac{9}{13}}.$$

分析 如果按照运算顺序分别算出分子和分母部分的结果势必太麻烦了,观察算式的特点,分子部分三项的积都含有因数 $1 \times 2 \times 4$,分母部分三项的积都含有因数 $1 \times 3 \times 9$,可以将分子部分的表示形式转化为 $1 \times 2 \times 4 \times \left[1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \right]$,分母部分的表示形式转化为 $1 \times 3 \times 9 \times \left[1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \right]$,通过约分就可以很简便地算出结果来.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \frac{1.2^3 \times 1 \times 2 \times 4 + 2^3 \times 1 \times 2 \times 4 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \times 1 \times 2 \times 4}{1.2^3 \times 1 \times 3 \times 9 + 2^3 \times 1 \times 3 \times 9 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \times 1 \times 3 \times 9} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 4 \times \left[1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \right]}{1 \times 3 \times 9 \times \left[1.2^3 + 2^3 + \left(\frac{1}{13} \right)^3 \right]} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

评注 当分数的分子、分母都以比较复杂的算式出现时,应该把分子、分母看作一个整体,看能不能运用分数的基本性质进行约分.

下面以两个例子来介绍有规律的数的运算.

$$\text{【例 1-7】 计算: } 19 + 9 \frac{1}{2} + 7 \frac{1}{4} + 3 \frac{1}{8} + 8 \frac{1}{16} + 4 \frac{1}{32}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= (19 + 9 + 7 + 3 + 8 + 4) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) \\ &= 50 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \right) - \frac{1}{32} \\ &= 50 + 1 - \frac{1}{32} \\ &= 50 \frac{31}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{【例 1-8】 计算: } \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \frac{3}{60} + \cdots + \frac{59}{60} \right).$$

分析 逐项相加,计算很烦琐,现对同分母的一组中各数相加,找规律. 因为 $\frac{k}{n} + \frac{n-k}{n}$

$$=1, \text{于是有 } \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1, \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}, \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = 2, \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = 2\frac{1}{2},$$

$$\dots, \frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \dots + \frac{59}{60} = 29\frac{1}{2}.$$

解 据分析得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + \dots + 29\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times (1 + 2 + \dots + 59) \\ &= 885. \end{aligned}$$

强化训练

1. 计算: $6.8 \times \frac{8}{25} + 0.32 \times 4.2 - 8 \div 25 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\left(\frac{191919}{989898} + \frac{190190}{980980} + \frac{19001900}{98009800} \right) \div \frac{19}{98} \div \frac{9898}{1919} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 1000 减去它的一半, 再减去余下的 $\frac{1}{3}$, 再减去余下的 $\frac{1}{4}$, 依此下去, 直到减去余下的 $\frac{1}{500}$, 最后剩下 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 计算: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 计算: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{31} + \frac{1}{62} + \frac{1}{124} + \frac{1}{248} + \frac{1}{496} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 计算: $\frac{1 + \frac{1}{2 - \frac{1}{3}}}{1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 计算: $41\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + 51\frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + 61\frac{1}{5} \times \frac{5}{6} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 计算: $\frac{1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + \dots + 1994\frac{1995}{1996} + 1995\frac{1996}{1997}}{3\frac{1}{3} + 5\frac{2}{4} + 7\frac{3}{5} + \dots + 3989\frac{1994}{1996} + 3991\frac{1995}{1997}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 计算: $76 \times \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{53} \right) + 23 \times \left(\frac{1}{53} + \frac{1}{76} \right) - 53 \times \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{76} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 计算:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

11. 尽可能化简: $\frac{116690151}{427863887}$.

12. 计算:

$$\frac{1}{1} + \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{1} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{9}{1} - \frac{8}{2} + \frac{7}{3} - \frac{6}{4} + \cdots + \frac{1}{9}\right).$$

13. 计算: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+1999}$.

14. 计算:

$$\left(1 - \frac{3}{2 \times 4}\right) \times \left(1 - \frac{3}{3 \times 5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4 \times 6}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5 \times 7}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{3}{96 \times 98}\right) \times \left(1 - \frac{3}{97 \times 99}\right).$$