数学培优竞赛新思维

# 数学培优竞赛一讲一练

## (七年级)


主编　朱华伟

编者　张文涛　邱际春　宋浩毅



清华大学出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 七年级 / 朱华伟主编. —北京 ：清华大学出版社，2021.6
(数学培优竞赛新思维)
ISBN 978-7-302-56556-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 187338 号

责任编辑：王　定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：成凤进
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　　张：10.5　　字　　数：285 千字
版　　次：2021 年 8 月第 1 版　　印　　次：2021 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

产品编号：087088-01

# 前　言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛（International Mathematical Olympiad，IMO）以来，中国代表队参加了 34 次 IMO，其中，20 次团队总分居第一位（有 12 次六位队员都获得金牌），8 次团队总分居第二位，2 次团队总分居第三位，各 1 次团队总分居第四、六、八位，共有 200 人参赛，共获金牌 157 块、银牌 35 块、铜牌 6 块. 早在 1994 年，中国科学院数学物理学部的王梓坤院士就写道："（我国中学生在 IMO 中）连续获得团体冠军，个人金牌数也名列前茅，消息传来，全国振奋. 我国数学，现在有能人，后继有强手，国内外华人无不欢欣鼓舞." 这对青少年学好数学无疑是莫大的鼓舞和鞭策，极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的初中生提供一个提高解题能力和培养创新精神的平台，我们以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，根据多年辅导初中生参加中考数学和初中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材，编写了这套"数学培优竞赛新思维"丛书. 本丛书包括《数学培优竞赛讲座》（七年级、八年级、九年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（七年级、八年级、九年级）.

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分.

● 培优篇，与课堂教学同步，从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进，是课堂教学的自然延伸；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径；在学生力所能及的范围内扩展知识视野，提高思维能力；在巩固深化初中数学教材知识的同时，拓宽中考数学和竞赛数学的知识.

● 竞赛篇，以初中数学奥林匹克竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，有助于激发学生创新与发现的灵感. 这些内容是数学奥林匹克竞赛中生动活泼、富于创新性的内容. 这类问题的特点是涉及的数学知识较少而包含的技巧较多，理解和解决这类问题往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法却相当困难，没有固定的模式可以套用. 它要求学生自己去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、类比、排序、估计、构造、递降、递推、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法，发现规律，找到解决问题的门径，这恰是数学奥林匹克竞赛试题所应有的风格. 这些内容可帮助学生开发智力，提高水平，从而参加高层次的竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下.

（1）数学名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅.

（2）知识方法扫描：概括竞赛数学的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点.

（3）典型例题解析：含“分析”“解”“分析与解”和“评注”，例题总个数控制在 8 道，由基础题（3 道中考难度的试题）、提高题（3 道全国初中数学联赛一试难度的试题）、综合题（2 道全国初中数学联赛二试难度的试题）组成. 本书中很多例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，以起到画龙点睛的效果；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，意在引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系. 总之，评注的目的在于，一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的.

（4）强化训练：含选择题、填空题、解答题，为方便自学，在参考答案中给出了每题详细的解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测；书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.“一讲一练”与“讲座”配套使用，才能达到较好的学习效果.

希望通过本丛书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣.

本丛书是初中学生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点高中、破解中考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此谨向原题编者表示感谢. 由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2021 年 5 月 1 日

# 目　　录

# 第 1 讲　有理数和数轴

## 一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 在数轴上,$A$、$B$ 是两个定点,$A$ 表示 1,$B$ 表示 $-4$,$P$ 到 $A$、$B$ 的距离和为 9,则 $P$ 表示的数是________.

2. 甲、乙两队举行拔河比赛,标志物先向乙队方向移动 0.2 米,又向甲队方向移动 0.5 米,相持一会儿,又向乙队方向移动 0.4 米,随后又向甲队方向移动 1.3 米,在大家的欢呼鼓励中,标志物又向甲队移动 0.9 米. 若规定标志物向某队方向 2 米该队即可获胜,那么现在________队赢.

3. 在一条数轴上有一只跳虫从原点出发,在数轴上跳动,每次向正方向或负方向跳一个单位.经过 5 次跳动,跳虫落在 3 这点(允许重复过此点).那么这只跳虫不同的跳动方法共有________种.

4. 如图 1-1 所示,有一个半径为 $\frac{1}{2}$ 个单位长度的圆,将圆上的点 $A$ 放在原点,并把圆沿数轴逆时针滚动一周,点 $A$ 到达点 $A'$ 的位置,则点 $A'$ 表示的数是________.

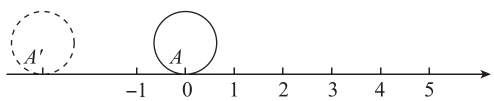


图 1-1

5. 规定 $[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数,如 $[2.6]=2$,$[-3.14]=-4$,若 $[x]=3$,则 $x$ 的取值范围是________.

6. 某中学老师为减轻学生们的负担,让他们做了一个游戏,老师提出问题:如果张华和李明分别代表不大于 5 的正整数 $m$、$n$,且 $\frac{n}{m}$ 是最简真分数,则形如 $-\frac{n}{m}$ 的不同有理数一共有________个.

7. 假设 $a$、$b$、$c$、$d$ 都是不等于 0 的数,对于四个数 $ac$、$-bd$、$-cd$、$-ab$,考察下述说法:

①这 4 个数全是正数;

②这 4 个数全是负数;

③这 4 个数中至少有一个为正数;

④这 4 个数中至少有一个为负数;

⑤这 4 个数的和必不为 0

其中正确说法的序号是________.(把你认为正确说法的序号都填上)

8. 在数轴上，点 $P$ 表示的数是 $a$，点 $P'$ 表示的数是 $\frac{1}{1-a}$，我们称点 $P'$ 是点 $P$ 的“相关点”，已知数轴上 $A_1$ 的相关点为 $A_2$，点 $A_2$ 的相关点为 $A_3$，点 $A_3$ 的相关点为 $A_4$，……，这样依次得到点 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_n$.若点 $A_1$ 在数轴表示的数是 $\frac{1}{2}$，则点 $A_{2022}$ 在数轴上表示的数是________.

9. 已知 $a<b$，且 $a$、$b$ 均为质数，$n$ 为奇数.$a$、$b$、$n$ 满足等式 $a+bn=487$，则 $a$、$b$、$n$ 分别等于________.

10. 已知 $a=\frac{11\times66+12\times67+13\times68+14\times69+15\times70}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$，则 $a$ 的整数部分是________.

## 二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. $a$、$b$ 两数在数轴上的位置如图 1-2 所示，若设 $M=a+b$，$N=-a+b$，$H=a-b$，$G=-a-b$.试判断 $M$、$N$、$G$、$H$ 的大小关系.

图 1-2

12. 计算：$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+\frac{1}{180}+\frac{1}{270}+\frac{1}{378}+\frac{1}{504}+\frac{1}{648}+\frac{1}{810}+\frac{1}{990}$.

13. 如图 1-3 所示，在数轴上，点 $A$ 表示 $-10$，点 $B$ 表示 11，点 $C$ 表示 18.动点 $P$ 从点 $A$ 出发，沿数轴正方向以每秒 2 个单位的速度匀速运动；同时，动点 $Q$ 从点 $C$ 出发，沿数轴负方向以每秒 1 个单位的速度匀速运动.设运动时间为 $t$ 秒.

(1) 当 $t$ 为何值时，$P$、$Q$ 两点相遇？相遇点 $M$ 所对应的数是多少？

(2) 在点 $Q$ 出发后到达点 $B$ 之前，求 $t$ 为何值时，点 $P$ 到点 $O$ 的距离与点 $Q$ 到点 $B$ 的距离相等.

(3) 在点 $P$ 向右运动的过程中，$N$ 是 $AP$ 的中点，在点 $P$ 到达点 $C$ 之前，求 $2CN-PC$ 的值.

图 1-3

14. 观察下列两个等式：$2-\frac{1}{3}=2\times\frac{1}{3}+1$，$5-\frac{2}{3}=5\times\frac{2}{3}+1$，给出定义如下：我们称使等式 $a-b=ab+1$ 成立的一对有理数 $a$ 和 $b$ 为“共生有理数对”，记为 $(a,b)$，如：数对 $\left(2,\frac{1}{3}\right)$，$\left(5,\frac{2}{3}\right)$，都是“共生有理数对”.

(1) 数对 $(-2,1)$，$\left(3,\frac{1}{2}\right)$ 中是“共生有理数对”的是________.

(2) 若 $(m,n)$ 是“共生有理数对”，则 $(-n,-m)$ ________“共生有理数对”（填“是”或“不是”）.

(3) 请再写出一对符合条件的“共生有理数对”为________.（注意：不能与题目中已有的“共生有理数对”重复）

(4) 若 $(a,3)$ 是“共生有理数对”，求 $a$ 的值.

15. 试比较 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ 与 2 的大小.

# 第 2 讲　绝对值

## 一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如果$|x-3|+5|2+y|=0$,那么 $2x+y$ 的值等于________.

2. 若 $x$ 是实数,则 $y=|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|+5|x-5|$ 的最小值为________.

3. 若不等式$|x-2|+|x+3|+|x-1|+|x+1|\geqslant a$ 对一切数 $x$ 都成立,则 $a$ 的取值范围是________.

4. 设$\overline{abcd}$是一个四位数,$a$、$b$、$c$、$d$ 是阿拉伯数字,且 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$,则式子$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$的最大值是________.

5. 若$|x+2|$与$|1-2y|$互为相反数,则 $x+y$ 的值为________.

6. 已知$|a-1|=9$,$|b+2|=6$,且 $a+b<0$,则 $a-b$ 的值为________.

7. 如果 $a$、$b$、$c$ 是非零有理数,且 $a+b+c=0$,那么$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$的所有可能的值为________.

8. 若 $a$、$b$、$c$ 为整数,且$|a-b|^{2019}+|c-a|^{2020}=1$,则$|a-b|+|b-c|+|c-a|$的值为________.

9. 已知实数 $a$、$b$ 满足$|a|=b$,$|ab|+ab=0$,化简$|a|+|-2b|-|3b-2a|$的结果为________.

10. 若$|x+\frac{1}{2}y-3|$与$|2x-4y-144|$互为相反数,则$\frac{10x+5y}{x-2y}$的值为________.

## 二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 如果有理数 $a$、$b$ 满足$|ab-2|+|1-b|=0$,试求:

(1) $a$、$b$ 的值.

(2) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+2020)(b+2020)}$的值.

12. 已知$(|x+1|+|x-2|)(|y-2)|+|y+1|)(|z-3|+|z+1|)=36$，求$2016x+2017y+2018z$ 的最大值和最小值.

13. 将 1，2，…，100 这 100 个正整数任意分成 50 组，每组两个数，现将每组的两个数中任一个数记为 $a$，另一个数记为 $b$，代入代数式$\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$中进行计算，求出其结果，50 组都代入后，可求得 50 个值，求这 50 个值的和的最大值.

14. 设 $n$ 个有理数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $|x_i|<1\,(i=1,2,\cdots,n)$，且 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+x_2+\cdots+x_n|$，求 $n$ 的最小值.

15. 有一正整数列 $1,2,3,\cdots,2n-1,2n$，现从中挑出 $n$ 个数，从大到小排列依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，另 $n$ 个数从小到大排列依次为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$.求$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$所有可能的值.