

第3章 基于数字图像处理技术的气-固界面电荷反演算法

静电探头测量到的电位是固体介质表面所有电荷共同作用的叠加,其关系由复杂的传递函数矩阵来决定。如何由测量到的绝缘子表面电位计算出表面电荷密度的分布,即表面电荷的反演计算,是研究气-固界面电荷的关键。本章将对“平移改变”和“平移不变”两种系统的气-固界面电荷反演算法进行研究。

3.1 电荷反演问题的提出

1967年,Davies首次提出静电探头法的测量原理^[104],他认为静电探头的输出电位 φ 和对应位置处的表面电荷密度 σ 的关系可以简单地表示为

$$\varphi(i) = M\sigma(i) \tag{3-1}$$

式中, i 表示第 i 个测量点; M 为标度系数。

由第2章中关于静电探头的原理可知,被测表面上每一点的电荷密度和测量电位之间的线性关系是由它们之间的电容耦合关系建立起来的,且认为标度系数 M 在各测量点处都相等。显然,式(3-1)所建立的探头输出电位和测量点电荷密度之间的关系是一一对应的,并未考虑被测点之外其他网格处的表面电荷对探头输出的影响,实际得到的电荷密度分布和电位分布是完全一致的,只是进行了单位的换算而已,这样的简化是十分粗糙的。可以假设一种特殊情况:若被测网格 i 上恰好不存在电荷,而被测网格附近的一些网格上存在正电荷,那么这些电荷将在被测网格上感应出正电位;此时,若用线性计算方法得出电荷分布,则会认为网格 i 上存在正的电荷面密度,这与假设情况不符,因此其计算结果是不准确的。

实际上,在测量时探头的输出电位应表示为所有面电荷共同作用的叠加。如果将整个被测表面剖分为 N 个有限的单元,则在第 i 个测量点处的电位可以表示为

$$\varphi(i) = \sum_{j=1}^N h(i, j) \sigma(j) \quad (3-2)$$

式中, $h(i, j)$ 表示在第 i 个测量点处, 点 j 处的单位电荷密度对探头输出电位的贡献。通常, 可以把上式写成矩阵的形式:

$$\boldsymbol{\varphi}_{N \times 1} = \mathbf{H}_{N \times N} \boldsymbol{\sigma}_{N \times 1} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

矩阵 \mathbf{H} 是从电荷密度到电位的传递函数矩阵。

这种电荷密度到测量电位之间的矩阵关系, 由 Specht 在 1976 年首次提出^[105]。在随后的 20 多年中, 研究者们针对该问题进行了大量关于电荷反演算法的讨论。其中比较具有代表性的有 Sudhakar(1987)提出的积分方程法^[106], Pedersen(1987)提出的 λ 函数法^[107-108], Ootera(1988)提出的三维模拟电荷法^[21]和 Faircloth(2003)提出的 Φ 函数法^[109]。这些方法均存在一定的缺点^[97], 并且都需要通过对大维数传递函数矩阵求逆来求解电荷密度的分布。当对测量结果的分辨率要求不高时, 可以减小介质表面划分的网格数, 降低传递函数矩阵维数, 此时直接求逆的计算结果基本满足实验需求^[72]。然而, 为了得到表面电荷分布的细节, 获得更高分辨率的电荷分布结果, 被测点数 N 需要成倍增加(例如, 文献[111]中 $N = 65\ 536$), 此时对大维数矩阵直接求逆往往会带来病态问题, 导致计算结果的误差无法接受。

为了更好地解决上述问题, 本章将借鉴数字图像处理领域的相关理论, 针对本书中将研究的“平移不变”系统和“平移改变”系统, 开发出相应的电荷反演算法, 并根据“图像退化/复原”模型和点扩散函数的概念, 对测量-反算系统的空间分辨率和测量误差进行估计。

3.2 平移改变系统的电荷反演算法

3.2.1 平移改变系统及其传递函数矩阵元素

第1章中提到, 盆式绝缘子大量应用于气体绝缘输电管道之中, 其在直流电场中的电荷积聚现象引起了研究者的广泛关注^[21, 42-44, 66-70]。一些研究者直接针对实际使用的盆式绝缘子进行测量^[21, 66-70], 还有一些研究者针对圆锥形模型绝缘子进行研究^[42-44, 72], 这些盆式或圆锥形绝缘子都被看作

“平移改变”系统,其系统的响应与激励施加于系统的位置有关。在本节中,我们以第2章中所介绍的圆锥绝缘子为研究对象,通过运动控制系统完成对绝缘子表面电位的扫描,获得电位向量 φ 。

为了求解方程(3-3),还需获得 \mathbf{H} 矩阵中的所有元素。从方程(3-3)可以看出,当所有表面微元中仅有一个微元 i 的电荷密度为单位电荷密度 ($\sigma_i = 1$) 而其余微元处的电荷密度都为 0 时,式(3-3)变为

$$\varphi_{N \times 1} = \mathbf{H}_{N \times 1}^i \quad (3-4)$$

式中,上标 i 表示矩阵 \mathbf{H} 的第 i 列。由式(3-4)可知,若设置某一微元处的表面电荷密度为单位电荷密度,即可通过静电场仿真计算获得此时所有微元处的表面电位 $\varphi_{N \times 1}$,即获得了矩阵 \mathbf{H} 的第 i 列。由于传递函数矩阵仅取决于测量系统的物理结构,不会随电荷分布的变化而变化。因此,对任意形状的被测表面,理论上可通过 N 次电场计算确定矩阵 \mathbf{H} 中的所有元素。

然而,在空间分辨率要求较高时,被测物体表面有限元的数量 N 会很大,矩阵 \mathbf{H} 的计算工作量会变得非常庞大,所以必须设法减少计算次数。对于旋转对称系统,可以证明其所对应的矩阵 \mathbf{H} 是分块循环矩阵,这可以大大减少电场的数值计算次数。以本实验中的圆锥形绝缘子为例,设待测点总数 $N = r \times d$,其中 r 为半径方向的圈数, d 为圆周方向每圈的份数,则矩阵 \mathbf{H} 具有如下形式:

$$\mathbf{H}_{N \times N} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11,d \times d} & \mathbf{H}_{12,d \times d} & \cdots & \mathbf{H}_{1r,d \times d} \\ \mathbf{H}_{21,d \times d} & \mathbf{H}_{22,d \times d} & \cdots & \mathbf{H}_{2r,d \times d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{r1,d \times d} & \mathbf{H}_{r2,d \times d} & \cdots & \mathbf{H}_{rr,d \times d} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

式中, $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{12}, \dots, \mathbf{H}_{rr}$ 是矩阵 \mathbf{H} 的块,它们自身是 $d \times d$ 维的循环矩阵。所谓循环矩阵是指它的每一列都是通过将其前一列所有元素向下移动一行,并将前一列最下端的元素移动到该列最上端而得到的。

静电场数值计算通过 COMSOL 软件完成。在软件中建立与实际测量时电极结构布置尺寸相同的计算模型(图 3.1),圆锥形绝缘子表面被剖分成 $N = 15\,840$ 个微元,其中沿半径方向由内而外分成 44 圈($r = 44$),每圈宽度为 1 mm,每圈中再以 1° 为一段划分成 360 份($d = 360$),如图 3.1(b)所示。计算时,每次设置其中一个表面微元 i 的电荷密度为 1 C/m^2 ,其他微元及剩余绝缘子表面无电荷,计算结果如图 3.1(c)所示。根据圆锥绝缘子具有的旋转对称性,仅需对半径方向的 44 个微元分别设置单位电荷,并进行静

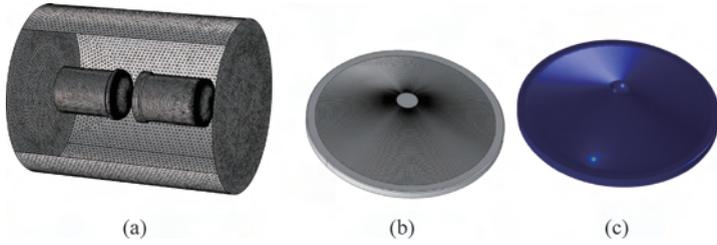


图 3.1 COMSOL 数值计算模型及仿真结果

(a) 仿真模型; (b) 网格划分; (c) 仿真结果

电场数值计算,就可根据式(3-5)获得该系统的传递函数矩阵 \mathbf{H} 。

3.2.2 传递函数矩阵的病态特性

显然,如果得到了传递函数矩阵 \mathbf{H} ,则可以根据测量得到的表面电位反算出被测表面电荷密度的分布:

$$\boldsymbol{\sigma}_{N \times 1} = \mathbf{H}_{N \times N}^{-1} \boldsymbol{\varphi}_{N \times 1} \quad (3-6)$$

然而,大型矩阵往往存在病态,直接对大型矩阵求逆具有不稳定性。也就是说,即使在电位向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 和传递函数矩阵 \mathbf{H} 中存在很小的扰动,也可能使电荷计算结果产生较大的误差。假设矩阵 \mathbf{H} 和电位向量 $\boldsymbol{\varphi}$ 有微小的扰动 $\delta\mathbf{H}$ 和 $\delta\boldsymbol{\varphi}$,引起计算出的电荷偏差为 $\delta\boldsymbol{\sigma}$,则式(3-6)可变为

$$\boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{H} + \delta\mathbf{H})^{-1} (\boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\varphi}) \quad (3-7)$$

由于微小扰动带来的计算误差可通过下式估算^[111]:

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{\sigma}\|}{\|\boldsymbol{\sigma}\|} \leq \kappa \left(\frac{\|\delta\mathbf{H}\|}{\|\mathbf{H}\|} + \frac{\|\delta\boldsymbol{\varphi}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|} \right), \quad \kappa = \frac{\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\|}{1 - \|\delta\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\|} \quad (3-8)$$

式中,“ $\|\ \|$ ”是矩阵和向量的范数。矩阵的范数取谱范数;向量的范数取欧式范数。

式(3-8)的估算基于以下三个假设条件:

假设 1: $m \geq n = \text{Rank}(\mathbf{H})$;

假设 2: $\|\delta\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\| < 1$;

假设 3: $\text{Rank}(\mathbf{H} + \delta\mathbf{H}) = \text{Rank}(\mathbf{H})$;

式中, m 和 n 分别为被测点的个数和未知点的个数。通常,传递函数矩阵的病态特性可以根据该矩阵的条件数来进行诊断:

$$\text{Cond}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\| \quad (3-9)$$

统计应用中的经验表明:当 $100 \leq \text{Cond} \leq 1000$ 时,认为矩阵中存在中等程度

或较强的病态^[111]。从式(3-8)也可看出,由于 $0 < \|\delta\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\| < 1$, 当矩阵 \mathbf{H} 的条件数较大时, κ 值较大, 即使扰动 $\delta\mathbf{H}$ 和 $\delta\varphi$ 很小, 由于 κ 的放大作用, 计算结果的偏差也会很大。甚至在大多数情况下, 计算结果将会变得毫无意义。通过对本实验中矩阵 \mathbf{H} 的条件数进行计算, 得出其值为 648。可见, 该实验中的传递函数矩阵属于病态矩阵。所以, 在反演计算过程中, 必须对该矩阵进行一定的修正, 以确保反演过程中的误差得到抑制。

3.2.3 基于吉洪诺夫正则化的维纳滤波器

为减小测量过程中的扰动对计算结果带来的影响, 本书借鉴数字图像复原技术中的维纳滤波器(Wiener filter), 对电荷反演计算过程进行改善。维纳滤波器是一种基于最小均方误差(minimum mean square error, MMSE)、对平稳过程的最优滤波器。这种滤波器基于吉洪诺夫正则化(Tikhonov regularization)原理, 以输出与期望输出间的均方误差最小为准则, 是一个最佳滤波系统, 可用于提取被平稳噪声所污染的图像信息^[112]。根据该原理, 对式(3-6)的求解以最小均方误差为估计准则可表示为

$$\min: \|\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\varphi}\|^2 + \|\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\sigma}\|^2 \quad (3-10)$$

式中, $\boldsymbol{\Gamma}$ 称为“吉洪诺夫矩阵”。由该准则得出的表面电荷密度估计解 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (3-11)$$

通常, 矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 选为 α 倍的单位阵, 即 $\boldsymbol{\Gamma} = \alpha \mathbf{I}$, α 称为“正则化参数”。这样, 表面电荷密度的估计解 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 又可表示为

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi} \quad (3-12)$$

与直接求逆相比, 式(3-12)的求逆部分引入了 $\alpha \mathbf{I}$ 项, 使矩阵的病态性得到了抑制。

从式(3-12)中可以看出, 计算结果只与正则化参数 α 的选择有关, 选择不同的正则化参数, 得到的估计结果可能不同。如果选择不合适, 要么起不到正则化效果, 得到的仍然是病态的解, 噪声被放大而有效信息被淹没; 要么抑制过度, 得到的解过于平滑, 失去原有的细节信息。因此, 必须选择合适的正则化参数。

本书给出两种选择正则化参数的方法。最常用的是 Hansen 提出的 L 曲线法^[113], 该方法的基本原理简述如下: 在式(3-10)中, $\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\varphi}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 都是正则化参数 α 的函数, 选择不同的 α 值, 以 $\|\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\varphi}\|$ 为横坐标、 $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|$ 为纵坐标画散点图, 经拟合得到一条形似 L 的曲线。选择 L 曲线上曲率最大的一点所对应的 α 值作为所求的正则化参数。该方法的合理性在于强调数

据拟合部分 $\|H\hat{\sigma} - \varphi\|$ 和估计解部分 $\|\hat{\sigma}\|$ 之间的平衡。应用 L 曲线法求取式(3-12)中的正则化参数,得到的 L 曲线如图 3.2 所示,该曲线上曲率最大点对应的正则化参数 α 为 1.58×10^{17} ,代入矩阵 $H^T H + \alpha I$,可求得条件数仅为 2.98。与原传递函数矩阵的条件数相比大大减小,因此其求逆过程的稳定性会大大改善。

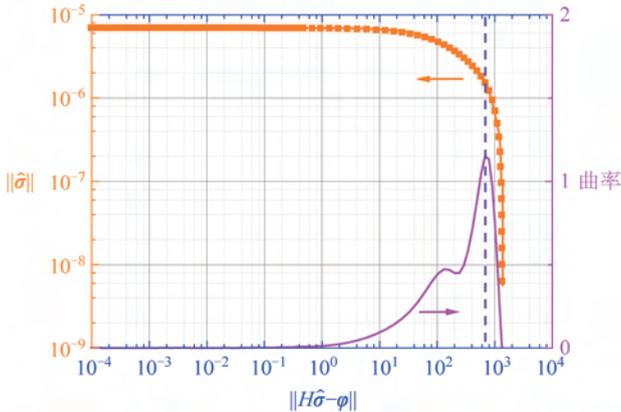


图 3.2 由 L 曲线法确定正则化参数得到的曲线

在数字图像处理领域,正则化参数 α 可以看作噪声和信号方差的比值,即 $\alpha = \sigma_n^2 / \sigma_s^2$,可以通过预先实验测定噪声和信号的功率密度谱来确定正则化参数 α 的值。然而在本实验中, σ_n^2 和 σ_s^2 是很难通过实验得到的。所以,通常取矩阵 $H^T H$ 最大特征值 λ_{\max} 的 $0.03\% \sim 1\%$ 作为 α 的值^[95]。也可以以矩阵 $H^T H + \alpha I$ 的条件数最小作为判据,在上述范围内选取最优的正则化参数。这种方法实际上是借鉴了数字图像处理领域的“图像退化/复原”(image deterioration/restoration)模型(图 3.3),认为表面电荷的估计值 $\hat{\sigma}$ 是真实值 σ 通过测量过程 H 和复原过程 G 产生的,即

$$\hat{\sigma} = GH\sigma = (H^T H + \alpha I)^{-1} H^T H\sigma \tag{3-13}$$

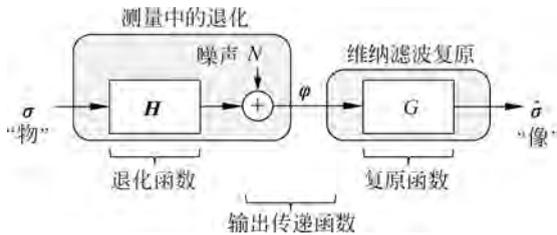


图 3.3 图像退化/图像复原模型

可以看出,矩阵 $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 的特征向量 $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_N$ 和矩阵 \mathbf{GH} 的特征向量一致。所以, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以被分解为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^N k_i \mathbf{v}_i \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^N k'_i \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (3-14)$$

式中,系数 k_i 和 k'_i 之间有如下关系:

$$k'_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha} k_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-15)$$

式中, λ_i 是对应于矩阵 $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ 的特征向量 \mathbf{v}_i 的特征值。当 λ_i 远大于 α 时, k'_i 和 k_i 之间的比值近似为 1; 当 λ_i 远小于 α 时, k'_i 和 k_i 之间的比值近似为 0。也就是说,在电荷反演计算过程中,较小的特征值 λ_i 对应的分量 $k_i \mathbf{v}_i$ 将会被滤掉,而较大的特征值 λ_i 对应的分量 $k_i \mathbf{v}_i$ 将会被保留。在空间频域中,这些较小的特征值对应的是电荷在空间分布中的高频部分,所以这样设计的维纳滤波器是一个低通滤波器。

3.2.4 基于点扩散函数的空间分辨率分析

在气-固界面电荷的研究中,更高的空间分辨率将会为研究者提供更多的电荷分布细节信息。下面将采用点扩散函数(point spread function, PSF)来评价并分析上述算法中表面电荷空间分辨率的大小。所谓 PSF,是用来评估一个成像系统的最小空间分辨距离的函数。对光学系统来说,PSF 就是输入物为一个点光源时,系统输出图像的光场分布。显然,这个图像的光场分布越集中,成像效果越好。

类似地,可以将式(3-13)中电荷分布的估计值 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 和真实值 $\boldsymbol{\sigma}$ 看作成像系统中的“像”与“物”,“成像”关系由输出传递函数 \mathbf{GH} 来决定,如图 3.3 所示。假设在圆锥绝缘子中心位置附近($r = 28 \text{ mm}$)的一个微元处放置单位面电荷,电荷密度 1 C/m^2 ,该电荷分布为真实的电荷分布 $\boldsymbol{\sigma}$,根据公式(3-13)求得反演算法估计出的电荷分布 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$,这个分布就可以看作该点处的 PSF。图 3.4 给出了不同 α 值下, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 沿半径方向的计算结果,其分布采用高斯分布(Gaussian distribution)拟合成曲线。可以看出,估计的电荷密度结果随着 α 的减小而增大。将图 3.4 中的高斯曲线进行傅里叶变换,得到电荷分布在空间频域下的分布特性,如图 3.5 所示,图中曲线的幅值进行了归

一化处理。PSF的傅里叶变换结果反映了测量和反算系统的空间频率传递特性。

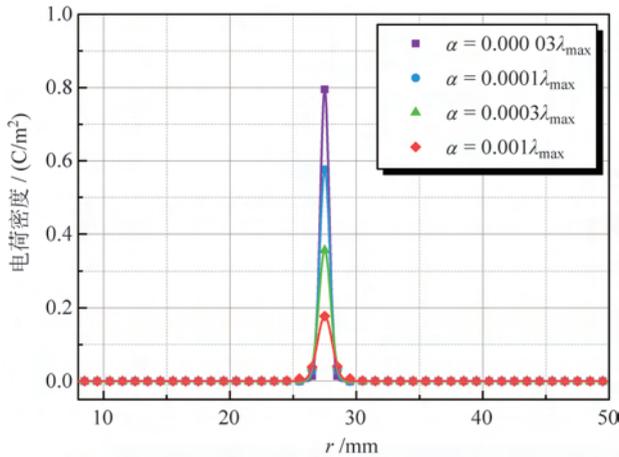


图 3.4 由单位面电荷分布经反演算法估计出的电荷分布

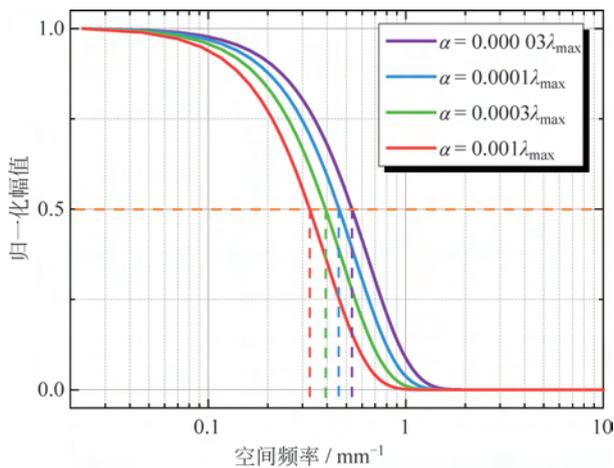


图 3.5 估计出的单位电荷分布在空间频域下的分布特性

本书采用数字图像处理中对空间分辨率的定义,定义当该系统的空间频率分布曲线幅值衰减到一半时所对应频率为截止频率,截止频率的倒数为该系统的空间分辨率^[114]。在这个定义下,假设该系统的空间分辨率是 2 mm,当用它去测量一个空间周期为 2 mm 的正弦形电荷分布时,计算出

的电荷分布幅值只有真实值的一半。而如果这种正弦形电荷分布的周期大于 2 mm,那么计算出的电荷分布就会和真实的电荷分布几乎一样。在图 3.5 中,画出了不同 α 取值下,空间频率分布曲线所对应的截止频率。可以看出,当 α 增大时,测量-反算系统的空间分辨率会变差。当 α 的值为 $0.003\% \lambda_{\max}$ 到 $0.1\% \lambda_{\max}$ 时,空间分辨率的大小为 1.8~2.9 mm。

3.2.5 仿真算例及计算精度分析

采用数值模拟方法来研究该反演算法的计算精度,并对计算结果的误差范围进行估计。在图 3.1(a)所示的仿真模型中,给圆锥形绝缘子斜面中心处人为设置宽度为 10 mm 的表面电荷带 ($23 \text{ mm} \leq r \leq 33 \text{ mm}$),电荷密度为 1 pC/mm^2 ,计算出表面电位分布 φ 。电荷分布 σ 和电位分布 φ 分别如图 3.6(a)和(b)所示。为了模拟实际测量中存在的噪声信号,在这个表面电位分布上叠加一个高斯噪声,高斯噪声的期望为 0,标准差分别取 φ 向量中最大值的 0.1%和 0.5%。用式(3-11)来计算表面电荷密度,其中正则化参数 α 取 $0.03\% \lambda_{\max}$ 。图 3.6(c)为无叠加噪声下计算出的表面电荷分布,图 3.6(d)和(e)分别为上述两种噪声下计算的表面电荷分布。

可以看出,采用反演算法求得的电荷分布和原始设置的电荷分布基本一致;而在电荷密度突变处,估计出的电荷边缘会变得有些模糊。这是由于本书设计的维纳滤波器具有低通特性,高频分量在电荷反算过程中会衰减。当然,在实际实验中,真实的电荷分布往往是渐变的,很少出现像图 3.6(a)中那样的突变。如果设置电荷密度分布是渐变的,如图 3.7(a)所示,那么反算求得的电荷分布与人为设置的电荷分布更加契合,如图 3.7(c)所示(图中标尺和图 3.6 一致)。

对于测量和反算系统的精度,可用信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)来表示^[123]:

$$\text{SNR} = -10 \lg \frac{\sum_{i=1}^N \{\hat{\sigma}_i - \sigma_i\}^2}{NA^2} \quad (3-16)$$

式中, $\hat{\sigma}$ 和 σ 分别表示表面电荷的估计值和真实值, A 代表向量 σ 中的最大值。式(3-16)是峰值均方误差(peak mean square error, PMSE)的分贝形式。对于图 3.6(d)、(e)、图 3.7(c)所计算出的表面电荷分布,其信噪比和峰值均方误差的计算结果如表 3.1 所示,其中峰值均方误差用其平方根表示:

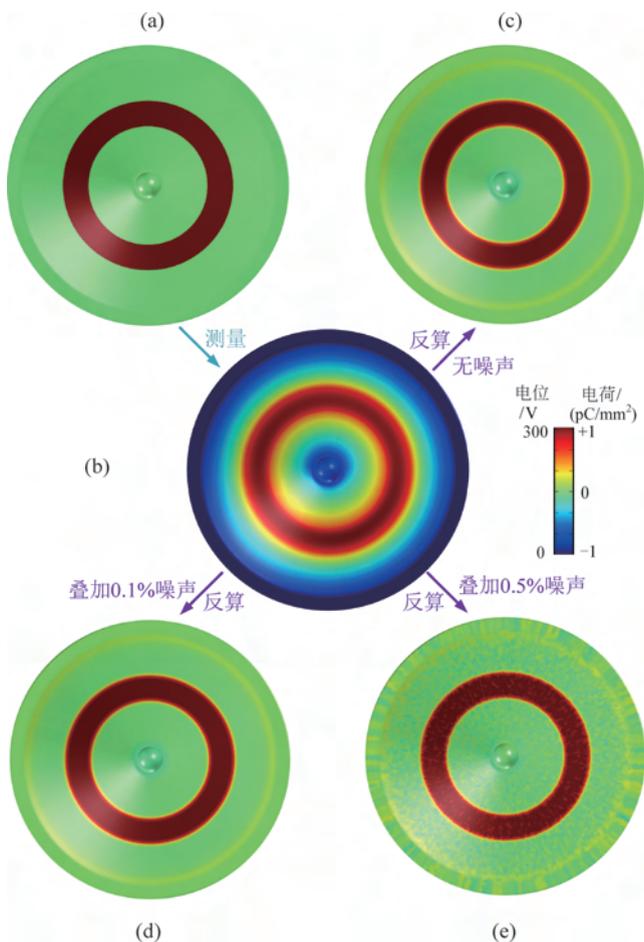


图 3.6 通过数值模拟研究反演算法的精度——算例 1

- (a) 人为设置的电荷分布；(b) 仿真计算出的电位分布；(c) 估计出的电荷分布(无噪声)；
 (d) 估计出的电荷分布(0.1%噪声)；(e) 估计出的电荷分布(0.5%噪声)

$$\sqrt{\text{PMSE}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \{\hat{\sigma}_i - \sigma_i\}^2 / (NA^2)} \quad (3-17)$$

从表 3.1 中可以看出,图 3.6(d)中测量-反算结果的信噪比达到了 38 dB。随着探头噪声的增大,计算出的表面电荷估计值中的噪声相应增大,信噪比降低。当表面电荷分布中不存在突变时,其估计值的信噪比增大,算法的计算效果更好。