3.28 平稳随机过程 $X_c(t)$的相关函数为

$$R_{X_c}(\tau)=\mathrm{e}^{-4|\tau|}$$

若以间隔 20s 为周期对 $X_c(t)$采样得到随机序列 $X(n)$，求随机序列 $X(n)$的功率谱密度。

3.29 试证明最佳线性滤波器的传递函数为

$$H(\omega)=CS^*(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\Big|G_w(\omega)$$

其中，C 为常数，$S(\omega)$是输入信号的频谱（$*$ 表示共轭），$G_w(\omega)$是输入噪声功率谱密度，t_0 为信噪比最大的时刻。

3.30 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中信号

$$s(t)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{\alpha(t-T)} & (t\leqslant T)\\ 0 & (t>T)\end{cases}$$

为指数形式脉冲，$\alpha>0$，$w(t)$为平稳白噪声，且与 $s(t)$之间统计独立。试求匹配滤波器的传输函数 $H(\omega)$，并画出电路示意图。

3.31 分析单个射频脉冲信号的匹配滤波。信号 $s(t)$是矩形包络的射频脉冲，脉冲宽度为 τ，角频率为 ω_0，其表示式为 $s(t)=a\,\mathrm{rect}(t)\cos\omega_0 t$，其中

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1 & (0\leqslant t\leqslant\tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

求 $s(t)$的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

3.32 分析相参射频脉冲串信号的匹配滤波器。设信号 $s(t)$为

$$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}s_1(t-kT)$$

其中 $s_1(t)$是习题 3.31 所表示的单个射频脉冲信号，求 $s(t)$的匹配滤波器的传递函数、输出信号的波形、输出的信噪比，并画出匹配滤波器的实现框图。

3.33 设图 3.29 所示的 RC 低通滤波器的输入信号为 $X(t)=s(t)+w(t)$，其中，$w(t)$的功率谱密度为 $G_w(\omega)=N_0/2$，$-\infty<\omega<\infty$，$s(t)$为与 $w(t)$统计独立的矩形脉冲

$$s(t)=\begin{cases}A & (0\leqslant t\leqslant\tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

若定义 RC 低通滤波器的等效噪声频带 $\Delta f_e=\dfrac{1}{2}RC$，试求

（1）RC 低通滤波器输出信噪比的表达式；

（2）最佳等效噪声频带 $\Delta f_{e,\mathrm{opt}}$ 与 τ 为什么关系时，RC 低通滤波器输出端有最大信噪比？

3.34 设线性滤波器的输入为 $X(t)=s(t)+w(t)$，已知 $s(t)$与 $w(t)$之间统计独立，且

$$s(t)=\begin{cases}A & (0\leqslant t\leqslant \tau)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

$w(t)$是平稳噪声,其功率谱为

$$G_w(\omega)=\frac{2\alpha\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}\quad(-\infty<\omega<\infty)$$

试求输出信噪比最大的最佳线性滤波器的传输函数。

3.35 设信号 $s(t)=1-\cos\omega_0 t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega_0)$,噪声的物理谱 $F_w(\omega)=N_0\ (0<\omega<\infty)$,且与信号统计独立,试设计匹配滤波器:

(1) 求传输函数和冲激响应;

(2) 求输出波形;

(3) 画出匹配滤波器的结构方框图;

(4) 若噪声功率谱为 $G_w(\omega)=\omega_1^2/(\omega^2+\omega_1^2)\ (-\infty<\omega<\infty)$,其中 ω_1 为常数,试求输出信噪比最大的线性滤波器的传输函数和冲激响应。

计算机作业

3.36 模拟产生一个功率谱为 $G_X(\omega)=1/(1.25+\cos\omega)$的正态随机序列,画出随机序列的波形。

3.37 图 3.14 是用 MATLAB 的 Simulink 模拟白噪声通过例 3.3 的 RC 电路,用示波器观察输入和输出的波形,改变 RC 的值,使电路时常数改变,观察输出波形的变化。

研讨题

3.38 在雷达信号处理中,杂波的对消非常重要,用杂波衰减因子来描述杂波对消的效果,它的定义为 $\mathrm{CA}=C_{\mathrm{i}}/C_{\mathrm{o}}$,其中 C_{i} 表示杂波对消器的输入杂波功率,C_{o} 表示杂波对消器的输出杂波功率。图 2.36 描述的就是一种最简单的二脉冲杂波对消器,假定进入到二脉冲对消器的杂波功率谱密度为 $G_X(f)=\dfrac{P_{\mathrm{c}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{c}}}\exp\left(-\dfrac{f^2}{2\sigma_{\mathrm{c}}^2}\right)$,$P_{\mathrm{c}}$ 为输入杂波的功率,求二脉冲对消器的杂波衰减因子。(提示:对正弦函数可以采用近似计算:对于小的 x,$\sin x\approx x$,在实际中通常有 $fT\ll 1$)

3.39 设有图 3.29 所示 RC 低通滤波器,输入 $X(t)=s(t)+w(t)$,$s(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$,其中 a,ω_0 是已知常数,Φ 是在$(0,2\pi)$上均匀分布的随机变量,$w(t)$是功率谱密度为 $N_0/2$ 的白噪声,且与 $s(t)$统计独立。

(1) 求输出 $Y(t)$的自相关函数;

(2) 如果定义输出的信噪比(SNR)为输出信号的平均功率与输出噪声的平均功率之比,求输出信噪比 SNR 的表达式;

(3) RC 应该如何选择可使输出信噪比达到最大?

3.40　在3.7.1节中介绍了频谱法模拟有色高斯随机过程的方法，请根据例3.18给出的要求，编写模拟有色高斯过程的MATLAB程序，并画出模拟产生的高斯随机过程的一个样本函数。

3.41　在3.7.2节中介绍了时域滤波法模拟有色高斯随机过程的方法，请根据例3.19给出的要求，按照双线性变换法设计相应的数字滤波器，编写模拟有色高斯过程的MATLAB程序，并画出模拟产生的高斯随机过程的一个样本函数。

3.42　设有图3.37所示系统。

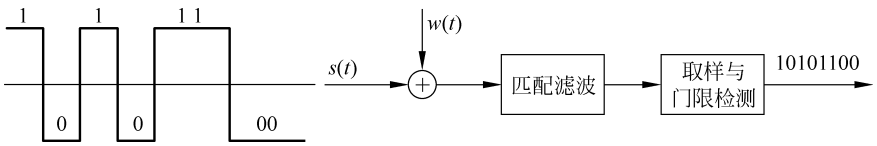

图3.37　匹配滤波器在二元PAM信号传输中的应用

假定信号为脉冲幅度调制(PAM)信号，$s(t)=\sum_{k=0}^{M-1}A_k p(t-kt_s)$，$A_k$ 等概率取+1和−1两个值，$t_s=1$，信号在信道中传输会受到加性高斯白噪声的污染，在接收端每一个脉冲要判断发射的是“1”还是“0”。

(1) 画出信号、信号加噪声的波形；

(2) 对匹配滤波器输出信号，每隔 t_s 秒进行取样(在每个脉冲结尾时刻取样)，取样值与一门限值(自行确定)进行比较，超过门限判“1”，低于门限判“0”，画出匹配滤波器输出的波形，并标出取样值。

(3) 产生10000个二进制数字(随机产生)，统计输出端检测的误码率。

实验

实验3.1　典型时间序列模型分析

通过本实验熟悉几种常用的时间序列，实验内容如下。

1. 设有AR(1)模型：

$$X(n)=-0.8X(n-1)+W(n)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声，方差为4。

(1) 用MATLAB模拟产生 $X(n)$的500观测点的样本函数，并绘出波形；

(2) 用产生的500个观测点估计 $X(n)$的均值和方差；

(3) 画出 $X(n)$的理论的自相关函数和功率谱；

(4) 估计 $X(n)$的自相关函数和功率谱。

2. 设有AR(2)模型：

$$X(n)=-0.3X(n-1)-0.5X(n-2)+W(n)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声，方差为4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 观测点的样本函数,并绘出波形;

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;

(3) 画出理论的功率谱;

(4) 估计 $X(n)$的相关函数和功率谱。

3. 设有 ARMA(2,2)模型:

$$X(n)+0.3X(n-1)-0.2X(n-2)=W(n)+0.5W(n-1)-0.2W(n-2)$$

$W(n)$是零均值正态白噪声,方差为 4。

(1) 用 MATLAB 模拟产生 $X(n)$的 500 观测点的样本函数,并绘出波形;

(2) 用产生的 500 个观测点估计 $X(n)$的均值和方差;

(3) 画出理论的功率谱;

(4) 估计 $X(n)$的相关函数和功率谱。

实验 3.2 随机过程通过线性系统分析

3.6.2 节介绍了随机过程的正态化问题,任意分布的白噪声通过线性系统后输出是服从正态分布的;宽带噪声通过窄带系统,输出近似服从正态分布,本实验的目的就是要验证以上结论。

实验内容如下。

假定滤波器为图 3.7 给出的 *RC* 电路(低通滤波器)。

(1) 将低通滤波器转化成数字低通滤波器;

(2) 产生一组均匀分布的白噪声序列,让这组白噪声序列通过数字低通滤波器,画出输出序列的直方图,并与输出的理论分布进行比较;

(3) 产生一组拉普拉斯分布的白噪声序列,让这组白噪声序列通过数字低通滤波器,画出输出序列的直方图,并与输出的理论分布进行比较;

(4) 改变滤波器的参数(电路 *RC* 值),重做(1)~(3),并与前一次的结果进行比较。