第5章

图的基本概念

图论中所说的图与一般所说的几何图形或代数函数的图形是完全不同的。图论中的图是指一些点的集合和若干点对的集合所组成的系统。现实世界中许多现象都能用这种系统来表示。例如,一个企业的各管理部门和生产车间,可以用点来表示,如果两部门之间有直属的领导关系,就用线将表示这两个部门的点连接起来,这就形成了一个图。对于这种图,点的位置以及线的曲直是无关紧要的,只关心点的多少和这些线连接了哪些点。对它们进行数学抽象就得到了作为数学概念的图。

本章主要介绍无向图的一些基本概念,包括无向图、路、圈、子图、同构、偶图、补图、连通图、欧拉图、哈密顿图、图的矩阵表示、带权图等。

5.1 图的基本定义

历史上一些著名问题的解决都归结为由点和线组成的图的某种问题。这种由点和线组成的图被广泛地使用着。然而,图论的研究对象——图,也没有统一的定义,但这并不妨碍对它的研究和应用。这里采用下面的定义。

定义 5.1 设 V 是一个非空有限集,集合 $E\subseteq \wp_2(V)=\{\{u,v\}\mid u,v\in V,u\neq v\}$,二元组$(V,E)$称为一个无向图。$V$ 中的元素称为顶点(或结点),V 为顶点集;E 中的元素称为边,E 为边集。

无向图(V,E)常用字母 G 代替,即 $G=(V,E)$。如果$|V|=n$、$|E|=m$,则称 G 为一个具有 n 个顶点 m 条边的图,记为(n,m)图。

如果 $x=\{u,v\}$是无向图 G 的一条边,则 x 是连接顶点 u 和 v 的边,u 和 v 是边 x 的端点,且记为 $x=uv$ 或 $x=vu$,此时,称顶点 u 与 v 邻接,顶点 u(同样地,顶点 v)与边 x 互相关联。

如果无向图 G 中的两条边 x 和 y 仅有一个公共端点,则称边 x 与 y 邻接。

例 5.1 无向图 $G=(V,E)$是一个(4,5)图,其中顶点集 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,边集 $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\}\}$,顶点 v_1 与 v_2、v_4 邻接,顶点 v_1 与 v_3 不

邻接，顶点 v_1 与边 $\{v_1,v_2\}$、$\{v_1,v_4\}$ 关联，顶点 v_1 与边 $\{v_3,v_4\}$ 不关联，边 $\{v_1,v_2\}$ 与 $\{v_1,v_4\}$ 邻接，边 $\{v_1,v_2\}$ 与 $\{v_3,v_4\}$ 不邻接。

当把无向图 G 的边集 E 看作顶点集 V 上的二元关系时，首先，由于每条边的两个端点必须互不相同，所以 E 是反自反的；其次，由于每条边的两个端点构成的二元子集中的元素是没有次序的，所以 E 是对称的。因此，一个无向图 G 就是非空有限集 V 上以及 V 上的一个反自反且对称的二元关系 E 组成的有限关系系统。研究无向图，就是研究这个有限关系系统。

有限关系可以用图示方法表示，正是有了这种图示方法，使得图有直观的外形，富于启发性，而被广泛采用。一般地，无向图 G 的每个顶点在平面上用一个点或一个圆圈表示，在旁边写上顶点的名称，如果 $x=\{u,v\}$ 是 G 的一条边，则在代表顶点 u 和 v 的两点间连一条线，这样得到的图形就是 G 的图解。以后，图和它的图解不作区分，图解也说成图。

例 5.2 无向图 $G=(V,E)$ 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，边集 $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\}\}$，则 G 可用图 5.1(a) 或图 5.1(b) 表示，由此可见图的图解表示不唯一。

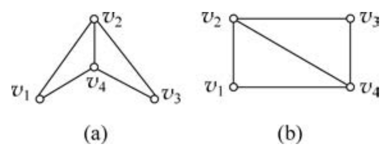


图 5.1

在无向图中，不与任何顶点相邻接的顶点称为孤立顶点。

仅由孤立顶点构成的图称为零图，仅由一个孤立顶点构成的图称为平凡图。

在无向图中，如果连接两顶点的边不止一条，则称这几条边为平行边，平行边的数目称为平行边的重数，有平行边的图称为多重图。

在无向图中，仅与一个顶点相关联的边称为环，有环的图称为带环图。

例 5.3 图 5.2(a) 所示的图为带环图，图 5.2(b) 所示的图为多重图。

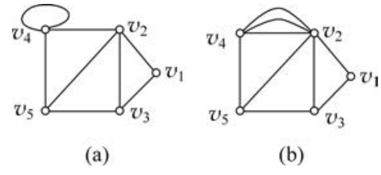


图 5.2

允许有平行边和环存在的图称为伪图，不含有平行边和环的图称为简单图。例 5.1 和例 5.2 中的图均为简单图。

定义 5.1 所定义的图就是简单图。图论的许多重要结果是针对简单图而证明的，它作了易于抽象的数学处理。但在许多应用中有时出现伪图或多重图。研究了简单图后，其结论在大多数情况下很容易推广到伪图或多重图，并不妨碍应用。今后如果不加说明只讨论简单图。

定义 5.2 设 V 是一个非空有限集，$A\subseteq V\times V\setminus\{(u,u)\mid u\in V\}$，二元组 $D=(V,A)$ 称

为一个有向图。

V 中的元素称为顶点(或结点),A 中的元素(u,v)称为从 u 到 v 的弧或有向边。

如果 $x=(u,v)$和 $y=(v,u)$均为 A 的弧,则称 x 和 y 为一对对称弧。

不含对称弧的有向图称为定向图。

例 5.4 图 5.3(a)所示的图为有向图,图 5.3(b)所示的图为定向图。

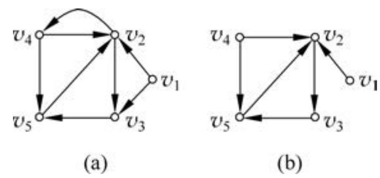


图 5.3

类似于无向图,可以定义有向图的环、多重弧、带环有向图、多重有向图、简单有向图。

本书第 7 章将专门研究有向图,所以,如无特殊说明,第 5 章、第 6 章的图均指无向图。

定义 5.3 设图 $G=(V,E)$,$v_i\in V$,与顶点 v_i 相关联的边的数目称为顶点 v_i 的度数,简称为度,记为 $\deg(v_i)$。

显然,对(n,m)图 G 的每个顶点 v,有 $0\leqslant\deg(v)\leqslant n-1$。引入记号

$$\delta(G)=\min_{v\in V}\{\deg(v)\},\quad \Delta(G)=\max_{v\in V}\{\deg(v)\}$$

度数为 1 的顶点称为悬挂点,与悬挂点相关联的边为悬挂边。

定理 5.1 设 G 是一个(n,m)图,则 G 中顶点度数之和等于边数的 2 倍,即

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$$

证 因为 G 中每条边必关联两个顶点,一条边为顶点度数之和的贡献是 2,所以,m 条边为顶点度数之和的贡献是 $2m$,因此,在 G 中,顶点度数的和等于边数的 2 倍,$\sum\limits_{i=1}^{n}\deg(v_i)=2m$。证毕。

此定理是图论中的基本定理,常称为“握手定理”,它有一个重要的推论。

推论 5.1 在任何图中,奇度数顶点的个数为偶数。

证 设 $G=(V,E)$是一个(n,m)图,由握手定理可知,奇度数顶点的度数之和+偶度数顶点的度数之和=全图顶点度数之总和$=2m$。

因为全图顶点度数之和为偶数,偶度数顶点的度数之和也为偶数,所以,奇度数顶点的度数之和必为偶数,因此,奇度数顶点的个数必为偶数。证毕。

定义 5.4 如果图 G 中每个顶点的度数均为 d,则称 G 为 d 度正则图。

一个具有 n 个顶点的 $n-1$ 度正则图称为 n 个顶点的完全图,记为 K_n。

显然,在 K_n 中每个顶点与其余顶点均邻接,因此,K_n 中共有$\frac{1}{2}n(n-1)$条边。

例 5.5 图 5.4(a)所示为 K_4,图 5.4(b)所示为 K_5。

例 5.6 证明:在 $n(n\geqslant 2)$个人的团体里,至少有两个人,他们在此团体中有相同数目的朋友。

证 如果用顶点表示人,两个人是朋友就在相应的两个顶点间连接一条边,这样就得到

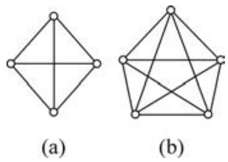


图 5.4

了具有 n 个顶点的图 G，每个人的朋友数就是相应顶点的度，于是，问题就变成了证明在 $n(n\geqslant 2)$ 个顶点的图 G 中，至少有两个顶点度数相同。

假设 G 中 n 个顶点的度数皆不相同。因为一个顶点的最大度数为 $n-1$，最小度数为 0，所以，G 中各顶点的度只能为 $0,1,\cdots,n-1$。

又因为 0 度顶点不与其他任何顶点相邻，而 $n-1$ 度顶点与其他任何顶点都相邻，出现了矛盾，因此，在 G 中至少有两个顶点度数相同。证毕。

定义 5.5 设 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 是两个图，如果存在从 V 到 V' 的双射 f，使得对 $\forall v_i$、$v_j\in V$，$\{v_i,v_j\}\in E$，当且仅当 $\{f(v_i),f(v_j)\}\in E'$，则称 G' 同构于 G，称 f 为同构映射。

上述定义说明，在两个图的各顶点之间，如果存在着一一对应关系，而且这种对应关系又保持了顶点间的邻接关系，那么这两个图就是同构的。

例 5.7 在图 5.5 中，(a)和(b)两图是同构的，其映射为 $f(i)=v_i(i=1,2,\cdots,6)$。

两图同构的必要条件是：顶点数相等、边数相等、度数相同的顶点数相等。但是，上述 3 个条件并不是两图同构的充分条件。

例 5.8 在图 5.6 中，(a)和(b)两图虽然满足上述 3 个条件，但它们不同构。因为图 5.6(a)中的 4 个度为 3 的顶点 v_2、v_3、v_7、v_6 是顺次相邻的，而图 5.6(b)中的 4 个度为 3 的顶点 v_2、v_6、v_8、v_4 却不是顺次相邻的。

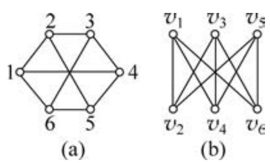


图 5.5

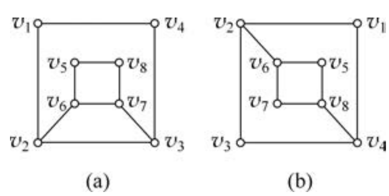


图 5.6

到目前为止，还没有一种简单有效的方法来判断图的同构，故同构图的判定是图论中一个重要而未解决的问题。

习题

1. 画出包含 4 个顶点的所有不同构的简单无向图。
2. 具有 n 个顶点的 d 度正则图有多少条边？
3. 设 G 是 (n,m) 图，v 是 G 中度为 d 的顶点，e 为 G 中一条边。

(1) 在 G 中去掉 v 后，还有多少顶点和多少条边？

(2) 在 G 中去掉 e 后，还有多少顶点和多少条边？

4. 在某次宴会上，许多人互相握手，证明：握过奇数次手的人数为偶数。
5. 证明：图 5.7 中两个图同构，它们是彼德森(Petersen)图。

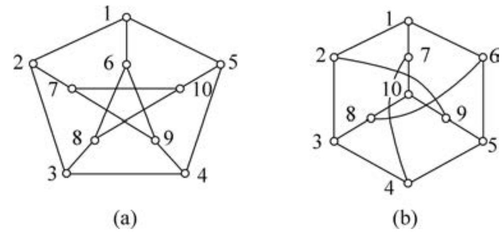


图 5.7

5.2 子图和补图

在解决一些实际问题时，有时从一个图的子图或补图着手能够更有效地解决问题。在进一步研究图的性质和图的局部结构时，子图和补图都是相当重要的概念。

定义 5.6 设 $G=(V,E)$ 和 $G'=(V',E')$ 是两个图。

(1) 如果 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的子图。

(2) 如果 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称 G' 是 G 的真子图。

(3) 如果 $V'=V$ 且 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的生成子图。

(4) 如果 $E'\subseteq E$，则以 E' 为边集、以 E' 中边的所有端点为顶点集，构成的子图称为由 E' 导出的 G 的子图，记为 $G(E')$。

(5) 如果 $V'\subseteq V$，则以 V' 为顶点集，以端点均在 V' 中的 G 的所有边为边集，构成的子图称为由 V' 导出的 G 的子图，记为 $G(V')$。

例 5.9 在图 5.8 中，(b)～(d)均是(a)的子图，且都为真子图，(b)是(a)的生成子图，(c)是顶点子集 $\{v_1,v_2,v_4\}$ 导出的(a)的子图，(d)是边子集 $\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\}\}$ 导出的(a)的子图。

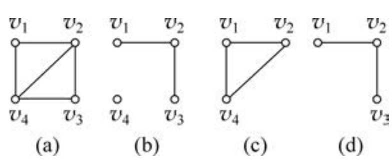


图 5.8

显然，每个图都是自身的生成子图，仅由图的所有顶点构成的图也是图的生成子图，这两种子图都称为平凡子图。

给定一个图，除可以得到它的子图外，还可以定义它的补图。

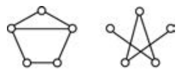
定义 5.7 设 $G=(V,E)$ 是一个图，则 $\overline{G}=(V,\wp_2(V)\setminus E)$ 称为 G 的补图，$\overline{G}$ 也记为 G^c。如果 G 与 $\overline{G}$ 同构，则称 G 为自补图。

显然，$\overline{G}$ 是由 G 的所有顶点和为了使 G 成为完全图所需要添加的那些边所组成的图。两个顶点 u 与 v 在 $\overline{G}$ 中邻接当且仅当 u 与 v 在 G 中不邻接。

例 5.10 在图 5.9 中，(a)是(b)的补图，(b)也是(a)的补图。

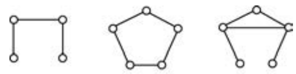
显然，如果 $\overline{G}$ 是 G 的补图，那么 G 也是 $\overline{G}$ 的补图。因此，G 与 $\overline{G}$ 互为补图。

例 5.11 图 5.10(a)是 4 个顶点的自补图,(b)和(c)是 5 个顶点的自补图。



(a) (b)

图 5.9



(a) (b) (c)

图 5.10

实际上,如果 n 个顶点的图 G 是自补图,因为 G 的边数与 $\overline{G}$ 的边数相同,所以,K_n 的边数为偶数。显然不存在 3 个或 6 个顶点的自补图。

例 5.12 证明:一个自补图一定有 $4k$ 或 $4k+1$ 个顶点(k 为正整数)。

证 设 $G=(V,E)$是自补图,且 $G=(n,m)$,根据自补图的定义,G 与 $\overline{G}$ 同构,所以 $\overline{G}=(n,m)$。

由于 K_n 有$\frac{n(n-1)}{2}$条边,根据补图的定义,得 $2m=\frac{n(n-1)}{2}$,所以 $4m=n(n-1)$。

若 n 为偶数,则 $n-1$ 为奇数,欲使 $4m=n(n-1)$,必有 $n=4k$(k 为正整数)。

若 n 为奇数,则 $n-1$ 为偶数,欲使 $4m=n(n-1)$,必有 $n-1=4k$(k 为正整数),得 $n=4k+1$(k 为正整数)。

因此,一个自补图一定有 $4k$ 或 $4k+1$ 个顶点(k 为正整数)。证毕。

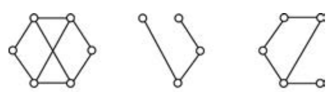
定义 5.8 设图 $G'=(V',E')$是图 $G=(V,E)$的子图,若图 $G''=(V'',E'')$满足:

(1) $E''=E-E'$;

(2) V''包含 E''中的边所关联的顶点。

则称 G''是 G'相对于 G 的补图。

例 5.13 在图 5.11 中,(c)是(b)相对于(a)的补图,但(b)不是(c)相对(a)的补图。

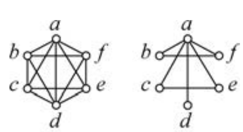


(a) (b) (c)

图 5.11

习题

1. 图 5.12(a)和图 5.12(b)所示为图 G 及其子图 H。画出 H 的补图 $\overline{H}$ 以及 H 相对于 G 的补图 H'。



(a) (b)

图 5.12

2. 画出包含 4 个顶点的所有的简单无向图及其补图。

3. 画出图 K_4 的所有不同构的生成子图。

5.3　路、圈与连通图

路与圈是图论中两个重要而又基本的概念，而图的最基本性质是它是否连通。本节介绍路、圈和连通图的概念。

定义 5.9　设图 $G=(V,E)$ 的一个点边交替序列 $P=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_mv_m$，满足 v_{i-1} 和 v_i 是边 e_i 的端点，则称 P 为 v_0-v_m 通道，简记为 $v_0v_1v_2\cdots v_m$。m 为通道的长度。当 $v_0=v_m$ 时，称 P 为闭通道。

由上述定义可知，在通道中，顶点和边均可重复出现。在计算通道的长度时，重复的边按重复的次数计算。

定义 5.10　如果图中一条通道上的各边互不相同，则称该通道为迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则称该闭通道为闭迹。

定义 5.11　如果图中一条通道上的各顶点互不相同，则称该通道为路。如果一条闭通道上的各顶点互不相同，则称该闭通道为圈或回路。

例 5.14　在图 5.13 中，$P_1=v_1v_2v_3v_5v_2v_4$ 是一条通道，它是迹，但不是路；$P_2=v_1v_2v_3v_1$ 既是闭迹又是圈。

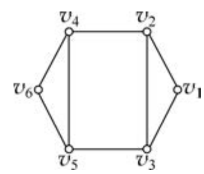


图　5.13

定理 5.2　设 $G=(V,E)$ 是含有 n 个顶点的图，则：

(1) G 中任何路的长度小于或等于 $n-1$；

(2) G 中任何圈的长度小于或等于 n。

证　在任何路中，包含的所有顶点都是互不相同的。在长度为 k 的任何路中，不同顶点数为 $k+1$。由于 G 中仅有 n 个不同顶点，所以 $k+1\leqslant n$，得 $k\leqslant n-1$，即任何路的长度小于或等于 $n-1$。

而对长度为 k 的圈来说，不同的顶点数为 k，所以 $k\leqslant n$，即任何圈的长度小于或等于 n。证毕。

定义 5.12　设 G 是一个图，如果 G 中任意两个不同的顶点间至少有一条路，则称 G 是一个连通图。

直观上，在一个连通图的图解上，对任两顶点，从一个顶点沿着某些边走，一定能走到另一点。于是，一个不连通图的图解被分成若干互不相连的几个部分，每个部分是连通的，称为一个连通分支。

连通图只有一个连通分支，就是图本身。

例 5.15　图 5.13 是一个连通图。而图 5.14 是一个具有 3 个连通分支的不连通图。

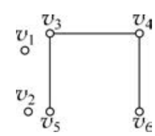


图　5.14

定理 5.3　设 $G=(V,E)$ 是具有 n 个顶点的图，如果在 G 中任两个不邻接的顶点 u 和 v，有 $\deg(u)+\deg(v)\geqslant n-1$，则 G 是连通的。

证　反证法。假设 G 不连通，则 G 有两个或更多个连通分支。

设一个连通分支为 $G_1=(V_1,E_1)$，而其他所有连通分支构成的子图为 $G_2=(V_2,E_2)$。

设 G_1 中有 n_1 个顶点，其中一个顶点为 u，G_2 中 $n-n_1$ 个顶点，其中一个顶点为 v。

因为 $\deg(u)\leqslant n_1-1$，$\deg(v)\leqslant n-n_1-1$，故 $\deg(u)+\deg(v)\leqslant n-2<n-1$，这与给定的前提矛盾，因此 G 是连通的。证毕。

定理 5.4 设 $G=(V,E)$ 是一个至少有一个顶点不是孤立顶点的图，如果 $\forall v\in V$，$\deg(v)$ 是偶数，则 G 中有圈。

证 考虑 G 中一条最长的路 $P=v_1v_2\cdots v_n$，由于 $\forall v\in V$，$\deg(v)$ 是偶数，所以 $\deg(v_1)\geqslant 2$，故至少还有一个顶点 $u\neq v_2$ 与 v_1 邻接。

由于 P 是最长的路，所以，u 必是 $v_3,\cdots,v_n$ 中的某个 v_i，于是，$v_1v_2\cdots v_iv_1$ 是 G 中的一个圈。证毕。

定理 5.5 如果图 G 中的两个不同顶点 u 与 v 之间有两条不同的路，则 G 中有圈。

证 设 P_1 和 P_2 是 G 中两个不同顶点 u 与 v 之间的两条不同的路。由于 $P_1\neq P_2$，所以，必有一条边在 P_2 上而不在 P_1 上，不妨设该边为 $x=u'v'$。

由 P_1 和 P_2 上的顶点和边构成的子图记为 $P_1\cup P_2$，于是，$P_1\cup P_2$ 是 G 的一个连通子图，并且 $P_1\cup P_2-x$ 是 G 的一个连通子图，从而在 $P_1\cup P_2-x$ 中有 u' 和 v' 间的路，记为 $P=u'\cdots v'$，因此，$P+x=u'\cdots v'u'$ 就是 G 中的一个圈。证毕。

习题

1. 设 u 和 v 是图 G 的两个不同顶点，如果 u 和 v 间有两条不同的通道(迹)，问 G 中是否有圈?
2. 证明：一个连通的 (n,m) 图中 $m\geqslant n-1$。
3. 证明：如果 G 是一个 (n,m) 图，且 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，则 G 是连通图。
4. 证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共顶点。
5. 证明：如果图 G 不是连通图，则 $\bar{G}$ 是连通图。
6. 证明：一个图 G 是连通的，当且仅当将 V 划分成两个非空子集 V_1 和 V_2 时，G 总有一条连接 V_1 的一个顶点与 V_2 的一个顶点的边。

5.4 偶图

下面研究偶图的性质，偶图也称为二分图、二部图、双图等。

定义 5.13 如果图 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 有一个二划分 $\{V_1,V_2\}$，使得 G 中任何一条边的两个顶点，一个属于 V_1，另一个属于 V_2，则称 G 为偶图，并记为 $G=(V_1,V_2,E)$。

定义 5.14 在偶图 $G=(V_1,V_2,E)$ 中，如果 V_1 的每个顶点都与 V_2 的每个顶点邻接，则称 G 为完全偶图。如果 $|V_1|=n$，$|V_2|=m$，则完全偶图 G 可记为 $K_{n,m}$。

显然，$K_{n,m}$ 有 $n\cdot m$ 条边。

例 5.16 在图 5.15 中，给出了 $K_{2,3}$ 和 $K_{3,3}$ 的图示。

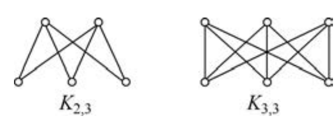


图 5.15

$K_{3,3}$ 是重要的偶图，它与 K_5 一起在平面图的判定中起着重要的作用。

定理 5.6 图 G 是偶图，当且仅当 G 中所有圈的长度均为偶数。

证 设 $G=(V,E)$ 是偶图，则 V 有一个二划分 $\{V_1,V_2\}$，使得对任一 $\{u,v\}\in E$，有 $u\in$

V_1、$v \in V_2$。

设 $C=v_0 v_1 v_2 \cdots v_k v_0$ 是 G 的一个长为 $k+1$ 的圈，不妨设 $v_0 \in V_1$，则 v_0、v_2、v_4、$\cdots \in V_1$、v_1、v_3、v_5、$\cdots \in V_2$。因为 $\{v_k, v_0\} \in E$ 且 $v_0 \in V_1$，所以，必有 $v_k \in V_2$，故 k 必为奇数，所以，C 的长度为偶数。

设 $G=(V,E)$ 中所有圈的长度均为偶数。不妨设 G 是连通图；否则考虑 G 的每个连通分支。定义 V 的一个二划分 $\{V_1, V_2\}$ 为：$V_1=\{v_i \mid v_i$ 与固定顶点 v_0 间的最短路的长度为偶数$\}$，$V_2=V-V_1$。

假设存在一条边 $\{v_i, v_j\} \in E$ 且 v_i、$v_j \in V_1$，因为 G 是连通的，由 V_1 的定义知，v_i 与 v_0 间的最短路的长度为偶数，v_j 与 v_0 间的最短路的长度也为偶数，于是，由 v_0 到 v_i，边 $\{v_i, v_j\}$ 及 v_j 到 v_0 构成的圈长度为奇数，这与给定的前提矛盾，所以，v_i、v_j 不能同时属于 V_1。类似地可证明边 $\{v_i, v_j\}$ 的两端点 v_i、v_j 不能同时属于 V_2。因此，边 $\{v_i, v_j\}$ 的两端点必有一个属于 V_1，另一个属于 V_2，因此 G 是一个偶图。证毕。

定义 5.15　图 $G=(V,E)$ 的边子集 $M \subseteq E$，若 M 中任两边皆不相邻，则称 M 为 G 的一个匹配。若不存在匹配 M'，可使 $M \subset M'$，则称 M 为极大匹配。边数最多的匹配称为 G 的最大匹配。

定义 5.16　在偶图 $G=(V_1, V_2, E)$ 中，若 V_1 的每一点都是匹配 M 中的边的端点，则称 M 为从 V_1 到 V_2 的一个完全匹配。

显然，完全匹配必是最大匹配，反之却不一定为真。存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配的必要条件为 $|V_1| \leqslant |V_2|$。

例 5.17　在图 5.16 中给出了一个偶图，它具有互补结点子集 V_1 和 V_2，以及从 V_1 到 V_2 的完全匹配(用粗线表示)。

下面给出一个说明存在完全匹配的充分必要条件定理。

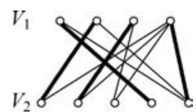


图　5.16

定理 5.7　设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是一个偶图，则 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配，当且仅当对 V_1 中每 k 个结点($k=1,2,\cdots,|V_1|$)至少和 V_2 中 k 个结点相邻(这个条件称为相异性条件)。

证　必要性。设偶图 G 满足相异性条件，下面对 $|V_1|$ 用数学归纳法进行证明。

$|V_1|=1$ 时，因为 G 满足相异性条件，显然，存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

假设 $|V_1| \leqslant n-1$ 时，存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

$|V_1|=n$ 时，设 $S \subseteq V_1$，$\tau(S)$ 表示与 S 中结点相邻接的 V_2 中的结点集合。

若对 V_1 的任何真子集 S，都有 $|S|<|\tau(S)|$，可按下述方法构造出从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

任取一边 (v_i, v_j)，使得 $v_i \in V_1$、$v_j \in V_2$。从图 G 中删去结点 v_i、v_j，得到图 G'。显然，图 G' 是具有互补结点子集 $V_1-\{v_i\}$，$V_2-\{v_j\}$ 的偶图，并且满足相异性条件。根据归纳假设，存在从 $V_1-\{v_i\}$ 到 $V_2-\{v_j\}$ 的完全匹配 M'。故 $M=M' \cup \{(v_i, v_j)\}$ 就是从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

若存在一个 V_1 的真子集 S，使得 $|S|=|\tau(S)|$，可按下述方法构造出从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

首先，由于 $|S|=|\tau(S)|$ 且图 G 满足相异性条件，因此，在具有互补结点子集 S 和

$\tau(S)$的偶图中，相异性条件满足。由归纳假设，存在从 S 到 $\tau(S)$的完全匹配 M'。

其次，若假设具有互补结点子集 V_1-S 和 $V_2-\tau(S)$的偶图不满足相异性条件，也就是存在 $S'\subseteq V_1-S$，使得 $|S'|>|\tau(S')|$。由于 $|S|=|\tau(S)|$，有 $|S\cup S'|>|\tau(S)\cup\tau(S')|$，这与 G 满足相异性条件矛盾。故具有互补结点子集 V_1-S 和 $V_2-\tau(S)$ 的偶图满足相异性条件。由归纳假设，存在从 V_1-S 到 $V_2-\tau(S)$的完全匹配 M''。

综上所述，$M=M'\cup M''$必为从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

充分性。若偶图 G 中存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配 M，那么对于 V_1 中每 k 个结点，必在 V_2 中有 k 个结点与其邻接，故相异性条件满足。证毕。

例 5.18 对图 5.16 所示的偶图，满足相异性条件，因此其中有完全匹配。对图 5.17 所示的偶图，不满足相异性条件，因此其中不存在完全匹配。

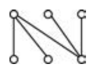


图 5.17

不难看出，当偶图中的结点较多时，利用相异性条件判断其中是否存在完全匹配，十分复杂。下面介绍一个判断偶图存在完全匹配的充分条件，这个条件对于任何偶图都不难确定。

定理 5.8 设 $G=(V_1,V_2,E)$是一个偶图，如果存在某个正整数 $t>0$，使得：

(1) V_1 中的每个结点，至少有 t 条边与其相关联；

(2) V_2 中的每个结点，至多有 t 条边与其相关联。

则 G 中必存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配(这两个条件称为 t 条件)。

证 如果条件(1)成立，则与 V_1 中的具有 k 个结点的任意子集相关联边的总数，最小应是 kt。

如果条件(2)成立，这些边必定至少与 V_2 中的 tk 个结点相关联。因此，V_1 中每 k 个结点至少和 V_2 中 k 个结点相邻接，由定理 5.7 知，存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配。证毕。

例 5.19 对图 5.18 所示的偶图，满足定理 5.8 的条件，其中 $t=3$，因此存在从 V_1 到 V_2 的完全匹配。

定义 5.17 如果偶图 $G=(V,U,E)$中的一条径由不属于匹配 M 的边和属于 M 的边交替组成，且此径的两个端点不是 M 中边的端点，则称此径为 G 中关于匹配 M 的交替链。

例 5.20 在图 5.19 所示的偶图中，粗线表示匹配，$P=v_2u_1v_3u_4$ 是交替链。

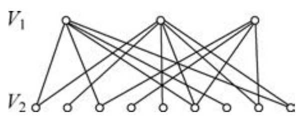


图 5.18

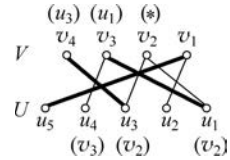


图 5.19

对于偶图来说，要利用交替链求出偶图的最大匹配。具体方法如下。

① 首先，在偶图 G 中任意找一个匹配 M。

② 其次，如果能找出一条关于匹配 M 的交替链 P，则把 P 中属于 M 的边从 M 中删去，而把 P 中不属于 M 的边添到 M 中，得到 G 中另一匹配 M'，由于 M'比 M 多一条边，因此，反复进行这样的过程，直至找不出关于 M'的交替链为止，就可确认 M'为 G 中的最大匹配。

这种方法的证明是比较复杂的。在此不予以证明。

下面介绍一种求交替链的标记法。设偶图 $G=(V,U,E)$的任一匹配 M。

首先把 V 中所有不是 M 中边的端点用(*)加以标记，然后交替进行以下所述的步骤(1)和(2)。

(1) 选 V 的一个新加以标记的结点 v_i，用(v_i)标记不通过 M 中的边与 v_i 邻接且未加以标记的 U 的所有结点。对所有 V 的新加以标记的结点重复这一过程。

(2) 选 U 的一个新加以标记的结点 u_j，用(u_j)标记通过 M 中的边与 u_j 邻接且未加以标记的 V 的所有结点。对所有 U 的新加以标记的结点重复这一过程。

直至标记到 U 的一个不与 M 中任何边邻接的结点，或者已不可能标记更多结点时为止。出现前一种情况，可按标记次序的逆序返回到标记有(*)的结点，所经过的路就是所求的交替链。出现后一种情况，说明 G 中已不存在关于 M 的交替链。

例 5.21 在图 5.19 中，可按下述步骤求出交替链：

① 把 v_2 加以标记(*)；

② 从 v_2 出发，按步骤(1)，把 u_1 和 u_3 加以标记(v_2)；

③ 从 u_1 出发，按步骤(2)，把 v_3 标以(u_1)；从 u_3 出发，按步骤(2)，把 v_4 标以(u_3)；

④ 从 v_3 出发，按步骤(1)，把 u_4 标以(v_3)，因为 u_4 不是 M 中的点，按标记次序逆求出一条交替链 $P=v_2u_1v_3u_4$。

例 5.22 求出图 5.20 所示偶图中的最大匹配。

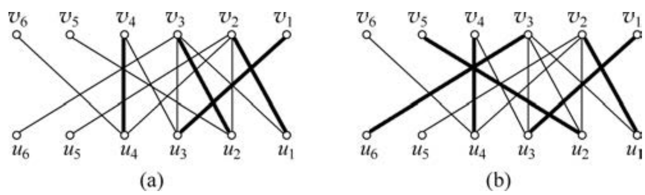


图 5.20

解 假设找到了一个匹配 $M=\{(v_1,u_3),(v_2,u_1),(v_3,u_2),(v_4,u_4)\}$，如图 5.20(a)中粗线所示。用标记法可以找到关于 M 的交替链 $P=v_5u_2v_3u_6$，按求最大匹配的方法，修改 $M=\{(v_1,u_3),(v_2,u_1),(v_3,u_6),(v_4,u_4),(v_5,u_2)\}$。这时用标记法已找不到交替链，所以，此时的匹配 M 就是最大匹配，如图 5.20(b)中粗线所示。

一般求最大匹配，可先令 $M=\varnothing$。

习题

1. 图 5.21 所示的两图是否是偶图？如果是，求出其顶点集的二划分。

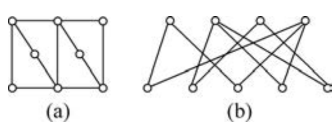


图 5.21

2. 证明：对于(n,m)偶图，必有 $m\leqslant\dfrac{n^2}{4}$。

3. 有 4 名学生：张明、王丽、李炎、赵红。分配他们去辅导 4 门课程：数学、外语、物理

和化学。张明精通外语和物理；王丽精通数学和化学；李炎精通数学、外语和物理；赵红精通物理。问应如何进行分配才不会使任何人去教他不懂的课程？

4. 某单位按编制有7个空缺岗位 $p_1, p_2, \cdots, p_7$，有10名申请者 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$，各申请者适合的工作岗位集合依次是 $\{p_1, p_5, p_6\}$、$\{p_2, p_6, p_7\}$、$\{p_3, p_4\}$、$\{p_1, p_5\}$、$\{p_6, p_7\}$、$\{p_3\}$、$\{p_2, p_5\}$、$\{p_1, p_3\}$、$\{p_1\}$、$\{p_5\}$，问如何安排他们的工作能使无工作人员最少？

5.5 欧拉图和哈密顿图

1727年，数学家欧拉的朋友向欧拉提出一个问题：位于立陶宛的哥尼斯堡城有一条横贯全城的普雷格尔河，河上有七座桥把河中的两座岛屿以及河岸连接起来，如图5.22(a)所示。当时那里的居民热衷于一个问题：游人从四块陆地中的任何一块出发，经过每座桥一次且仅一次，最后回到出发地，这是否可能？1736年，欧拉用图论的方法解决了这个问题，写了第一篇图论的论文，成为图论的创始人。后来称此问题为哥尼斯堡七桥问题。如果用顶点代表陆地，用边代表桥，便得到图5.22(b)所示的图。不难看出，哥尼斯堡七桥问题等价于在图5.22(b)中能否找到一个经过所有顶点和所有边的闭迹。

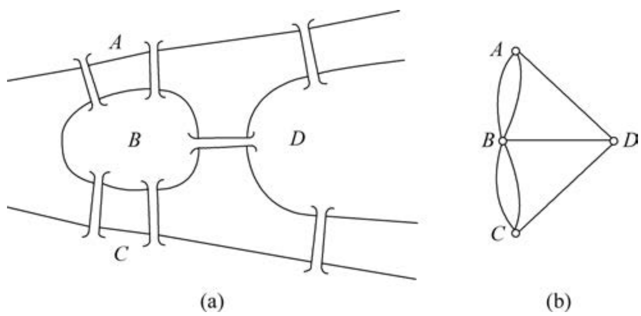


图 5.22

定义5.18 包含图的所有顶点和所有边的迹称为欧拉迹；包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在欧拉闭迹的图称为欧拉图。

定理5.9 图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且每个顶点的度数都是偶数。

证 如果 G 是欧拉图，则 G 中有包含所有顶点和所有边的闭迹，所以 G 是连通的。

当沿着这条闭迹行走时，每经过一个顶点，均涉及两条以前未走过的边，其一是沿着这条边进入这个顶点，而另一条边是顺着它离开这个顶点。由于这条迹是闭迹，所以，每个顶点的度数都是偶数。

如果图 G 连通且每个顶点的度数都是偶数，可按以下方法构造一条欧拉闭迹。

由定理5.4知 G 中有一个圈 Z_1。如果 Z_1 包含了 G 中的所有边，从而也就包含了 G 中的所有顶点，因此 Z_1 是欧拉闭迹，故 G 是欧拉图；否则 Z_1 不包含 G 中的所有边，这时从 G 上删去 Z_1 的所有边，得到图 G_1，显然 G_1 中所有顶点的度数仍为偶数。并且因为 G 是连通图，所以 Z_1 与子图 G_1 至少有一个公共点，故 G_1 中至少有一个顶点的度不为0。

再由定理5.4知 G_1 中有一个圈 Z_2。这时从 G_1 上删去 Z_2 的所有边，得到图 G_2，显然 G_2 中所有顶点的度数仍为偶数。如果 G_2 中还有边，则同样由定理5.4知 G_2 中有一个圈

Z_3,如此等等。最后必得到一个图 G_k,G_k 中无边。于是得到了 G 中的 k 个圈 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_k$,它们是两两无共同边的。

因此,G 中的每条边在且仅在一个圈上。于是,G 的边集被划分为 k 个圈。由于 G 是连通的,所以,每个圈 Z_i 至少与其他的某个圈有公共顶点,从而这些圈构成一个欧拉闭迹。

这可由数学归纳法得证:当 $k=1$,显然成立。假设当 $k=p\geqslant 1$ 时成立,得证对 $k=p+1$ 时也成立。

由归纳假设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_p$ 能构成一个闭迹,而 Z_{p+1} 必与其他的某个圈,如与 Z_1 有公共顶点 v,则从 v 开始先走 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_p$ 构成的闭迹后回到 v,再从 v 走过 Z_{p+1} 后回到 v,即得到由 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{p+1}$ 构成的闭迹。

这就证明了 G 是欧拉图。证毕。

由上述定理知,哥尼斯堡七桥问题的答案是否定的,因为从图 5.22(b)可以看到,4 个顶点的度数全为奇数,所以不存在欧拉闭迹。

推论 5.2 图 G 有欧拉迹当且仅当 G 连通且恰有两个奇数度顶点。

证 设 G 有欧拉迹,则由定理 5.9 的证明可知,除了这条迹的起点和终点外的每个顶点的度数都是偶数。

假设 G 连通且至多有两个奇数度顶点。

如果 G 没有奇数度顶点,则由定理 5.9 得 G 有欧拉闭迹。

今设 G 恰有两个奇数度顶点 u 和 v,则在 G 中 u 和 v 之间加一条边得到图 G'(G'可能是多重图),由定理 5.9 得 G'有欧拉闭迹。从这个欧拉闭迹中去掉所加于 u 和 v 之间的边,便得到 G 的欧拉迹。证毕。

对于一个图是否能一笔画出的问题,欧拉给出了完全彻底的解决。完全彻底是指他给出了一个充分必要条件,因而一笔画和非一笔画的界限彻底划清了。一个连通图是否能一笔画成,实质上就是判断在给定的图形中是否存在欧拉迹和欧拉闭迹的问题。

例 5.23 在图 5.23 中,(a)和(b)两图均可一笔画成,因为它们都存在欧拉迹。

如果一个连通图的奇数度顶点的个数不是 0 或 2,那么这个图就不能一笔画成。于是便产生了一个问题,即这时最少要多少笔才能画成呢?实际上,这个问题也与顶点度数的奇偶性有关。

与欧拉闭迹类似的问题是哈密顿圈的问题。1859 年,爱尔兰数学家哈密顿在给朋友的一封信中,首先谈到在正十二面体中的一个数学游戏。这种游戏要求游戏者沿着顶点标有城市名称的正十二面体的棱行走,找一条经过每个顶点一次且仅一次的圈,如图 5.24(a)所示。他把这个问题称为周游世界问题。从图 5.24(b)中粗线可以看出这样一条圈是存在的。

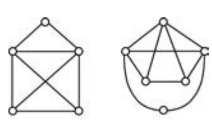

(a) (b)

图 5.23

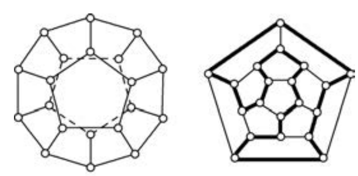

(a) (b)

图 5.24

定义 5.19 包含图的所有顶点的路称为哈密顿路;包含图的所有顶点的圈称为哈密顿

圈。存在哈密顿圈的图称为哈密顿图。

从上述定义可以看出，图 5.24(b)是哈密顿图。

显然，具有哈密顿路的图是连通的，每个哈密顿图是连通的，并且每个顶点的度都大于或等于 2。

例 5.24 对于完全图 $K_n(n\geqslant 3)$，由于 K_n 中任意两个顶点之间均有边，所以，从 K_n 的某一个顶点开始，总可以遍历其余顶点后，再回到该顶点，因此 K_n 是哈密顿图。

确定哈密顿路存在问题是一个很有实用价值的问题。在运筹学里，一条哈密顿路的确定是解决许多安排问题的钥匙。然而，迄今为止并未找到确定哈密顿圈存在的简单充分必要条件，只找到了几个简单的必要条件和一些充分条件。实际上，哈密顿圈问题仍是图论中尚未解决的主要问题之一。

定理 5.10 如果 $G=(V,E)$ 是一个哈密顿图，则对于顶点集 V 的每个非空真子集 S，均有 $W(G-S)\leqslant|S|$，其中 $W(G-S)$ 是 $G-S$ 中连通分支的个数。

证 设 C 是图 G 的一个哈密顿圈。用数学归纳法首先证明，对于顶点集 V 的每个非空真子集 S，均有 $W(C-S)\leqslant|S|$。

当 $|S|=1$ 时，从 C 中删去一顶点 v，则 C 变为哈密顿路，但仍连通，故 $W(C-S)=|S|=1$。

假设 $|S|=k$ 时，$W(C-S)\leqslant|S|$。

当 $|S|=k+1$ 时，先从 C 中删去 k 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$，即令 $S_k=\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$。

由归纳假设 $W(C-S_k)\leqslant|S_k|$。再从 $C-S_k$ 的任一连通分支中删去一个顶点 v_{k+1}，这时最多可使连通分支的个数增加 1，故 $W(C-S_{k+1})\leqslant k+1=|S_{k+1}|$。

由于 $C-S$ 是 $G-S$ 的生成子图，故 $W(G-S)\leqslant W(C-S)\leqslant|S|$。证毕。

上述定理给出的条件是哈密顿图的必要条件，不是充分条件。例如，在彼德森图中，满足这个条件，但它不是哈密顿图。利用该定理可以判别某些图不是哈密顿图。

例 5.25 图 5.25(a)所示的图 G，取 $S=\{v_6\}$，$G-S$ 如图 5.25(b)所示，由于 $W(G-S)=2>|S|=1$，所以 G 不是哈密顿图。

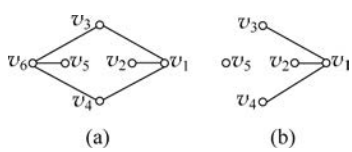


图 5.25

定理 5.11 设 G 是具有 $n(n\geqslant 3)$ 个顶点的图，如果 G 中每一对不邻接的顶点 u 和 v，有 $\deg(u)+\deg(v)\geqslant n$，则 G 是哈密顿图。

证 用反证法。假设定理不成立，则存在一个满足定理条件且边数最多的非哈密顿图 G，即 G 是一个非哈密顿图，且对 G 的任何一对不邻接的顶点 v_1 和 v_2 有 $G+\{v_1,v_2\}$ 是哈密顿图。因为 $n\geqslant 3$，所以 G 不是完全图。

设 u 和 v 是 G 中两个不邻接的顶点，因此 $G+\{u,v\}$ 是哈密顿图，在 G 中存在一条包含 $\{u,v\}$ 的哈密顿圈，且存在一条包含 G 中所有顶点的 $u-v$ 路 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_n(v_1=u,v_n=v)$。如果 v_1 与 $v_i(2\leqslant i\leqslant n)$ 邻接，则 v_{i-1} 与 v_n 不邻接；否则 $v_1v_iv_{i+1}\cdots v_nv_{i-1}v_{i-2}\cdots v_1$ 是 G 的一个哈密顿圈。

因此，对 $\{v_2,v_3,\cdots,v_{n-1}\}$ 中每个与 v_1 邻接的顶点，存在一个 $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_{n-1}\}$ 中与 v_n 不邻接的顶点，故 $\deg(u)+\deg(v)\leqslant\deg(u)+(n-1-\deg(u))=n-1$，矛盾。证毕。

上述定理的条件是充分的但非必要。

例 5.26　图 5.26 所示的图 G，显然任何一对不邻接的顶点的度数之和为 $4<6-1=5$，但 G 中有一条哈密顿路。

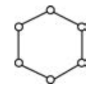


图　5.26

定理 5.12　设 G 是具有 n 个顶点的图，如果 G 中每一对不邻接的顶点 u 和 v，有 $\deg(u)+\deg(v)\geqslant n-1$，则 G 有哈密顿路。

证　因为 G 中每一对不邻接的顶点 u 和 v，有 $\deg(u)+\deg(v)\geqslant n-1$，所以 G 是连通图。下面只需证明 G 中最长路的长度为 $n-1$ 即可。

假设 G 中的最长路为 $v_1v_2\cdots v_k$，$k<n$，证明 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 必在 G 的同一个圈上。

假如 v_1 与 v_k 邻接，则 $v_1v_2\cdots v_kv_1$ 是 G 的一个圈。

假如 v_1 与 v_k 不邻接，则 $\deg(v_1)+\deg(v_k)\geqslant n-1$。设 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_r}(2=i_1<i_2<\cdots<i_r<k)$ 与 v_1 邻接，则 v_k 必与某个 $v_{i_s-1}(2\leqslant s\leqslant r)$ 邻接；否则，v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接，所以 $\deg(v_1)+\deg(v_k)\leqslant r+((k-1)-r)=k-1\leqslant(n-1)-1=n-2$，这是不可能的。于是，$v_1v_2\cdots v_{i_s-1}v_kv_{k-1}\cdots v_{i_s}v_1$ 是 G 的一个圈。总之 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 必在 G 的同一个圈 C 上。

由于 G 是连通的，$k<n$，所以，G 必有某个顶点 v 不在 C 上，但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。于是得到 G 的一个更长的路，这就出现了矛盾。证毕。

例 5.27　某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成的双色布，双色布中，每一种颜色至少可以和其他 3 种颜色搭配。证明：可以挑出 3 种不同的双色布，它们含有所有 6 种颜色。

证　用顶点表示纱，如果两种颜色的纱能够搭配织成双色布，则对应两个顶点之间有边，得到无向图 G。

根据题意，图 G 中的顶点数 $n=6$，任意顶点 v，$\deg(v)\geqslant 3$。

图 G 的任意一对不邻接顶点 (u,w)，$\deg(u)+\deg(w)\geqslant 3+3=6$，即 $\deg(u)+\deg(w)\geqslant n$，所以图 G 是哈密顿图，因此图 G 中有哈密顿圈 C。

记 $C=c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_1$，即 c_1 和 c_2、c_3 和 c_4、c_5 和 c_6 之间有边。

在原问题中，c_1 和 c_2、c_3 和 c_4、c_5 和 c_6 搭配织成双色布，所以这 6 种不同颜色的纱织成了 3 种不同的双色布。结论成立。证毕。

习题

1. 证明：设 G 是连通图，G 恰有 $2k(k\geqslant 1)$ 个奇数度顶点，则 G 的全部边可以排成 k 条开迹，而且至少有 k 条开迹。

2. 判别图 5.27 所示的两图能否一笔画成，如果不能一笔画成，那么能几笔画成。

3. (1) 画出一个图，使它既是哈密顿图又是欧拉图。

(2) 画出一个图，使它是哈密顿图但不是欧拉图。

(3) 画出一个图，使它不是哈密顿图但是欧拉图。

(4) 画出一个图，使它既不是哈密顿图又不是欧拉图。

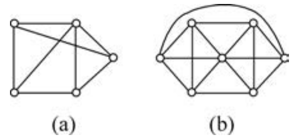


图　5.27

4. 完全偶图 $K_{n,m}$ 是哈密顿图的充分必要条件是什么？

5. 今有 n 个人，已知他们中的任何 2 个人合起来认识其余 $n-2$ 个人。证明：

(1) 当 $n \geqslant 3$ 时,这 n 个人能排成一列,使中间每个人都认识两旁的人;

(2) 当 $n \geqslant 4$ 时,这 n 个人能排成一个圆圈,使每个人都认识两旁的人。

5.6 图的矩阵表示

在前面曾经讨论过图的几何图形表示法,这对于分析给定图的某些特征是十分有用的。图还可以用矩阵表示,图的矩阵表示使得图的相关信息能在计算机中储存起来并加以处理,因此,图的矩阵表示是研究图性质的最有效工具之一。

定义 5.20 设图 $G=(V,E)$ 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,并且假定已排好了从顶点 v_1 到 v_n 的次序,$n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为 G 的邻接矩阵,其中:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \{v_i,v_j\}\in E\\ 0 & \{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$

由邻接矩阵的定义可以看出,图 G 的邻接矩阵由 V 中各元素的次序所决定,对于 V 中各元素间不同的次序关系,得到 G 的邻接矩阵不唯一。但对于同一个图的这些不同的邻接矩阵来说,只要适当地交换行和列的次序就能从其中一个邻接矩阵得到另一个邻接矩阵,也就是说,这些邻接矩阵所确定的图必是同构的。因此,可以忽略 V 中各元素间的次序关系给图的邻接矩阵带来的不唯一性,并选取图的任何一个邻接矩阵作为该图的邻接矩阵。

图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 包含了 G 的全部信息:G 的顶点数 n 就是 $\boldsymbol{A}$ 的阶;G 的边数 m 就是 $\boldsymbol{A}$ 中 1 的个数的一半;G 的顶点 v_i 的度 $\deg(v_i)$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行上 1 的个数;$\boldsymbol{A}$ 是对称的且对角线上的元素均为 0。

例 5.28 图 5.28 所示图 G 的邻接矩阵为

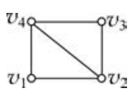


图 5.28

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

定理 5.13 设 G 是一个 (n,m) 图,$\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵,则 G 中顶点 v_i 与顶点 v_j 间长度为 l 的通道的数目等于 $\boldsymbol{A}^l$ 的元素 $a_{ij}^{(l)}$ 的值。

证 用数学归纳法,施归纳于 l。

当 $l=1$ 时,显然定理成立。

当 $l=2$ 时,$\boldsymbol{A}^2$ 的元素为 $a_{ij}^{(2)}=\sum\limits_{h=1}^{n}a_{ih}\cdot a_{hj}$,$a_{ih}\cdot a_{hj}=1$,当且仅当 $a_{ih}=1$ 且 $a_{hj}=1$,这意味着在图中同时存在边 $\{v_i,v_h\}$ 和 $\{v_h,v_j\}$,就存在一条 v_i 与 v_j 间长度为 2 的通道。因此,v_i 与 v_j 间长度为 2 的通道的数目等于 $a_{ij}^{(2)}$ 的值。

假设当 $l=k>2$ 时,定理成立。现证 $l=k+1$ 时,定理成立。

因为 $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\cdot\boldsymbol{A}$,所以 $a_{ij}^{(k+1)}=\sum\limits_{h=1}^{n}a_{ih}^{(k)}\cdot a_{hj}$。由归纳假设 $a_{ih}^{(k)}$ 为 v_i 与 v_h 间长度为 k 的通道数目,当 $a_{hj}=1$ 时,$\{v_h,v_j\}$ 是 G 的边,所以,$a_{ih}^{(k)}\cdot a_{hj}$ 为 v_i 与 v_j 间并通过 v_h 后一步就得到 v_j 的长度为 $k+1$ 的通道数目,而当 $a_{hj}=0$ 时,$\{v_h,v_j\}$ 不是 G 的边,所以,G

中没有 v_i 与 v_j 间并通过 v_h 后一步就到 v_j 的长度为 $k+1$ 的通道；反之，G 中任一 v_i 与 v_j 间长度为 $k+1$ 的通道，在到达 v_j 之前必通过某个顶点 v_h，因此，$a_{ij}^{(k+1)}$ 就是 v_i 与 v_j 间长度为 $k+1$ 的通道数目。

由数学归纳法原理，定理的结论成立。证毕。

特别地，当 $i=j$ 时，元素 $a_{ii}^{(k)}$ 的值就表示经过点 v_i 的长度为 k 的圈的数目。而当 $i\neq j$ 时，在 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}^{n-1}$ 的各个矩阵中，使元素 $a_{ij}^{(x)}$ 非零的最小正整数值 x，就是 v_i 与 v_j 的距离 $d(v_i,v_j)$。

例 5.29　对图 5.28 所示的图 G，能求得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}2&1&2&1\\1&3&1&2\\2&1&2&1\\1&2&1&3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}2&5&2&5\\5&4&5&5\\2&5&2&5\\5&5&5&4\end{bmatrix}$$

$a_{34}^{(3)}=5$ 说明 v_3 与 v_4 间长度为 3 的不同通道有 5 条；$a_{33}^{(2)}=2$ 说明经过顶点 v_3 长度为 2 的圈有 2 条。$a_{13}=0$，$a_{13}^{(2)}=2$ 说明 v_1 到 v_3 的距离 $d(v_1,v_3)=2$。

定理 5.14　设 G 是一个有 n 个顶点的图，$\boldsymbol{A}$ 是 G 的邻接矩阵，则 G 是连通的当且仅当 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{n-1}>0$。

证　设 G 是连通的，则对 G 的任两个不同的顶点 v_i 与 v_j，v_i 与 v_j 间至少有一条路。因此，对某 l，$1\leqslant l\leqslant p-1$，$a_{ij}^{(l)}>0$，所以 $\sum\limits_{l=0}^{n-1}a_{ij}^{(l)}>0$，因此

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{n-1}=\boldsymbol{I}+C_{n-1}^{1}\boldsymbol{A}+C_{n-1}^{2}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}\geqslant\sum_{l=0}^{n-1}\boldsymbol{A}^l>0$$

设 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{n-1}>0$，由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{n-1}=\boldsymbol{I}+C_{n-1}^{1}\boldsymbol{A}+C_{n-1}^{2}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}>0$，所以，对任意 i、j，$1\leqslant i$、$j\leqslant n$，如果 $i\neq j$，则存在一个 l，$1\leqslant l\leqslant p-1$，使 $a_{ij}^{(l)}>0$，因此，v_i 与 v_j 间有长度为 l 的通道，从而必有路，所以 G 是连通的。证毕。

例 5.30　对图 5.28 所示的图 G，能求得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{n-1}>0$，所以 G 是连通图。

邻接矩阵虽然能够完全刻画图，但是当图的顶点较多而边相对较少时，其邻接矩阵中零元素较多，这不但浪费了存储空间，而且在处理边数与顶点数成比例的某些图论算法时，往往得不到效率高的好算法。因此，从算法设计的角度看，用邻接矩阵表示图未必是一种好方法。图的另一种可能的表示方法是用邻接表表示，该内容将在数据结构课程里学习。

习题

1. 图 5.29 所示图 G，求邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及长度为 4 的 $v_1\sim v_4$ 通道的数目。

2. 偶图的邻接矩阵有什么特点？完全图的邻接矩阵有什么特点？

3. 怎样从 G 的邻接矩阵求 $\overline{G}$ 的邻接矩阵？

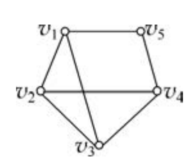


图　5.29

5.7 带权图与最短路问题

当用一个抽象的图模拟某个实际问题时，总希望将一些附加的信息赋予图的顶点或边，以供使用。例如，可以把城市的人口数赋予图中表示城市的顶点，还可以把两个城市之间公路的长度赋予图中表示公路的边等。抽象地，可以定义带权图。

定义 5.21 在图 $G=(V,E)$中，如果对 G 中每个顶点 v 都定义了一个实数 $f(e)$与之对应，则称 G 为顶点带权图，实数 $f(e)$称为顶点 v 的权。如果对 G 中每条边 e 都定义了一个实数 $w(e)$与之对应，则称 G 为边带权图，实数 $w(e)$称为边 e 的权。

一个图 G 的顶点和边可以同时带权，这时称 G 为顶点边带权图。权在不同的问题中可以有不同的意义。在许多应用问题中，带权图频繁出现，下面讨论一个著名的应用问题，就是最短路问题。很多实际问题都可以转化成最短路问题加以解决。

设 $G=(V,E)$是一个边带权图，每条边$\{v_i,v_j\}$的权记为 $w(v_i,v_j)$；如果顶点 v_i 与 v_j 之间无边时，令 $w(v_i,v_j)=+\infty$。

定义 5.22 设 $G=(V,E)$是一个边带权图，路 P 中所有边对应的权之和称为路 P 的长度，记作 $w(P)$。顶点 v_i 与 v_j 间长度最短的路称为 v_i 与 v_j 的最短路，该路的长度称为顶点 v_i 与 v_j 的距离，记作 $d(v_i,v_j)$，即

$$d(v_i,v_j)=\begin{cases}0 & v_i=v_j \\ \min\{w(P)\mid P \text{ 为 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 间的路}\} & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 间有路} \\ +\infty & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 间没有路}\end{cases}$$

所谓最短路问题就是在一个边带权图中，找一条从顶点 a（称为源点）到另一个顶点 b 的最短路及其距离。

1959 年，迪杰斯特拉(E. W. Dijkstra)提出了求边带权图的最短路算法，这个算法至今仍是求解这个问题的最好算法，它可以求出从给定顶点到其他每个顶点的最短路及其距离。算法步骤如下。

(1) 设边带权图 $G=(V,E)$有 n 个顶点。权 $w(v_i,v_j)\geqslant 0$。设源点为 a。

(2) 把 V 分成两个子集 S 和 T。初始时，$S=\{a\}$，$T=V-S$。设 v 是 T 中一个顶点，用 $D(v)$表示从 a 到 v 但不包含 T 中其他顶点的最短路的长度。$D(v)$不一定是从 a 到 v 的距离，因为从 a 到 v 可能存在包含 T 中其他顶点的更短路。

(3) 对 T 中每一点 v 计算 $D(v)$，根据 $D(v)$值找出 T 中距 a 最短的节点 x，写出 a 到 x 的最短路的长度 $D(x)$。

(4) 置 S 为 $S\cup\{x\}$，置 T 为 $T\setminus\{x\}$，如果 $T=\varnothing$，则停止；否则重复(3)。

可以证明，如果 x 是 T 中满足 $D(x)=\min\limits_{v\in T}\{D(v)\}$的顶点，则 $D(v)$是从 a 到 x 的距离。

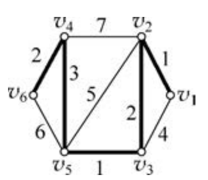


图 5.30

例 5.31 图 5.30 所示图 G，求 v_1 到其他顶点的最短路及其距离。

解 初始置 $S=\{v_1\}$，$T=\{v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$，$D(v_1)=0$，$D(v_2)=1$，$D(v_3)=4$，$D(v_4)=D(v_5)=D(v_6)=+\infty$。因为 $D(v_2)=1$ 是 T 中的最小 D 值，所以置 $S=\{v_1,v_2\}$，$T=\{v_3,v_4,v_5,$

$v_6\}$。然后计算：$D(v_3)=\min\{4,1+2\}=3$，$D(v_4)=\min\{+\infty,1+7\}=8$，$D(v_5)=\min\{+\infty,1+5\}=6$，$D(v_6)=\min\{+\infty,+\infty\}=+\infty$。

重复上述过程，直到 $T=\varnothing$ 为止，整个过程概括于表 5.1 中，v_1 到各点的最短路在图 5.30 中用粗线画出。

表 5.1

重复次数	S	v	$D(v)$	$D(v_2)$	$D(v_3)$	$D(v_4)$	$D(v_5)$	$D(v_6)$
初始	$\{v_1\}$	—	—	1	4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	$\{v_1,v_2\}$	v_2	1		3	8	6	$+\infty$
2	$\{v_1,v_2,v_3\}$	v_3	3			8	4	$+\infty$
3	$\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$	v_5	4			7		10
4	$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$	v_4	7					9
5	$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$	v_6	9					

习题

1. 求图 5.31 所示两图中顶点 s 到顶点 t 的最短路及其距离。

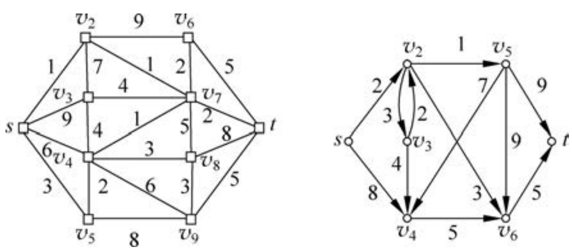
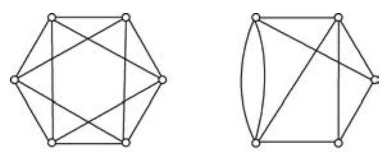


图 5.31

2. 一个图中最短圈的长度称为该图的围长，求图 5.32 所示两图的围长。



(a) (b)

图 5.32