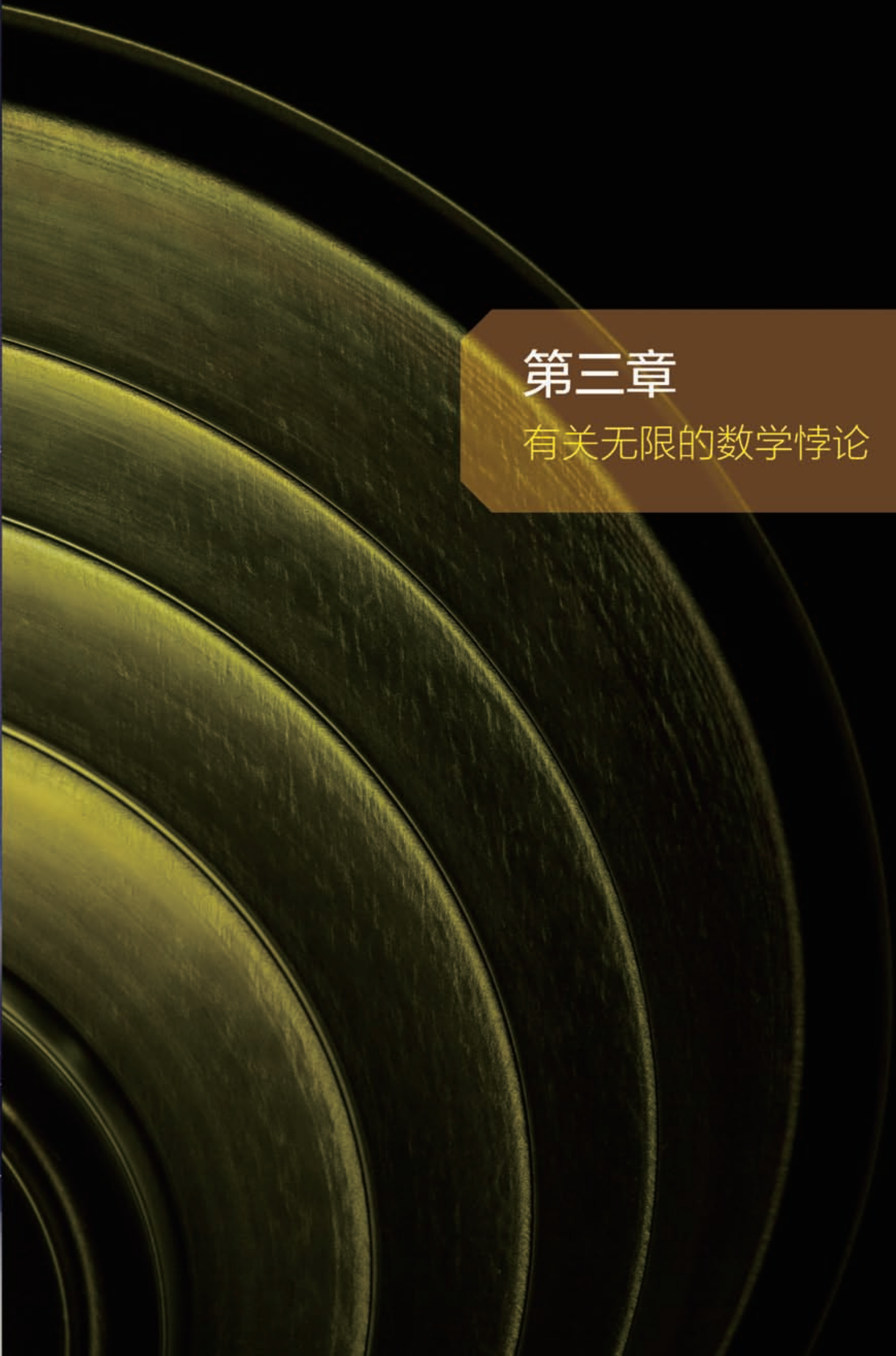

第三章

有关无限的数学悖论

牛顿宇宙学中的三个经典佯谬都和宇宙“无限”的概念联系起来。实际上，“无限”包括无限大和无限小，都是数学家和逻辑学家喜欢玩的游戏，并不一定对应任何实际生活中的物理实在。不过，因为理论物理与数学的关系太密切，“无穷”这个“鬼”，已经随着数学大摇大摆地进入到物理学的地盘，使得物理学家们不得不重视和研究它。据说著名数学家希尔伯特曾经说过一句警句式的名言：“尽管数学需要无穷大，但它在实际的物理宇宙中却没有立足之地。”那么，数学家们是如何理解“无穷”的？下面几节中将从介绍几个数学和逻辑中与“无穷”有关的典型佯谬开始。本章只有有趣的数学思想，并无公式，不感兴趣的读者可以直接阅读第四章。

1.
悖论、佯谬知多少

佯谬和悖论在英语中是同一个词：paradox，而在中文中这两个词的意思稍有不同，笔者喜欢中文中这两个词的微妙区别，用它表明物理佯谬与数学悖论之不同恰到好处，尽管许多时候这两个词被人们交叉使用。

中文中的“悖论”，一般指因为数学定义不完善，或逻辑推理的漏洞而导出了互为矛盾的结果。比如著名的“理发师悖论”。传说有一个理发师，将他的顾客集合定义为城中所有“不给自己理发之人”。但某一天，当他想给自己理发时却发现他的“顾客”定义是自相矛盾的。因为如果他不给自己理发，他自己就属于“顾客”，就应该给自己理发；但如果他给自己理发，他自己就不属于“顾客”了，但他给自己理了发，又是顾客，到底自己算不算顾客？该不该给自己理发？这逻辑似乎怎么也理不清楚，由此而构成了“悖论”。

理发师悖论实际上等同于罗素悖论。英国哲学家及数学家伯特兰·阿瑟·威廉·罗素（Bertrand William Russell，1872—1970）提出的这个悖论当时在数学界引起轩然大波，或者称之为引发了第三次数学危机，因为那时的数学家们正在庆幸G. 康托（G. Cantor，1845—1918）的“集合论”解决了数学的基础问题，没想到这个基础之基础自身却裂了一条大口。

数学的三次危机都可以说是与悖论联系在一起的。第一次数学危机可追溯到古希腊时代的希帕索斯悖论，起因于研究某些三角形边长比例时发现的无理数，泄露这个“怪数”的学者希帕索斯（Hippasus，大约公元前500年）被他的同门弟子扔进大海处死。第二次危机则与芝诺悖论及贝克莱悖论有关，基于对无穷小量本质

的研究，它的解决为牛顿、莱布尼茨创建的微积分学奠定了基础。毕达哥拉斯学派在淹死了希帕索斯之后，对错误有所认识，被迫承认了无理数，并提出了“单子”，它有点类似“极小量”的概念。不过，这个做法却遭到了诡辩数学家芝诺的嘲笑，他抛出一个快跑运动员阿格里斯永远也追不上乌龟的“芝诺悖论”，令历代数学家们反复纠结不已。牛顿发明微积分之后，虽然在实用上颇具优势，但理论基础尚未完善，贝克莱等人便用悖论来质疑牛顿的无穷小量，将其称之为微积分中的“鬼魂”。

因为前两次数学危机的解决，建立了实数理论和极限理论，最后又因为有了康托的集合论，数学家们兴奋激动，认为数学第一次有了“基础牢靠”的理论。

然而，当初康托的集合论对“集合”的定义太原始了，以为把任何一堆什么东西放在一起，只要它们具有某种简单定义的相同性质，再加以数学抽象后，就可以叫做“集合”了。可没有想到如此“朴素”的想法也会导致许多悖论，罗素悖论是其一。因此，这些悖论解决之后，人们便将康托原来的理论称为“朴素集合论”。

实际上，集合可以分为在逻辑上不相同的两大类，一类(A)可以包括集合自身，另一类(B)不能包括自身。可以包括自身的，比如说，图书馆的集合仍然是图书馆；不能包括自身的，比如说，全体自然数构成的集合并不是一个自然数。

显然一个集合不是A类就应该是B类，似乎没有第三种可能。但是，罗素问：由所有B类集合组成的集合X，是A类还是B类？如果你说X是A类，则X应该包括其自身，但是X是由B类组成，不应该包括其自身。如果你说X是B类，则X不包括其自身，但按照X的定义，X包括了所有的B类集合，当然也包括了其自身。总之，无论把X分为哪一类都是自相矛盾的，这就是罗素悖论(Russell paradox)，即理发师悖论的学术版。

还有一个与朴素集合论有关的悖论，叫作“说谎者悖论”(Liar paradox)，由它引申出来许多版本的小故事。它的典型语言表达为：“我说的话都是假话”。为什么说它是悖论？因为如果你判定这句话是真话，便否定了话中的结论，自相矛盾；如果你判定这句话是假话，那么引号中的结论又变成了一句真话，仍然产生矛盾。

上述这两个悖论导致了一种“左也不是，右也不是”的尴尬局面。说谎者悖论

中的那句话，无论说它是真还是假，都有矛盾；而罗素悖论中的集合X，包含自己或不包含自己，也都有矛盾。朴素集合论产生的另一个有趣悖论“Curry's paradox”，与上述两个悖论有点不一样，它导致的荒谬结论是“左也正确，右也正确”，永远正确！

我们也可以用自然语言来表述“Curry's paradox”。比如，我说：“如果这句话是真的，则马云是外星人。”根据数学逻辑，似乎可以证明这句话永远都是真的，为什么呢？因为这是一个条件语句，条件语句的形式为“如果A，则B”，其中包括了两部分：条件A和结论B。这个例子中，A＝这句话是真的，B＝马云是外星人。

如何证明一个条件语句成立？如果条件A满足时，能够导出结论B，这个条件语句即为“真”。那么现在，将上述的方法用于上面的那一句话，假设条件“这句话是真的”被满足，“这句话”指的是引号中的整个叙述“如果A，则B”，也就是说，A被满足意味着“如果A，则B”被满足，亦即B成立。也就得到了B“马云是外星人”的结论。所以，上面的说法证明了此条件语句成立。

但是，我们知道事实上马云并不是外星人，所以构成了悖论。此悖论的有趣之处并不在于马云是不是外星人，而是在于我们可以用任何荒谬结论来替代B。那也就是说，通过这个悖论可以证明任何荒谬的结论都是“正确”的。如此看来，这个悖论实在太“悖”了！

以上三个悖论都牵涉到“自我”指涉（self-reference）的问题。理发师不知道该不该给“自己”理发？说谎者声称的是“我”说的话。“Curry's paradox”产生悖论的关键是“这句话”的语义表达中包括了条件和结论两者。看起来，将自身包括在“集合”中不是好事，可能会产生出许多意想不到的问题，那么，如果将自身排除在集合之外，悖论不就解决了吗？也许问题并非那么简单，但总而言之，这些悖论提醒数学家们重新考察集合的定义，为它制定了一些“公理”作为条条框框，从而使得康托的朴素集合论走向了现代的“公理集合论”。

上面只是数学中的几个简单悖论，数学中的悖论只和理论自身的逻辑有关，修改理论便可解决。物理中的佯谬除了与理论自身的逻辑体系有关之外，还要符合

实验事实。打个比方，数学理论的高楼大厦自成一体，建立在自己设定的基础结构之上。物理学中则有“实验”和“理论”两座高楼同时建造，彼此相通相连、不断更新。理论大厦不仅仅要满足自身的逻辑自洽，还要和旁边的实验大楼统一考虑，每一层都得建造在自身的下一层以及多层实验楼的基础之上。因此，在物理学发展的过程中，既有物理佯谬，也有数学悖论，可能还有一些未理清楚难以归类的混合物产生出来，也许这可算是英语中使用同一个单词表达两者的优越性。

前面提到过，数学史上的三次危机以及导致危机的悖论的根源，都与连续和无限有关，都是由于无限进入到人的思维领域中而导致思考方法不同而产生的。第一次是从整数、分数扩展到实数，虽然整数和分数在数目上也有无限多，但本质上仍然有别于（小数点后数字）无限不循环的无理数。第二次危机中的微积分革命导致对“无限小”本质的探讨，推导总结发展了极限理论。第三次危机涉及的“集合”，显然需要更深究“无限”的概念。

看来，的确如数学家外尔所说：“数学是无限的科学”。实际上“无限”的概念对物理学和其他科学也至关重要，宇宙有限还是无限？物质是否可以“无限”地分下去？存在“终极理论”吗？人类思维有极限吗？我们（细胞数目）有限的大脑，能真正想通“无限”这个问题吗？就像小狗永远也学不会微积分那样，有些东西对我们人类的大脑来说，是不是也可能是永远无法认知的？

科学研究就是提出和解决悖论、佯谬的过程。正如数学史上悖论引发的三次危机，既是危机又是契机，有力地推动了数学的发展，促进了人类的进步。

2.
芝诺带你走向无穷小

无穷小极限思想的萌芽阶段可以上溯到 2000 多年前。希腊哲学家芝诺(Zeno，约公元前 490—430)曾经提出一个著名的阿基里斯悖论，就是古希腊极限萌芽意识的典型体现。而与之对应的是我国古代哲学家庄子亦有类似的见解(图 3-2-1)。

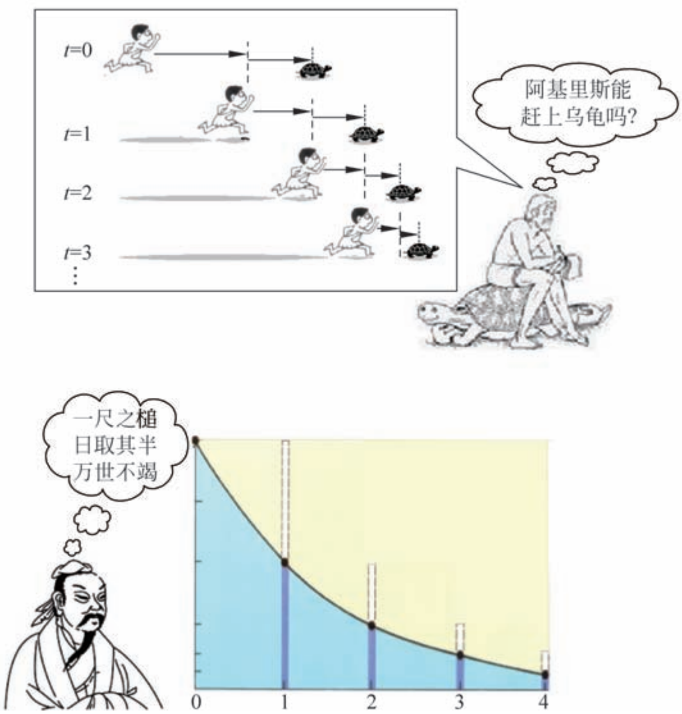

图 3-2-1　芝诺悖论和庄子的早期极限概念

阿基里斯是古希腊神话中善跑的英雄人物，参与了特洛伊战争，被称为“希腊第一勇士”。假设他跑步的速度为乌龟的10倍。比如说，阿基里斯每秒钟跑10m，乌龟每秒钟跑1m。出发时，乌龟在他前面100m处。按照我们每个人都具备的常识，阿基里斯很快就能追上并超过乌龟。我们可以简单地计算一下20s之后他和它在哪里？20s之后，阿基里斯跑到了离他出发点200m的地方，而乌龟只在离它自己出发点20m处，也就是离阿基里斯最初出发点120m之处而已，阿基里斯显然早就超过了它！

但是，从古至今的哲学家们都喜欢狡辩，芝诺说：“不对，阿基里斯永远都赶不上乌龟！”为什么呢？芝诺说，你看，开始的时候，乌龟超前阿基里斯100m；当阿基里斯跑了100m到了乌龟开始的位置时，乌龟已经向前爬了10m，这时候，乌龟超前阿基里斯10m；然后，我们就可以一直这样说下去：当阿基里斯又跑了10m后乌龟超前1m；下一时刻，乌龟超前0.1m；再下一刻，乌龟超前0.01m、0.001m、0.0001m…不管这个数值变得多么小，乌龟永远超前阿基里斯。所以，阿基里斯不可能追上乌龟！

正如柏拉图所言，芝诺编出这样的悖论，或许是兴之所至而开的小玩笑。芝诺当然知道阿基里斯能够捉住乌龟，但他的狡辩听起来也似乎颇有道理，怎样才能反驳芝诺的悖论呢？

再仔细分析一下这个问题。将阿基里斯开始的位置设为零点，那时乌龟在阿基里斯前面100m，位置=100m。我们可以计算一下在比赛开始100/9s之后阿基里斯及乌龟两者的位置。阿基里斯跑了1000/9m，乌龟跑了100/9m，加上原来的100m，乌龟所在的位置=100/9m+100m=1000/9m，与阿基里斯在同一个位置，说明这时候（100/9s）阿基里斯追上了乌龟。不过是11s加1/9s而已。但是，按照悖论的逻辑，将这11s加1/9s的时间间隔无限细分，给我们一种好像这段时间永远也过不完的印象。就好比说，你有1h的时间，过了一半，还有1/2h；又过了一半，还有1/4h；又过了一半，你还有1/8h；1/16h、1/32h…一直下去，好像这后面半小时永远也过不完了。这当然与实际情况不符。事实上，无论你将这后半小时分成多

少份，无限地分下去，时间总是均匀地流逝，与前半小时的流逝过程没有什么区别。因此，阿基里斯一定追得上乌龟，芝诺悖论不成立。

不过，从纯数学的角度来看，芝诺悖论本身的逻辑并没有错，因为任何两点之间都有无数个点，都可以分成无限多个小段。阿基里斯追乌龟是一个极限问题，即使从现代数学的观点，对于潜无限而言，极限是个无限的、不可完成的动态进行过程。因而，仍然有人认为，仅从逻辑的角度，这个悖论始终没有完全解决，阿基里斯永远追不上乌龟。

继芝诺之后，阿基米德对此悖论进行了颇为详细的研究。他把每次追赶的路程相加起来计算阿基里斯和乌龟到底跑了多远，将这问题归结为无穷级数求和的问题，证明了尽管路程可以无限分割，但整个追赶过程是在一个有限的长度中。当然，对我们而言，这个无穷等比级数求和已经不是个问题，高中数学中就有答案。但对 2000 多年前的阿基米德来说，还是极富挑战性的。

3.

希尔伯特旅馆悖论

牛顿的无限而又静止、信息以无限大速度传播的宇宙引出不少佯谬，比如之前所介绍的夜黑佯谬和引力佯谬。

当这些有关宇宙是否无穷的问题令物理学家们头疼的年代，数学家们却正在欣赏“无穷”的美妙。古代与中世纪哲学著作中记载过关于无限的思想。公元前1000年左右的印度梵文书中说：“如果你从无限中移走或添加一部分，剩下的还是无限。”不久前才发现并解读的古希腊羊皮书中的记载表明，古希腊的阿基米德就已经进行了有关无穷大的计算。

康托于1874年在他有关集合论的第一篇论文中提出的“无穷集合”概念，引起数学界的极大关注，震撼了学术界。康托还导出了关于数的本质的新思想模式，建立了处理数学中的“无限”的基本技巧。因此希尔伯特说：“没有人能够把我们从康托尔建立的乐园中赶出去。”

为了更好地解释无限集合与有限集合的区别，希尔伯特在他于1924年1月进行的一次演讲中，举了一个有趣的具有无穷多个房间的“希尔伯特旅馆”的例子，下面是根据希尔伯特的说法编出来的故事。

鲍勃是芝加哥大学的学生，圣诞节快到了，他从芝加哥开车回家到波士顿。原来计划一天开到的，傍晚8点左右，鲍勃感觉太累了，还得开4h左右才能到达呢。于是，鲍勃来到纽约州一个小镇，决定找个旅馆住一晚再说。不过不知道为什么，今天这个小镇上好像特别热闹，镇上大大小小的旅馆都给住满了。鲍勃正要发动汽车上高速公路去下一个地点找住处，却被一条醒目的广告吸引住了：“已经客