第 1 章　概　　论

1.1　动力学系统及模型

1.1.1　动力学系统

动力学是研究物体运动的变化与作用于物体上的载荷之间相互关系的学说，它主要描述物体运动的变化与引起运动变化的诸力之间的关系。可变形体、运动物体、机器装备及其零部件，以及人体等，都属于动力学研究范畴。可变形体及运动物体可看作是诸多部分或单元构成，是一个系统。因此，动力学是研究系统状态变化规律的学科。

“系统”是指由各个部分组成的相互关联的整体。一般地，系统的含义非常广泛，大至宇宙，小至质点运动，具体对象可能是固体的、流体的或流固耦合的，也可能是机电耦合的系统。也就是说，系统可大可小，主要是根据研究对象的不同。例如，机械系统可因所研究的任务称为单一机构（由构件经运动副连接组成的机构）、某个机器（由原动机、传动机构和执行机构以及控制装置组成）。从理论上分析，系统可以理解为通过物理边界或者概念边界从其他事物（系统环境）中分离出来的一个实体。例如，一个人体可看作系统，人体受到身体所处环境的影响并与之相互交换能量（如热能）和信息，这种情况下边界是物理的或空间上的。

现代工程装备往往含有一些机构，包括传动和执行部分。它们的质量大或转动惯量大，在运行过程中，动力学问题突出或者动力学设计很重要。图 1-1 为电梯的主要部件示意图。该类电梯包括限位开关 1、曳引机 2、轿厢 3 和对重装置 4、对重导轨 5、缓冲装置 6、轿厢导轨 7、控制箱 8，以及导向系统、安全防护系统等。曳引机可分为电动机、制动器、减速器、曳引轮等部件。对于曳引系统采用简易计算公式或静态计算曳引机驱动转矩和功率会带来误差，需要用到系统动力学理论，考虑曳引机各旋转件的转动惯量，建立曳引机等效动力学模型，并按照预定轿厢速度或运行规律进行动力学仿真分析，得出曳引机所需驱动力矩和功率变化曲线，最终确定曳引机的额定功率大小，从而为曳引机驱动转矩及功率的精确计算提供科学依据。另外，电梯在运行、启动、停车等状态下，动力学特性和动态载荷均呈现明显不同，必须进行动载计算和动态控制设计。这些都是动力学系统建模设计及控制所要关注的问题。

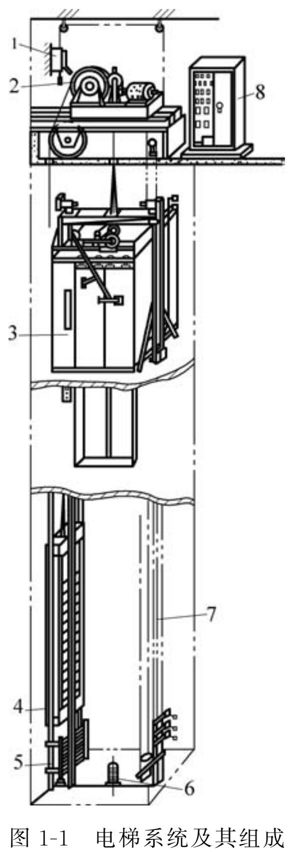

图 1-1　电梯系统及其组成

1—限位开关；2—曳引机；3—轿厢；4—对重装置；5—对重导轨；6—缓冲装置；7—轿厢导轨；8—控制箱

另外，在大量的工程建设装备(如挖掘机械、铲土运输机械、起重运输机械、桩工机械、压实机械、公路路面机械和铁路线路机械、凿岩机械和风动机械、钢筋混凝土机械等)中，各个组成子系统都可能包含较为大型的动力装置、传动装置、工作装置等，在工作过程或启停瞬间，动力学问题十分突出。

由于系统与周围“环境”之间会有相互作用。在动力学领域，将外界激励称为输入，一般是指系统受到的外来影响和干扰，将系统对外界激励的反应称为响应或输出。不同的激励往往会有对应的响应出现，如驾驶员操作汽车时，有加大油门、转动方向盘和刹车等激励方式，相应的响应有汽车加速、汽车转向和制动等；同时，路面不平也会对汽车产生激励，汽车的响应则是上下颠簸或振动，这就说明，系统有其固有属性，我们可以通过建模分析，找到输入和输出之间的某种特定关系或传递函数。但是，寻找特定关系往往是十分复杂的，因为系统内部的网状结构映射到各组成部分是一门技术性很强的工作，分析问题时，要从整个系统的运行或动态工况出发，而不是在组成部分的静态层面上考虑问题，必须将动力学行为作为整体来考虑，即动力学的系统建模和总体方案设计十分重要。

描述系统状态的方法和参数多种多样。例如，可用运动参数(位移、速度、加速度)、构件受力参数或功率参数(输出功率、效率)来描述；有些电系统可用输出的电流、电压来描述；化学反应系统可用其反应速度、反应生成物的质与量来描述。

系统的状态变化也遵循一定的规律。因为系统的状态是由系统固有的特征参数和外界条件所决定的，如机器系统的运动状态、受力状态与其几何参数、结构设计、构件的质量(惯量)、原动力、工作对象以及外界条件密切相关。一般的运动学分析是以主动件的位置为自变量，分析系统运动，运动学设计可从几何概念上提供实现这种运动的可能性；动力学分析结果是系统在时间域中的状态，因此能否真正实现预期的运动或在运行过程中会发生什么问题，以及能否保证系统正常工作等都有赖于动力学分析与设计。

1.1.2　系统模型

对实际的动力学系统研究中，核心是对系统模型的认识。系统模型是通过简化和抽象得到的一种用来预测系统行为的结构。可以说建模(modeling)就是把系统的本质信息减缩成有用的描述方式的过程，这种描述方式称之为系统的模型(model)。

随着科学技术的发展，建立的模型有多种形式，如下所述。

(1) 经验(直觉)模型。依靠人对于系统的直观感觉或实践经验，如发电系统的运行工况，用一探棒触及轴承座来判断系统的运行状态，凭借经验提取系统的本质信息，这种经验模型的应用，其实是一个专家系统在工作。

(2) 图表模型。如将发电系统轴承座的振动有效值随时间的变化记录并绘制图表，用来描述发电系统的运行状态。

(3) 试验模型。这是一种物理形式的模型，直接由试验所得到的数据来描述系统的特征，可以将真实的结构按相似准则做成实验室试验的模型，也可以是结构在线试验。

图 1-2　测试实验模型

在工程中，有些缩放模型曾得到广泛使用。例如，飞机风洞模型(见图 1-2)、实验水池中的船体模型、城市工程中的建筑模型、光弹性应力分析中金属部件的塑料模型，以及电路设计中的试验板

模型。由于模型和实际系统的差异，这些模型只能体现真实系统的部分特性。例如，在飞机风洞模型中，简化了飞机内部的色彩、座位布局等，做了如下的假设：真实飞机中的某些因素对飞机的空气动力学并不重要，系统模型中只包含对真实系统当前研究内容有重要影响的因素。

(4) 数学模型。这是用数学形式来反映实际系统的特性，例如，发电机转子的振动可用二阶线性常微分方程组描述，机器人手臂的运动可用非线性偏微分方程描述，某个航天结构的振动可用有限元计算模型描述等。

数学模型与物理模型相比，可能更为抽象或一般，它可以用来预测系统在特定输入下的某种响应等。另外，伴随计算机技术的发展，数学模型和试验模型综合，计算机辅助试验(computer aided test，CAT)和计算机-试验辅助综合建模在不少领域得到研究、开发。

由于系统的动力学模型是根据系统本身的结构和进行动力学研究的目的而确定的。系统的组成不同，则动力学模型也不同。同一种系统用于不同目的的分析，模型也可能不同。所以动力学模型的复杂程度也随上述两方面因素而异，从最简单的单质量系统到包含几十甚至上千质量和参数的系统。一个系统往往是由不同性质的元件组成的。在建立系统模型时，首先要对这些元件进行力学简化。需要特别注意，由于这种简化过程的存在，事实上没有任何复杂系统可以被完全精确地建模，任何一个可靠系统的设计，设计人员都必须要经历建立各种复杂程度模型的过程，以此来寻找解决问题的最简化模型。

1.1.3　动态分析、系统辨识

一般地，在研究一个系统的动力学问题时，总是给系统施加一个输入信号，观察和检测其输出信号，来辨明系统的特性。在此将系统输入信号称为激励，把系统在激励作用下的动态行为即输出信号称为响应。这里的输入信号和输出信号，是在系统之间连接通道中“流动”着的物理变量，它是一个“动态”量。图 1-3 为一个车辆传动系统。

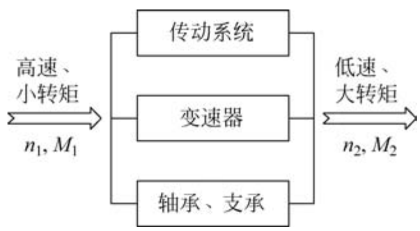

图 1-3　车辆传动系统

M_1 是动力源(发动机)输入给传动系统的转矩，M_2 是经过系统后输出给执行系统驱动车轮的输出转矩。输入转矩 M_1 较小，而输出转矩 M_2 较大，故转矩 M 经过传动系统后由小变大，是一个动态量，转矩 M 为信号。由于发动机输入转速 n_1 较高，而经过传动系统后输出给车轮转速 n_2 较低，是一个动态量，转速 n 也是一个信号。

由此可见，动力学研究往往关注激励、系统、响应三者关系的问题。

(1) 已知激励和系统求响应。称为系统动力响应分析，又称动态分析。主要任务是计算和校核系统或结构的强度、刚度、允许的振动能量水平。动力响应包括位移、速度、加速度、应力和应变等。上述工作也属于正向动力学求解。

(2) 已知激励和响应，求系统。称为系统辨识，即求系统的数学模型及其结构参数。主要是获得系统的物理参数(如质量、刚度及阻尼等)，以便了解系统的固有特性(如固有频率、主振型等)。这类问题的研究需要辅以测试、试验等技术手段。

(3) 已知系统和响应，求激励。如飞机在飞行过程中，通过检测飞行的动态响应，来预测飞机处于一种什么样的随机激励环境之中。再如，通过实测记录车辆的振动或产品的振

动，分析求解激励，了解运输过程的振动环境，以及对产品产生怎样的激励，为减振包装提供依据，避免产品在运输过程当中的损坏。这些工作也称为环境预测。

系统的激励信号可分成为确定性和随机性两大类。确定性激励（信号）特性，系统的激励是时间的确定性函数，如正弦与余弦函数激励、脉冲函数激励等。如果系统的质量、弹性和阻尼以及激励都是确定性的，则系统可用确定性的微分方程来表示，当初始条件已知时，就可求出系统之后的运动状态，这种情况称为确定性现象。随机性激励（信号）特性，系统的激励是时间的非确定性函数，不能用解析式或表达式给出，但具有一定的统计规律，必须用随机过程来表示。所对应的微分方程为随机微分方程，不能实际表示出来。例如，汽车在道路上行驶时，路面高低凹凸不平给予汽车的激励，就可看成是随机的。

另外，在动力学研究中，振动是普遍存在的重要问题，有许多因素可能引起振动，包括惯性力的不平衡、外载变化以及系统参数变化等。消除振动的方法可以用平衡的方法、改进机械本身结构或用主动控制的方法等。要确定系统的固有频率，预防共振的发生，计算系统的动力响应，以确定机械或结构受到的动载荷或振动的能量水平，还要研究平衡、隔振和消振方法，进行振动诊断，分析事故产生原因及有效地加以控制。

1.1.4　系统的自由度与广义坐标

1. 自由度

自由度（degree of freedom）是决定物体位置所需要的最少的独立坐标数。通常，对于空间质点，决定其位置需要 3 个独立坐标，其自由度为 3，一个刚体在空间运动需要 3 个平动、3 个转动，共 6 个独立坐标，其自由度为 6；对于像弹性体、塑性体、流体等变形连续体，它们由无限多个质点组成，决定其运动位置需有无限多个坐标，故其自由度数为无限多。对于一个机构系统，其具有确定运动时所必须给定的独立运动参数的数目，称为机构自由度（degree of freedom of mechanism），其数目常以 F 表示。机构自由度又有平面机构自由度和空间机构自由度，均可以用公式进行准确计算，得出自由度数。

在机构设计中，为了使机构的位置得以确定，必须确定机构自由度，也即给定独立的广义坐标的数目。如果一个构件组合体的自由度 $F>0$，就可以成为一个机构，即表明各构件间可有相对运动；如果 $F=0$，则它将是一个结构（structure），即已退化为一个构件。

2. 约束条件

与自由度或广义坐标对应的是约束的概念。物体运动时，会受到运动条件的限制。使物体的位置或速度受到限制的条件称为约束条件（constrained condition）。例如，常见的单摆系统，其受到固定铰支点约束只能绕支点做圆弧运动等。

在动力学中，非自由质点系就是质点系中各质点的运动受到某种限制。约束就是对质点系中各质点运动的限制。约束条件的数学表达式称为约束方程（constraint equation）。相应地，限制质点系中各质点位置的约束称为几何约束。限制质点系中各质点速度的约束称为运动约束。

约束还可以详细分类，如定常约束（约束条件不随时间而改变的约束，steady constraint）、非定常约束（约束条件随时间而改变的约束，unsteady constraint），以及双面约束、单面约束、完整约束、非完整约束等。系统受到约束条件时的自由度数，等于该系统无约束时的自由度数减去约束条件后所得的差，例如，对于由 n 个质量组成的系统，如有 r 个约束条件，则其

自由度数为 $N=3n-r$。

3. 广义坐标

广义坐标(generalized coordinates)是指能完整地表示系统运动的坐标。广义坐标是独立的坐标,通常广义坐标数等于自由度数。例如,单摆可看作是一个质点的运动,它又有两个约束条件,故其自由度数为 $N=3-2=1$,可用一个广义坐标来表示。如图 1-4 所示双摆,它只能在平面(xOy)内摆动,因此 $z_1=0$,$z_2=0$,杆长 l_1、l_2 不变,杆端的质量分别为 m_1、m_2,在不考虑杆自重情况下可看作两个质点的运动,其约束条件有 4 个:

$$z_1=0 \text{ 和 } x_1^2+y_1^2=l_1^2;\quad z_2=0 \text{ 和 } x_2^2+y_2^2=l_2^2$$

故自由度数为 $N=2\times3-4=2$,因此,可用两个广义坐标(φ_1、φ_2)表示。

1.1.5　广义速度、广义加速度

在图 1-5 所示的曲柄滑块机构中,系统是由曲柄 OA、连杆 AB 及滑块三个刚体组成的受约束系统,描述该系统的位形只需一个曲柄 OA 相对水平轴的转角(可定义为角位移)就可以了,即只要确定特定的转角值,系统的位形就完全确定了。

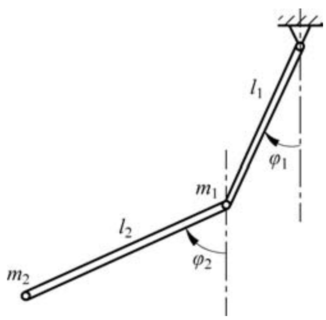

图 1-4　双摆的运动

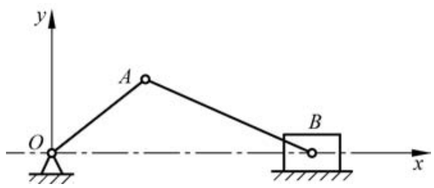

图 1-5　曲柄滑块机构

广义坐标确定了质点系的位形,所以质点系中各质点的矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 可以用广义坐标唯一确定。进一步推广到三维点,即按照质点系动力学分析,广义坐标(q_k)对时间 t 的导数为广义速度。系统质点的速度矢量可根据下式求得,即

$$\boldsymbol{v}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{1-1}$$

或者写成直角坐标形式:

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\sum\limits_{k=1}^{s}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\\ \dot{y}_i=\sum\limits_{k=1}^{s}\dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial y_i}{\partial t}\\ \dot{z}_i=\sum\limits_{k=1}^{s}\dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\dfrac{\partial z_i}{\partial t}\end{cases} \tag{1-2}$$

在稳定约束下,速度矢量将是广义速度的线性齐次式(因矢径 $\boldsymbol{r}_i$ 与时间参数 t 无关)。

$$\boldsymbol{v}_i=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{1-3}$$

或写成直角坐标形式：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ \dot{y}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ \dot{z}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \end{cases} \tag{1-4}$$

由式(1-3)和式(1-4)可见，任一点的速度是其广义速度的线性函数。广义坐标对时间 t 的两次导数称为广义加速变。系统中点的加速度写成：

$$\boldsymbol{a}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l\dot{q}_k + 2\sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial t}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t^2} \tag{1-5}$$

或写成直角坐标形式：

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \sum\limits_{l=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l\dot{q}_k + 2\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial t}\dot{q}_k + \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \\ \ddot{y}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial y_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \sum\limits_{l=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial^2 y_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l\dot{q}_k + 2\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial^2 y_i}{\partial q_k \partial t}\dot{q}_k + \dfrac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} \\ \ddot{z}_i = \sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial z_i}{\partial q_k}\ddot{q}_k + \sum\limits_{l=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial^2 z_i}{\partial q_l \partial q_k}\dot{q}_l\dot{q}_k + 2\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{\partial^2 z_i}{\partial q_k \partial t}\dot{q}_k + \dfrac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} \end{cases} \tag{1-6}$$

如果约束是稳定的，则在上两式中对 t 的偏导数项消失。

1.1.6　系统的功和能

若以 $\boldsymbol{r}$ 表示一个质点的位置矢量，对于质量为 m 的质点施加力 $\boldsymbol{F}$，使之移动 $\mathrm{d}r$ 距离，这时矢量的标量积称为力所做的功。图 1-6 所示是力 $\boldsymbol{F}$ 将质点从 A 移到 B，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功可表示为

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1-7}$$

若设质点的速度为 x，则

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{1-8}$$

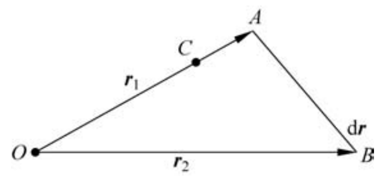

图 1-6　质点的移动

称为系统的动能。

把质点从任意点 C 移到选定的基准点 O 时系统力所做的功定义为势能。

$$U = \int_C^O \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1-9}$$

动能和势能统称为物体的机械能。另外，若力所做的功仅取决于该质点的位置，而与质点的路程无关，这种力称为保守力(conservative force)，如弹簧力、万有引力、重力、电磁力等都是保守力，仅由保守力组成的系统称为保守系统。在保守系统中，动能和势能之和是常量，称为机械能守恒定律。机械系统中有能量损失的力称为非保守力，如阻尼力、摩擦力等都是非保守力。

1.2　系统的动态特性与简化

1.2.1　线性系统、非线性系统

按照数学模型是否线性，可分成为线性系统与非线性系统。所谓线性系统是指能用线性微分方程所表示的系统。例如，当系统质量不随运动参数而变化，并且系统弹性力和阻尼力可以简化为线性时，可用线性方程来表示，如：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \tag{1-10}$$

是二阶齐次线性方程。凡不能简化为线性系统的动力学系统都称为非线性系统，如：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k(x+x^3)=0 \tag{1-11}$$

线性系统能够满足叠加原理。对于同时作用于系统的两个不同的输入，所产生的输出是这两个输入单独作用于系统所产生的输出之和。根据系统是否满足叠加原理可推断该系统是否是线性系统。但在工程实际中，严格的线性系统是不存在的。只有在小位移或小变形的情况下才可简化为线性系统，否则将成为非线性系统。例如图 1-7 所示的单摆系统。

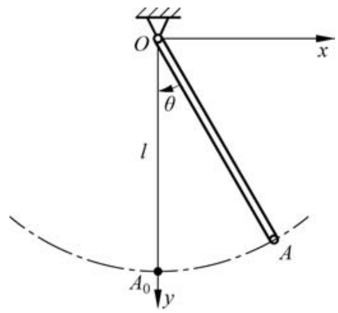

图 1-7　单摆系统

对于质量为 m、长度为 l 的单摆系统，设摆角为 θ，其运动微分方程可写为

$$ml^2\ddot{\theta}=-mgl\sin\theta \tag{1-12}$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0 \tag{1-13}$$

式(1-13)是非线性方程。在 $\sin\theta$ 作级数近似时，有

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots \tag{1-14}$$

代入式(1-13)，则

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)=0 \tag{1-15}$$

而当摆动微小时，即 $|\theta|\ll 1$ 时，$\sin\theta\approx\theta$，方程变为如下线性方程

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0 \tag{1-16}$$

这是非线性方程的线性化处理。

系统中的构件都具有一定的弹性和质量，而当组成系统的各构件弹性变形很小时，可视为刚体，只考虑构件的质量；而当弹性变形不能忽略时，就必须加以考虑。另外可以将具有集中参数元件所组成的系统称为离散系统；将由分布参数元件组成的系统称为连续系统。这里的参数元件是指系统的质量、系统的弹簧或系统的阻尼器等。

对于简支梁系统，当研究梁在垂直平面内的振动时，若只考虑梁作为一个整体而振动且简化点取在梁的中点处时，则梁有总体质量和纵向方向的变形，可简化为具有质量和刚度集

中参数元件的系统，即用离散系统来研究和分析。而要研究每点的振动特性时，由于梁具有分布的空间质量和每点都有不同的变形，可作为连续系统模型来处理。

按照自由度数来分，连续系统弹性体振动，它是一个无限多自由度的振动系统，与之相对应的还有单自由度系统、有限多自由度系统。

系统的动态特性分析很重要，对于振动规律，有周期性振动、非周期振动。按对系统的激励类型分类，有自由振动（在初始干扰下产生的振动）、强迫振动（在外力作用下的振动）、自激振动（在系统的输入和输出之间具有反馈特性，并有能源补充而产生的振动）。

1.2.2　系统的元件简化

系统动力学模型的建立要根据系统本身的结构和进行动力学研究的目的而确定。同一种系统结构用于不同目的的分析，模型也可能不同。这也会导致动力学模型的复杂程度往往差异很大。建立模型的重要工作是做一些合理的简化处理。

1. 刚性构件的简化

刚性构件在系统中可能作移动、绕固定轴转动或一般运动（既有转动，又有移动），可分别简化成图 1-8 所示模型。

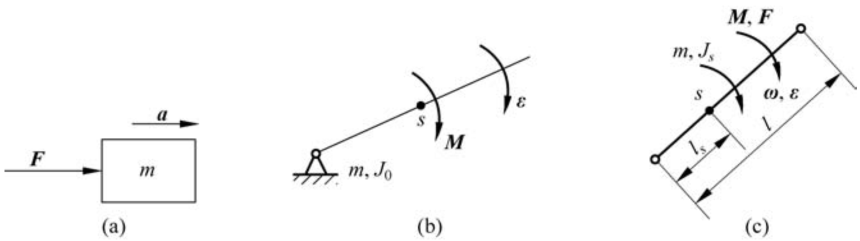

图 1-8　刚性构件模型

图 1-8(a)中：m 为集中质量；$\boldsymbol{F}$ 为作用于其上的外力；$\boldsymbol{a}$ 为在外力作用下，质量的运动状态发生变化产生的加速度。图 1-8(b)中：s 为绕固定轴旋转构件的质心；$\boldsymbol{M}$ 为作用其上的外力矩；$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为转动的角加速度；J_0 为转动惯量。图 1-8(c)中：J_s 为转动惯量，l 为构件长度，s 为质心位置，ω 为构件角速度。

2. 弹性元件

弹性元件的模型简化，主要是处理弹性元件的质量及刚度的分布。

（1）弹性元件的简化。对于系统中常见的弹簧之类的元件，由于其质量与其他构件相比很小，可视为无质量的弹性元件（见图 1-9(a)）。弹簧力与位移有线性关系或非线性关系性质的表达方式，可根据材料或弹簧结构确定。在扭转振动中，扭转振动产生的广义力为扭矩，广义位移为角位移。如果弹性元件质量较大，或者弹簧是系统的传动或执行元件，可把质量和弹性均看成连续的系统。在工程实际中，元件的形状或连接状态比较复杂，需要导出函数，有时要结合测试试验数据。

（2）对于弹性轴类（见图 1-9(b)），简化成多个集中质量（见图 1-9(c)、(d)），即将连续的弹性元件简化成为离散集中质量系统。这些质量之间以无质量的弹性段相连接。一般说来离散数目多，精确度就高，但太多的离散质量有可能由于计算的舍入误差而降低精度。同时也要考虑，动力学方程易于求解。

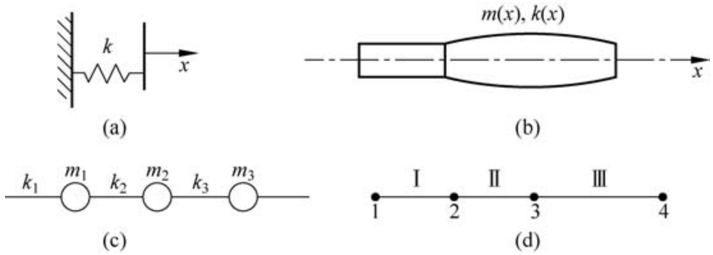

图 1-9　弹性元件模型

3．有限元模型

有限元的方法是处理连续系统的有效手段。随着计算机的普遍应用，可用它来分析各种不同的系统，如流体、温度场，甚至人体组织结构的分析。这种方法的基本思想是将一连续系统，分成若干单元，各单元通过节点相联结。在单元内部仍是一个连续体。单元内各点状态之间的关系用函数来表示。这样既把系统看成了连续系统，又可降低系统的自由度。

另外，对于阻尼的处理可分为黏滞阻尼、干摩擦阻尼、固体阻尼，其特征均是在系统运动中产生能量消耗。存在于弹性元件材料内部的阻尼是由于材料的黏性引起的，属于固体阻尼或内阻尼。材料的化学成分、应力的形式与大小、应力变化的频率以及温度都影响固体阻尼。

在建立系统的模型时，同一个构件可能有不同的处理方法。要根据组成元件的性质、系统运行的速度和所要解决的问题确定采用哪一种模型。例如，离心机、鼓风机等旋转机械，当它的运行速度不高，且轴间跨距不大时，可简化成刚性系统。当轴的长度比直径大得多，且运行速度较高时，轴的横向变形不可忽略，则可简化成离散质量系统。在需要研究轴承特性对系统的影响时，则应将轴承的力学特性引入动力学模型，如图 1-10 所示。

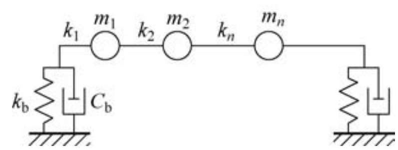

图 1-10　含弹性支承模型

如果整个机械安装在比较软的基础上，或要考虑基础对机械运行状态的影响时，还可建立如图 1-11 所示的动力学模型。

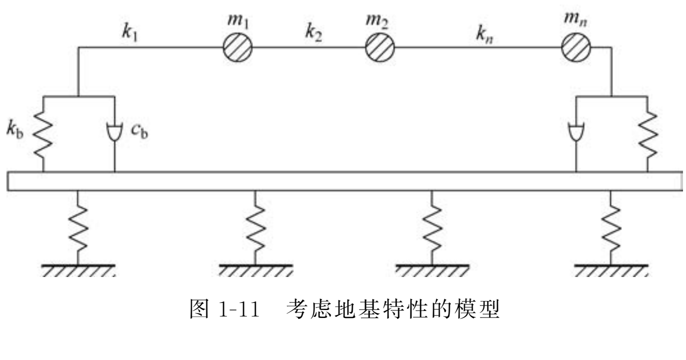

图 1-11　考虑地基特性的模型

总之，在满足要求的条件下，应尽可能将其模型简单化，以便于研究、分析计算。

1.3　系统动力学研究方法与过程

1.3.1　动力学方程及解法求解

从15世纪中叶到18世纪，近代物理学等的发展为机械动力学研究奠定了很好的基础，如牛顿(1643—1727)、欧拉(1707—1783)、达朗贝尔(1717—1783)和拉格朗日(1736—1813)等人做出了非常重要的工作。现代科学技术的全面进步推动动力学研究的工程应用，特别是信息论、控制论和系统论的研究成果，对动力学的发展产生极其深刻的影响，20世纪60年代以来，计算机技术的应用为动力学分析和设计提供有效的计算仿真等手段，另外，数学方法的成果运用也十分重要，如数值计算方法、矩阵特征值问题的求解方法和微分方程组的数值积分求解方法等极大地提高了多自由度动力学问题的求解能力。

1.3.2　动力振动模式及描述

振动是在一定条件下，振动体在其平衡位置附近所作的往复性机械运动。简单的振动如简谐振动，其振动量(振动的位移、振动速度和振动加速度)是时间的正弦或余弦函数。简谐振动是周期振动中简单且基本的振动形式，是分析和处理较为复杂的振动信号的基础。简谐振动常用三角函数、旋转矢量和复数表示法。在振动的数学表达式中，包含的关键参数有振幅(表示物体离开平衡位置的最大距离)、频率(表示单位时间的振动次数，其每秒振动次数称为赫兹，单位时间振动的弧度称为角频率或圆频率)、相位角(表示振动物体的初始位置等)。通过振动方程可以绘制出振动响应时间关系图，分析运动周期(从某一瞬时运动状态起再回复到该状态所经过的时间)和位移等参数变化情况。对简谐振动，对位移求一阶、二阶导数即得简谐振动的速度和加速度表达式。一般地，若位移是简谐函数，则速度、加速度也是简谐函数。速度的相位比位移超前$\pi/2$，加速度比位移超前π。加速度与位移的关系表明，简谐振动的加速度与位移恒成正比，但方向相反，加速度始终指向平衡位置。

实际问题中更多的是非简谐振动，它可看作是一系列简谐振动的函数之和。根据傅里叶级数理论，需要满足以下条件：

(1) 函数在一个周期内连续或者只有有限个间断点，而且在间断点上函数的左右极限存在；

(2) 在一个周期内只有有限个极大或极小值。

任何一个周期函数可以展开为一系列简谐函数级数之和。这个级数系列称为傅里叶级数。此分析方法称为谐波分析法，在振动理论中应用谐波分析可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加。

1.3.3　解决系统动力学问题的一般过程

解决动力学问题要有理论研究方法，将研究对象简化为数学或物理模型，再对模型进行分析研究，从而得出具有普遍性的结论，并且要有实验研究方法相结合，作为以后分析和改进实际机械的依据。实验研究方法是在一定的工作条件(工况)下，用特定的仪器对样机、机器或缩尺模型进行测量，利用测量结果分析机器设计时采用的假设和方案是否合理，找出机器中的薄弱环节和设计上不合理的地方，作为改进机械结构的依据。一般来说，解决机械动