第3章

点、直线和平面的投影

章前思考

1. 如何绘制图3.1所示三棱锥等不规则平面立体的三视图?

2. 该三棱锥由哪些三角形平面、棱边和顶点围成?

3. 如果能够知道三棱锥四个顶点的三面投影,那么对于确定棱边、三角形表面的投影,以及绘制三棱锥的三视图将会有哪些帮助?

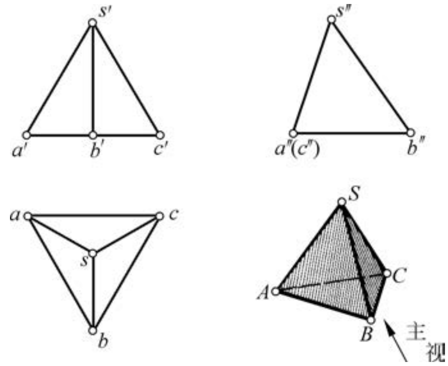


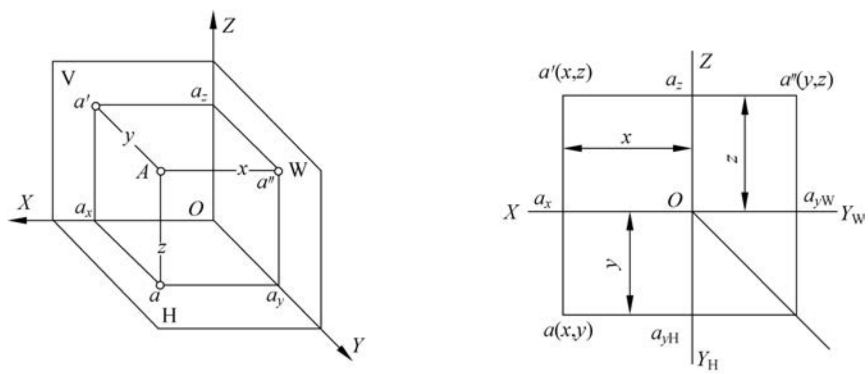
图3.1 三棱锥及其三视图

第2章概略介绍了立体视图的概念及三视图的形成及画法,无论物体具有怎样的构型,它总是由几何元素(点、直线、平面)依据一定的几何关系组合而成。为了正确地表达空间物体的形状,加深对三视图画法及投影规律的理解,必须熟悉点、直线、平面等几何元素的投影特点和投影规律。

3.1 点的三面投影

3.1.1 点的空间位置和直角坐标

如图3.2所示,点的空间位置可由其空间直角坐标值来确定,如$A(x,y,z)$。



(a) 立体图 (b) 投影图

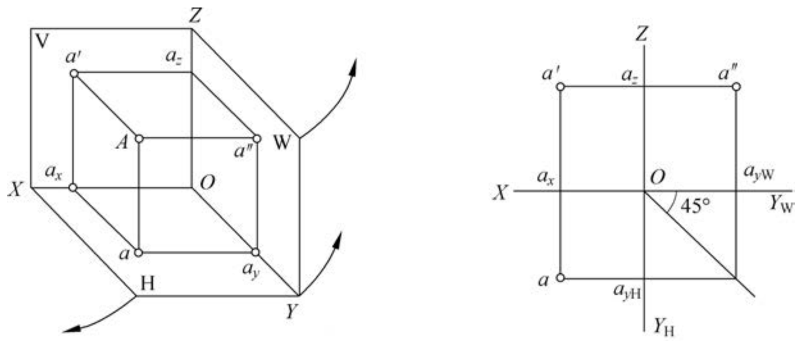
图3.2 点的投影和直角坐标

3.1.2 点的三面投影

为了统一起见,规定空间点用大写字母表示,如A、B、C等;水平投影用相应的小写字母表示,如a、b、c等;正面投影用相应的小写字母加一撇表示,如a'、b'、c';侧面投影

用相应的小写字母加两撇表示，如 a''、b''、c''。

如图 3.3(a)所示，将点 $A(x,y,z)$置于三投影面体系之中，过 A 点分别向三个投影面作垂线(即投射线)，交得三个垂足 a、a'、a''即分别为 A 点的 H 面投影、V 面投影、W 面投影。



(a) 立体图　　(b) 投影图

图 3.3　点的三面投影

A 点在 H 面上的投影 a，称为 A 点的水平投影，它由 A 点到 V、W 两投影面的距离或坐标值 y、x 所决定；A 点在 V 面上的投影 a'，称为 A 点的正面投影，它由 A 点到 H、W 两投影面的距离或坐标值 z、x 所决定；A 点在 W 面上的投影 a''，称为 A 点的侧面投影，它由 A 点到 V、H 两投影面的距离或坐标值 y、z 所决定。

如图 3.3(b)所示，三投影面体系展开后，点的三个投影在同一平面内，即可得到点的三面投影。应注意的是，投影面展开后，同一条 OY 轴旋转后出现了两个位置。

3.1.3　点的投影规律

(1) 点的两面投影连线垂直于相应的投影轴，即 $aa' \perp OX$，$a'a'' \perp OZ$，$aa_{yH} \perp OY_H$，$a''a_{yW} \perp OY_W$。

(2) 点的投影到投影轴的距离，等于该点到相应投影面的距离。如点 A 的正面投影到 OX 轴的距离 $a'a_x$ 等于点 A 到水平投影面的距离 Aa。

为了表示点的水平投影到 OX 轴的距离等于侧面投影到 OZ 轴的距离，即 $aa_x = a''a_z$，常采用图 3.3(b)所示作 45°角平分线的方法。

【例 3.1】 已知点 $A(25,15,20)$，求作点 A 的三面投影图。

解：作图步骤如下。

(1) 画出投影轴，自原点 O 沿 OX 轴向左量取 $x=25$，得点 a_x，如图 3.4(a)所示；

(2) 过 a_x 作 OX 轴的垂线，在垂线上自 a_x 向上量取 $z=20$，得点 A 的正面投影 a'，自 a_x 向下量取 $y=15$，得点 A 的水平投影 a，如图 3.4(b)所示；

(3) 过 O 向右下方作 45°辅助线，并过 a 作 OY_H 垂线与 45°线相交，然后再由此交点作 OY_W 轴的垂线，与过 a'点且垂直于 OZ 轴的投影线相交，交点即为 a''，如图 3.4(c)所示。

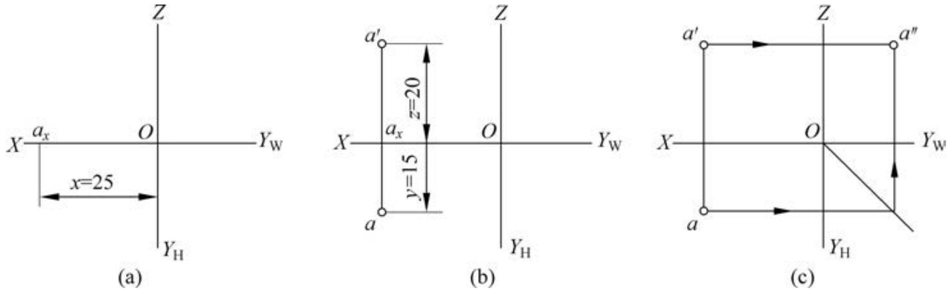
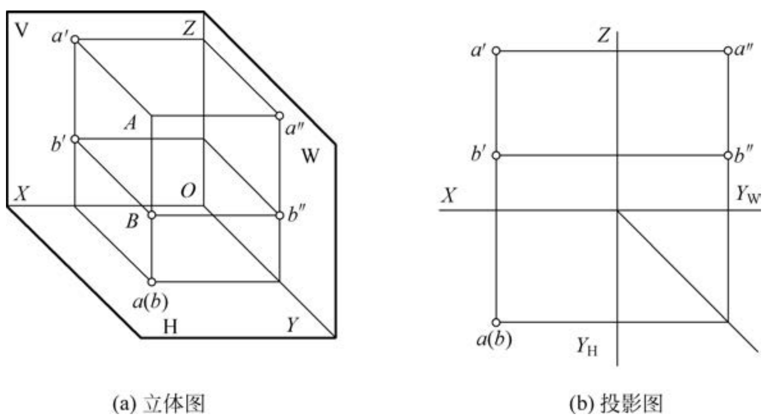


图 3.4 求作点的三面投影图

3.1.4 重影点

当空间两点处于某一投影面的同一条投射线上时，这两点对该投影面的投影重合为一点，这两点称为该投影面的一对重影点。图 3.5(a)所示的 A、B 两点就是水平投影面的一对重影点。



(a) 立体图 (b) 投影图

图 3.5 重影点的投影

重影点可见性判别的原则：两点之中，对重合投影所在的投影面的距离或坐标值较大的点是可见的，而另一点是不可见的。即前遮后、上遮下、左遮右。因此，图 3.5(a)中 A 点为可见、B 点为不可见。

标记时，应将不可见点的投影用括号括起来。如图 3.5(b)中 B 点的水平投影(b)。

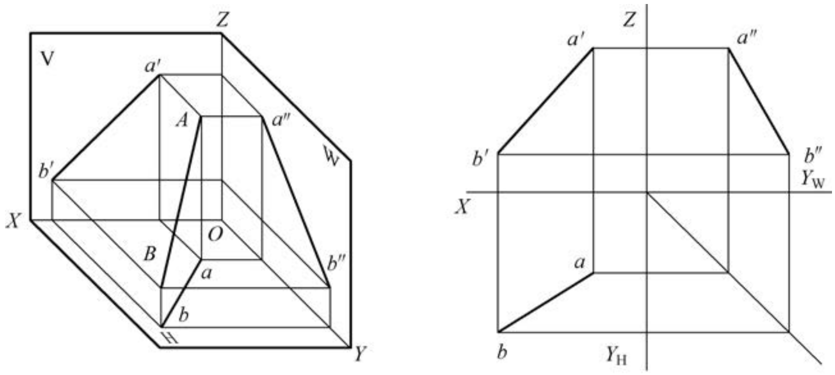
3.2 直线的三面投影

一般情况下，直线的投影仍是直线。特殊情况下，若直线垂直于投影面，则直线在该投影面上的投影积聚为一点。

3.2.1 直线的投影

直线的投影可由直线上两点的同面投影连接得到。如图 3.6 所示，分别作出直线上

两点 A、B 的三面投影,将其同面投影相连,即得到直线 AB 的三面投影。



(a) 立体图　　(b) 投影图

图 3.6　直线的投影

立体上直线的投影在立体的同面投影上,且符合“长对正、高平齐、宽相等”的投影规律。图 3.7 中,直线 SA 在三棱锥上,其水平投影 sa、正面投影 $s'a'$ 和侧面投影 $s''a''$ 分别在三棱锥的水平、正面和侧面投影上,且 $s'a'$ 和 sa 长对正,$s'a'$ 和 $s''a''$ 高平齐,sa 和 $s''a''$ 宽相等(均为 Δy)。

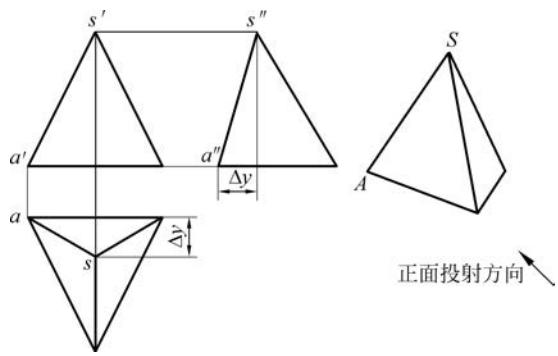


图 3.7　立体上直线的投影

3.2.2　各种位置直线的投影特性

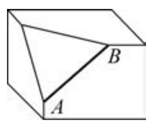
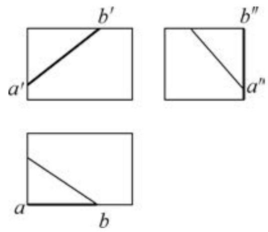
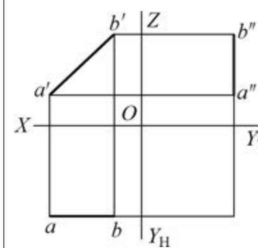
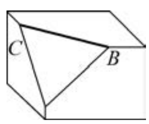
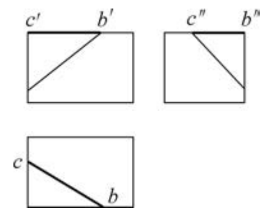
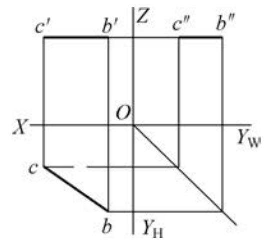
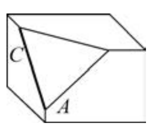
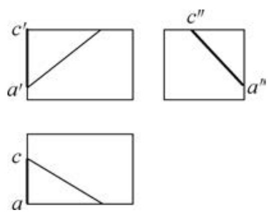
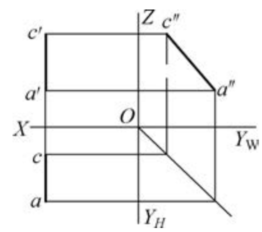
空间直线根据其对三个投影面的位置不同,可分为三类:投影面平行线、投影面垂直线和一般位置直线。投影面平行线和投影面垂直线又称为特殊位置直线。

1. 投影面平行线

平行于一个投影面,与另外两个投影面都倾斜的直线称为投影面平行线。它平行于一个投影面,与另外两个投影面倾斜。与 H 面平行的直线称为水平线,与 V 面平行的直线称为正平线,与 W 面平行的直线称为侧平线。

投影面平行线的投影特性为：在所平行的投影面上的投影为一反映实长的倾斜直线；其余两个投影分别为平行于相应投影轴且长度缩短的直线。它们的投影图、投影特性及其在三视图中的应用见表3.1。

表3.1 投影面平行线的投影特性

类型	立体图	立体三视图	直线投影图	投影特性
正平线				(1) $ab\,/\!/\,OX$，$a''b''\,/\!/\,OZ$，长度缩短； (2) $a'b'$反映实长
水平线				(1) $c'b'\,/\!/\,OX$，$c''b''\,/\!/\,OY_W$，长度缩短； (2) cb 反映实长
侧平线				(1) $c'a'\,/\!/\,OZ$，$ca\,/\!/\,OY_H$，长度缩短； (2) $c''a''$反映实长

2. 投影面垂直线

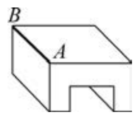
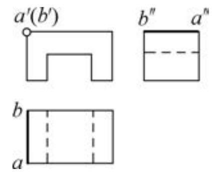
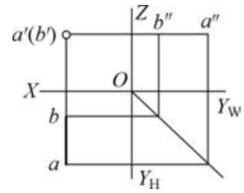
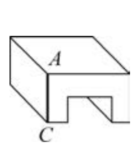
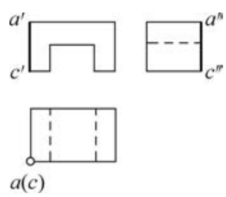
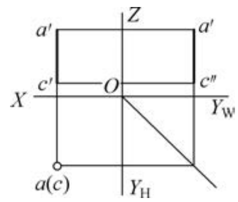
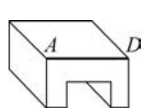
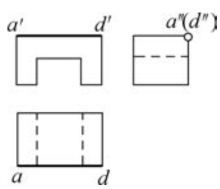
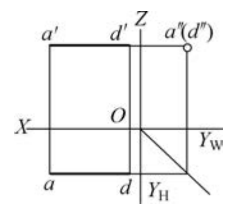
与一个投影面垂直的直线称为投影面垂直线。它垂直于一个投影面，与另外两个投影面平行。与H面垂直的直线称为铅垂线，与V面垂直的直线称为正垂线，与W面垂直的直线称为侧垂线。

投影面垂直线的投影特性为：在所垂直的投影面上的投影积聚为一点；其余两个投影均为平行于某一投影轴且反映实长的直线。它们的投影图、投影特性及其在三视图中的应用见表3.2。

3. 一般位置直线

一般位置直线与三个投影面都倾斜，因此在三个投影面上的投影都是长度缩短的倾斜直线，如图3.6及图3.8中的 AB 直线，图3.7中的 SA 直线等。

表 3.2 投影面垂直线的投影特性

类型	立体图	立体三视图	直线投影图	投 影 特 性
正垂线				(1) $a'b'$ 积聚成一点； (2) $ab /\!/ OY_H$，$a''b'' /\!/ OY_W$，并反映实长
铅垂线				(1) ac 积聚成一点； (2) $a'c' /\!/ OZ$，$a''c'' /\!/ OZ$，并反映实长
侧垂线				(1) $a''d''$ 积聚成一点； (2) $a'd' /\!/ OX$，$ad /\!/ OX$，并反映实长

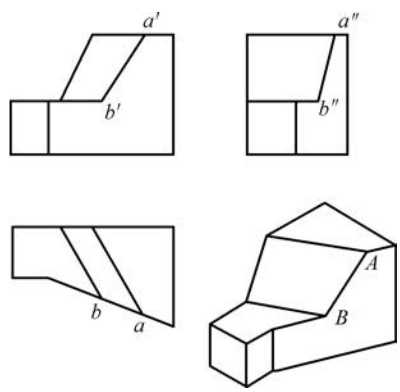


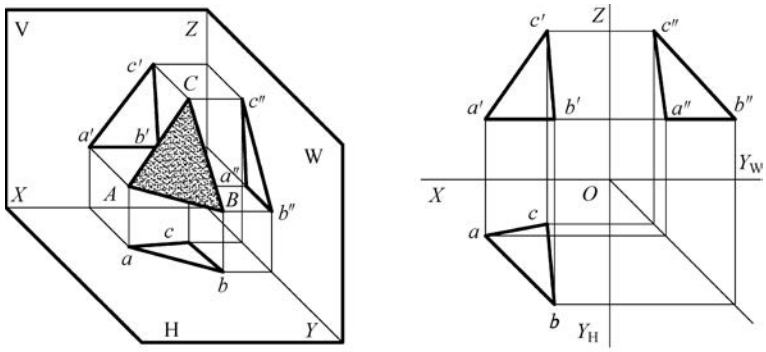
图 3.8 三视图中一般位置直线的投影

3.3 平面的三面投影

一般情况下，平面图形的投影仍是其类似形。特殊情况下，若平面垂直于投影面，则平面在该投影面上的投影积聚为一条直线。

3.3.1 平面的投影

平面的投影可由围成平面的各边及顶点的投影确定，如图 3.9 所示。



(a) 立体图 (b) 投影图

图 3.9 平面的投影

立体上的平面是由若干条线段围成的平面图形，因此，立体上平面的投影就是这些线段的投影。平面的三面投影也应符合“长对正、高平齐、宽相等”的投影规律。

3.3.2 各种位置平面的投影特性

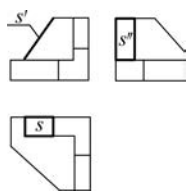
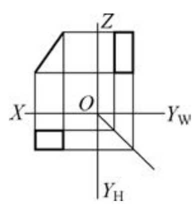
空间平面根据其对三个投影面的位置不同，可分为三类：投影面垂直面、投影面平行面和一般位置平面。投影面垂直面和投影面平行面又称为特殊位置平面。

1. 投影面垂直面

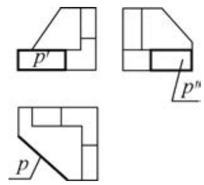
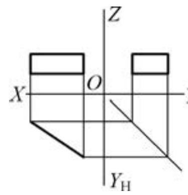
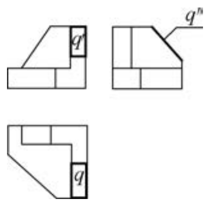
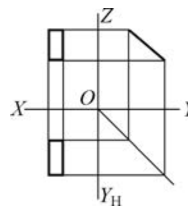
在三投影面体系中，垂直于一个投影面、倾斜于另外两个投影面的平面，称为投影面垂直面。垂直于 H 面的平面，称为铅垂面；垂直于 V 面的平面，称为正垂面；垂直于 W 面的平面，称为侧垂面。

投影面垂直面的投影特性为：在所垂直的投影面上的投影积聚为一倾斜于相应投影轴的直线；其余两个投影均为小于实形的类似形。它们的投影图、投影特性及其在三视图中的应用见表 3.3。

表 3.3 投影面垂直面的投影特性

类型	立体图	立体三视图	平面投影图	投 影 特 性
正垂面				(1) 正面投影积聚成直线； (2) 水平投影和侧面投影为类似形

续表

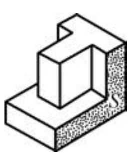
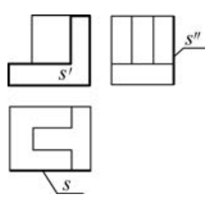
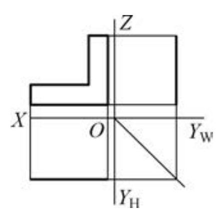
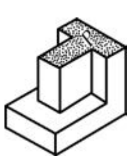
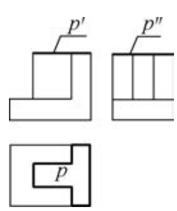
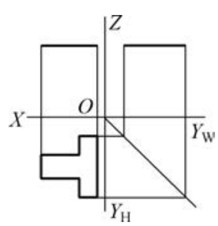
类型	立体图	立体三视图	平面投影图	投 影 特 性
铅垂面				(1) 水平投影积聚成直线； (2) 正面投影和侧面投影为类似形
侧垂面				(1) 侧面投影积聚成直线； (2) 正面投影和水平投影为类似形

2. 投影面平行面

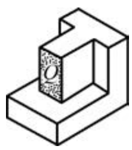
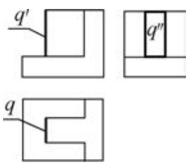
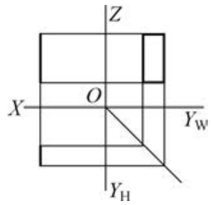
在三投影面体系中，平行于一个投影面、垂直于另外两个投影面的平面，称为投影面平行面。平行于 H 面的平面，称为水平面；平行于 V 面的平面，称为正平面；平行于 W 面的平面，称为侧平面。

投影面平行面的投影特性为：在所平行的投影面上的投影反映实形；其余两个投影积聚为平行于相应投影轴的直线。它们的投影图、投影特性及其在三视图中的应用见表 3.4。

表 3.4 投影面平行面的投影特性

类型	立体图	立体三视图	平面投影图	投 影 特 性
正平面				(1) 正面投影反映实形； (2) 水平投影积聚成直线，且平行于 OX 轴； (3) 侧面投影积聚成直线，且平行于 OZ 轴
水平面				(1) 水平投影反映实形； (2) 正面投影积聚成直线，且平行于 OX 轴； (3) 侧面投影积聚成直线，且平行于 OY_W 轴

续表

类型	立体图	立体三视图	平面投影图	投 影 特 性
侧平面				(1)侧面投影反映实形； (2)正面投影积聚成直线，且平行于 OZ 轴； (3)水平投影积聚成直线，且平行于 OY_H 轴

3. 一般位置平面

在三投影面体系中，与三个投影面均倾斜的平面，称为一般位置平面。图 3.9 及图 3.10 中所示的△ABC 平面均为一般位置平面。

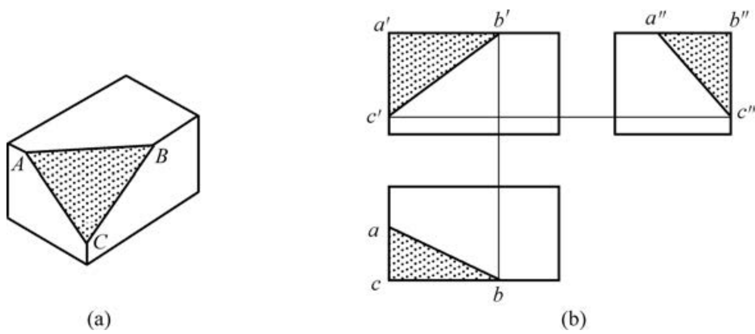


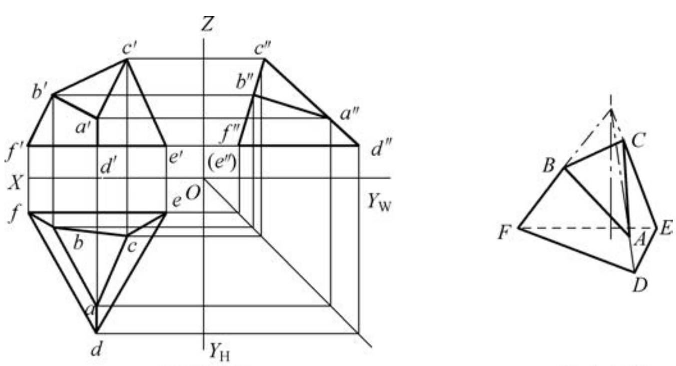
图 3.10　形体上的一般位置平面及其投影

一般位置平面的投影特性为：三个投影均为小于实形的类似形。

若平面的三面投影都是类似形，则该平面一定是一般位置平面。

【例 3.2】　运用上述三类平面的投影特性，分析图 3.11 所示形体上各面的空间位置。

图 3.11 所示是一个由五个平面形围成的形体。顶面为△ABC，底面为△DEF，三侧面为四边形 $BCEF$、$ABFD$ 和 $ACED$。



(a) 三视图　　(b) 立体图

图 3.11　三视图中面的投影分析

截头三棱锥
三维模型

$\triangle ABC$ 的三面投影都是类似的三角形，分别是$\triangle abc$、$\triangle a'b'c'$和$\triangle a''b''c''$，因而可以确认$\triangle ABC$ 是一般位置平面。

$\triangle DEF$ 的正面投影为直线 $d'e'f'$，$d'e'f' /\!/ OX$ 轴；侧面投影为直线 $d''e''f'' /\!/ OY_W$ 轴；水平投影为$\triangle def$。可以判定$\triangle DEF$ 是水平面，其水平投影反映$\triangle DEF$ 的实形。

四边形 $BCEF$ 的侧面投影 $b''c''(e'')f''$是与 OZ 轴倾斜的直线，水平投影和正面投影 $bcef$、$b''c''e''f''$为类似形，可以判定 $BCEF$ 为侧垂面。

四边形 $ACED$ 的三面投影 $aced$、$a'c'e'd'$ 和 $a''c''e''d''$均为类似形，可以判定四边形 $ACED$ 是一般位置平面。同理，可判定四边形 $ABFD$ 也是一般位置平面。

3.4 平面上点和直线的投影

3.4.1 平面上的直线

直线在平面上的条件：

(1) 一直线通过属于该平面的两点；

(2) 一直线通过属于该平面的一点，且平行于属于该平面的另一直线。

【例 3.3】 如图 3.12 所示，已知平面$\triangle ABC$，试作出属于该平面的任一直线。

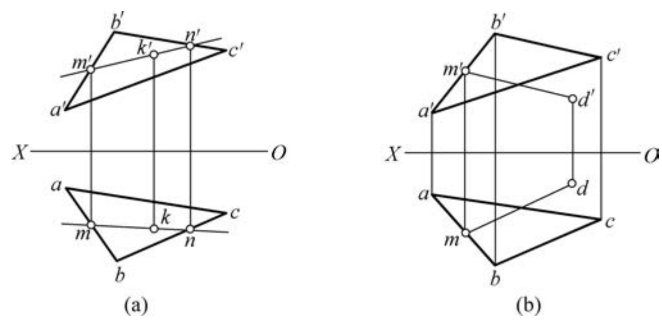


图 3.12 属于平面的直线

作法一(根据条件(1)作图，如图 3.12(a)所示)：

任取属于直线 AB 的一点 M，它的投影分别为 m 和 m'；再取属于直线 BC 的一点 N，它的投影分别为 n 和 n'。连接两点的同面投影。由于 M、N 皆属于平面，所以 mn 和 $m'n'$所表示的直线MN 必属于$\triangle ABC$ 平面。

作法二(根据条件(2)作图，如图 3.12(b)所示)：

通过属于平面的任一点 M(投影为 m 和 m')，作直线 MD(投影为 md 和 $m'd'$)平行于已知直线 BC(投影为 bc 和 $b'c'$)，则直线 MD 必属于$\triangle ABC$。

3.4.2 平面上的点

点在平面上的条件：若点属于直线，直线属于一平面，则点必属于该平面。

因此，在取属于平面的点时，首先应取属于平面的线，再取属于该线的点。

图 3.12(a)表示了在属于△ABC 平面的直线 MN 上取一点 K 的作图方法。由于 K 在 MN 上，所以根据点属于直线的特性可知，k'必在 $m'n'$上，再过 k'作 OX 轴的垂线，交 mn 于 k，则 k 和 k'即为点 K 的两面投影。

【例 3.4】 如图 3.13(a)所示，已知属于△ABC 平面的点 E 的正面投影 e'，求作其水平投影。

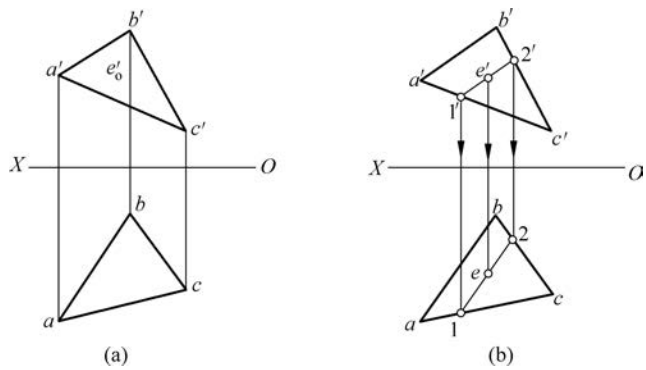


图 3.13　属于平面的点

分析：因为点 E 属于△ABC 平面，故过 E 作一条属于△ABC 平面的直线，则点 E 的投影必属于相应直线的同面投影。

具体作图过程如图 3.13(b)所示，过 E 作直线 $I\ II$ 平行于 AB，即过 e'作 $1'2'/\!/a'b'$，再求出水平投影 12；然后过 e'作 OX 轴的垂线与 12 相交，交点即为点 E 的水平投影 e。

1. 简答题

(1) 平面立体的三视图与立体顶点、边线及围成立体的各平面图形的投影有什么关系？

(2) 已知一点的任意两个投影，能够作出第三个投影吗？为什么？

(3) 投影面平行线和投影面垂直线各有什么位置特点？其各分为哪三种？投影分别有什么特性？

(4) 投影面平行面和投影面垂直面各有什么位置特点？其各分为哪三种？投影分别有什么特性？

2. 分析题

(1) 分析图 3.14 所示立体及其三视图中各投影面平行线的投影，并判断其具体类型

及重影点的可见性(不可见的点加括号表示)。

(2) 分析图 3.15 所示立体及其三视图中各投影面垂直线的投影,并判断其具体类型及端点的可见性(不可见的点加括号表示)。

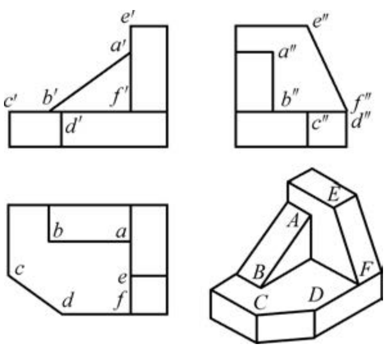


图 3.14　三视图中投影面平行线的投影

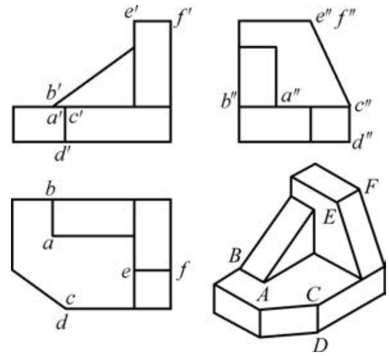


图 3.15　三视图中投影面垂直线的投影

(3) 分析图 3.16 所示立体及其三视图中各投影面垂直面的投影,并判断其具体类型。

(4) 分析图 3.17 所示立体及其三视图中各投影面平行面的投影,并判断其具体类型。

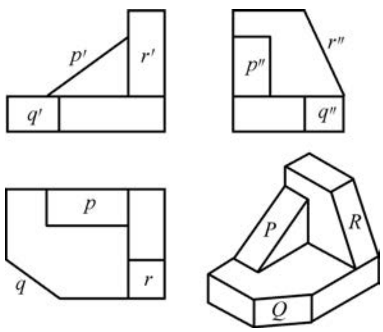


图 3.16　三视图中投影面垂直面的投影

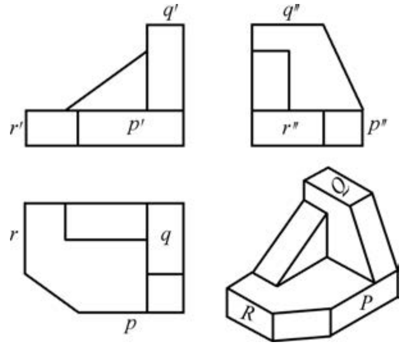


图 3.17　三视图中投影面平行面的投影

(5) 对照图 3.18 所示立体及其三视图,找出其中的一般位置平面 P,在图中分别进行标注,并分析倾斜平面投影的类似性特征。

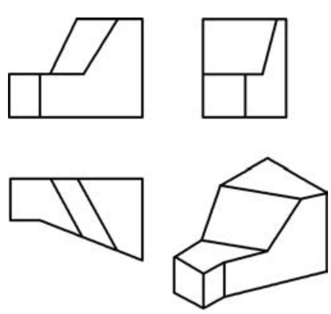


图 3.18　立体及其三视图中的一般位置平面