第1章 最优控制概览

> 历史是一面镜子，它照亮现实，也照亮未来。
>
> ——赵鑫珊(1938—)《哲学与当代世界》

内容提要

本章由最优控制典型应用——月球软着陆问题起笔，介绍中国"嫦娥四号"探测器实现人类首次月球背面软着陆、开启人类月球探测新篇章的事迹，成功引出最优控制问题。从变分法起笔，结合历史大背景概览最优控制的发展，为课程的学习提供全局视角，进而激发学习兴趣和学习热情。最后，给出最优控制问题的典型示例及其数学描述，简述本书主要内容与章节安排。

公元2019年，北京时间1月3日10时26分，北京航天飞行控制中心响起热烈的掌声。中国"嫦娥"系列型号总指挥叶培建院士走到张熇的身后，拍了拍她的肩膀说道："辛苦了，不容易。"作为项目执行总监，张熇再也难掩激动的泪水。中国航天人，他们创造了历史，实现了人类探测器首次月球背面软着陆，开启了人类月球探测的新篇章[①]。当天10时15分，接到地面指令后，"嫦娥四号"探测器从距离月面15 km处开始实施动力下降，7500 N变推力发动机开机。约690 s后，"嫦娥四号"探测器自主着陆在月球背面南极——艾特肯盆地的冯·卡门撞击坑。1月11日下午，"嫦娥四号"着陆器与"玉兔二号"巡视器在"鹊桥"中继星的支持下顺利完成互拍，标志着"嫦娥四号"任务圆满成功，中国探月工程取得"五战五捷"[②]！

实际上，自1957年10月4日苏联成功发射世界上第一颗人造卫星

① http://www.gov.cn/xinwen/2019-01/03/content_5354498.htm

② http://www.gov.cn/xinwen/2019-01/11/content_5357057.htm#1

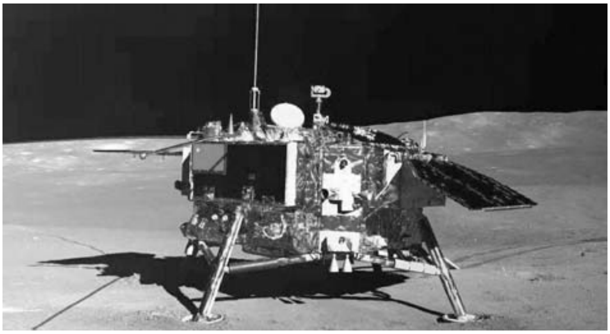

图 1.1 “玉兔二号”拍摄的“嫦娥四号”着陆器[①]

以来的半个多世纪,人类已开展了上百次月球探测。不过截至 2019 年 10 月,世界上实现月球软着陆的国家仅有苏联、美国和中国,可见其难度之大。月球与地球的平均距离 38 万公里,受限于通信时延(光速通信延时也将超过 1 s)着陆过程需要探测器自主完成。月球又缺少大气,着陆器无法依靠降落伞等方式着陆,目前做法是依靠探测器自身推进系统的反推作用力实现软着陆。整个着陆过程要求着陆器快速调整姿态,缓冲发动机工作直至着陆器接触月面时速度降为零,且避开地面撞击坑等危险地形。为了完成上述任务,“嫦娥四号”采用了一台 7500 N 变推力发动机实施动力下降,自着陆器距离月面 15 km 处的 1700 m/s 降低至月面时的零值。在这 690 s 下降过程中,受限于着陆器的星载燃料,缓冲发动机该如何工作,才能在实现软着陆时使得燃料消耗最少呢?

例 1.1 月球软着陆燃料最优控制问题。

为讨论问题方便,此处仅关注月面软着陆的垂直下降段,假设着陆器已调整好姿态使得着陆器轴线垂直于预定着陆点月面,如图 1.2 所示。忽略姿态变化的影响,将着陆器视为质量 m 的质点,在距离月面 h_0 高度范围内月球引力加速度为常值 g,初始 t_0 时刻着陆器速度和质量分别为 v_0 和 m_0,发动机推力 $u(t)$最大幅值为 $u_{\max}$,发动机燃料消耗率取为常量 k。则着陆器下降过程的动力学方程为

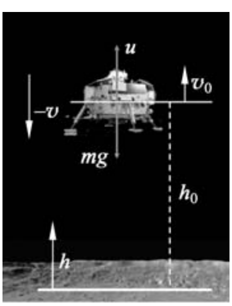

图 1.2 登月舱软着陆

$$\begin{cases} \dot{h}(t)=\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=v(t) \\ \dot{v}(t)=\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{u(t)}{m(t)}-g \\ \dot{m}(t)=-ku(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

式中 $h(t)$为着陆器在 t 时刻距离月面的高度。软着陆要

① https://spacenews.com/change-4-spacecraft-enter-lunar-nighttime-china-planning-future-missions-cooperation/

求着陆器在有限的时间 t_f 时刻到达月面且速度为零，在此过程中燃料消耗最少。

初始时刻，着陆器系统满足初值条件

$$[h(t_0),\quad v(t_0),\quad m(t_0)]^{\mathrm{T}}=[h_0,\quad v_0,\quad m_0]^{\mathrm{T}} \tag{1.2}$$

在着陆终端时刻 t_f 满足终端条件

$$[h(t_f),\quad v(t_f)]^{\mathrm{T}}=[0,\quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{1.3}$$

同时，在整个下降过程中需满足发动机推力幅值限制

$$0\leqslant u(t)\leqslant u_{\max} \tag{1.4}$$

注意推进系统质量变化率 $\dot{m}(t)$ 为负，燃料消耗最少可用性能指标 J 表示为

$$\min J=\int_{t_0}^{t_f}-\dot{m}(t)\mathrm{d}t=-m(t_f)+m(t_0) \tag{1.5}$$

式中 $\min J$ 表示 J 取最小值。至此，该问题可简洁表述如下：在式(1.4)的系统推力约束下，欲使着陆器由初始状态 $[h(t_0),v(t_0),m(t_0)]^{\mathrm{T}}$ 转移至终端状态 $[h(t_f),v(t_f)]^{\mathrm{T}}$，求解发动机推力作用规律 $u(t)$，最小化性能指标 J 使得系统的燃料消耗最少（等价于终端时刻系统剩余燃料 $m(t_f)$ 最多）。

正是在求解类似优化问题过程中，逐渐形成了最优控制理论。维基百科(Wikipedia)称："Optimal control theory[①] is a branch of applied mathematics that deals with finding a control law for a dynamical system over a period of time such that an objective function is optimized."（最优控制理论是应用数学的一个分支，致力于寻找动力系统一段时间内使得目标函数达到最优的控制规律。）那么，最优控制是如何求解月球软着陆问题的呢？

古人不见今时月，今月曾经照古人。为了回答月球软着陆问题，书中将首先回溯最优控制的发展脉络。

1.1　引言

爱因斯坦(Albert Einstein，1879—1955，1921 年诺贝尔物理学奖获得者)关于科学认知有句名言："宇宙中最不可理解之事，乃是宇宙是可以被理解的"(The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible)。宇宙虽然能够被理解，人类对它的认知却是一个艰难而曲折的过程，每一个点滴的积累和进步，都在不断考验着人类的耐心和洞见。人类科学探索的历程如同无尽的远征，为了能够在征途中"站在巨人的肩膀上"，有必要偶尔回望那过去的征途，尤其历史大背景角度下的审视，以期对各个发展阶段和科学问题能有更加全面的认识。

公元 1687 年，清康熙二十六年，无论对于中国还是世界都是重要的一年。身历四朝、在康熙除鳌削藩等重大事件中襄助朝政的孝庄文皇后去世，卒年七十五

① https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_control

岁。是年，英国科学家牛顿（Isaac Newton，1643—1727）发表《自然哲学的数学原理》一书，作为科学著作的里程碑，对人类科学发展乃至整个人类文明都产生了深刻而深远的影响。不过，西方先进的科技要等到200多年后才真正开始缓慢传入中国，期间1840年开始的鸦片战争让战败的中国付出了沉重的代价。自那时起，国人才逐渐意识到知识和科技的力量，由此开启了长达百年的图强救国之路。此役英国轻松获胜得益于18世纪60年代开始的第一次工业革命，其重要标志是蒸汽机的大规模使用，革新了人类此前数千年的能源转换方式。自动控制理论的发展史则一般回溯至蒸汽机离心调速器的设计与改进。

自离心调速器的发明至20世纪50年代经典控制理论趋于成熟，大概经过160年的发展，期间涌现出劳斯（Edward John Routh，1831—1907）、赫尔维茨（Adolf Hurwitz，1859—1919）、李雅普诺夫（Aleksandr Mikhailovich Lyapunov，1857—1918）、奈奎斯特（Harry Nyquist，1889—1976）、伯德（Hendrik Wade Bode，1905—1982）等一批在《自动控制原理》[1]中耳熟能详的学者[2]。不过，目前公认的第一篇控制理论的论文要追溯到1868年，是伟大的数学物理学家麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879）关于调速器反馈机制的研究工作[3]（On Governors. Proceedings of the Royal Society，1868，16：270—283）。同时，上文所谈的控制理论（Control theory）和1948年维纳（Norbert Wiener，1894—1964）出版的《控制论：或关于在动物和机器中控制和通信的科学》[4]（Cybernetics：On Control and Communication in the Animal and the Machine）并非同一概念，后者提供了控制问题和通信问题统一考虑的框架。

目前经典控制在工业生产中依然有着广泛应用，它的核心概念“反馈控制”（feedback control）早已深入人心。其特点是采用基于传递函数的频域分析法，主要研究单输入单输出线性定常控制系统的控制器设计，所设计的控制器主要关注静态和动态性能的优劣，而未考虑能量消耗的问题。20世纪50—60年代随着航天事业和计算机的发展，逐渐发展出以线性代数理论和状态空间分析法为基础的现代控制理论[5]，研究内容涵盖线性系统理论、最优控制理论、滤波与系统辨识理论。其中，最优控制正是本书的主题，它能够处理多输入多输出系统，在控制策略分析中考虑了系统的能量消耗，成功应用于航空航天等领域。

国内外最优控制的相关书籍和教材[7-19]已不少，有偏向于数学理论推导的，有注重理论分析与算例仿真相结合的，无论哪一类都会包含变分法、极大值原理（又称极小值原理）、动态规划三个核心知识点，而离散系统最优控制和线性二次型最优控制等章节安排会稍有不同。为了记录和传播最优控制的“基因”，严格的数学推导和大量的计算例题几乎占据了教材的全部，而发现和创造这些知识的学者大都被隐藏了起来，即便有也不过寥寥数语。翻越这些书籍仿佛置身于最优控制的大厦，让人感受到一开始它便如此的典雅与精致。我们知道实际情况并非如此，人类认知的过程复杂而曲折，从变分法的创立到极大值原理和动态规划的提出，最优

控制大厦的落成历经 300 多年[19]，在其一砖一瓦的构建中不乏欧拉和拉格朗日这样的科学大家。那么，变分法究竟从何而来？为何要提出极大值原理？动态规划方法又是如何创建的？在接下来的章节中，你将找到这些问题的答案，此外还会邂逅发展历程中那些熠熠生辉的学者，正是他们的智慧和耐心使我们相约最优控制！

1.2　变分法简史

1.2.1　最速降线问题

被誉为“近代科学之父”的伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）曾讨论过这样一个最短时间问题：不在铅垂线上的两点间，什么形状的曲线使得坠落的物体用时最短。他给的答案是连接两点的圆弧。在他倡导的科学研究新范式下，科学的春风开始吹拂 17 世纪的欧洲，一大批科学家如雨后春笋般涌现出来。伴随着人类对光的研究，特别是折射定律的研究，1662 年“业余数学家之王”费马①（Pierre de Fermat，1601—1665）提出了光总是沿着耗时最短路径传播的“费马原理”（Fermat principle）[21]，这或许是以往人类“最小观念”的第一次科学表达，由此奏响了变分法诞生的序曲[22]。17 世纪费马等创立的解析几何为研究曲线提供了一般工具并拓展了人们对曲线的认识，牛顿和莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）发明的微积分为探讨曲线提供了必要的数学方法，这些基本工具和数学思想为变分法的诞生提供了有力支撑。

伽利略（1564—1642）　费马（1601—1665）　牛顿（1643—1727）　莱布尼茨（1646—1716）

针对变分法（calculus of variations），维基百科基于柯朗（Richard Courant，1888—1972，美国科学院院士）和希尔伯特（David Hilbert，1862—1943）名著《数学物理方法》（*Methods of Mathematical Physics*，I）描述如下：The calculus of variations is a field of mathematical analysis that uses variations，which are small

① 费马为法国律师和业余数学家，以费马大定理（Fermat's last theorem）闻名于世，其猜想内容归结为“当整数 $n>2$ 时，关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解”。该猜想于 1637 年左右提出，他在书中问题的空白处写到“关于此，我确信已发现了一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下”。这个困惑人类 300 多年的猜想最终于 1995 年由英国数学家、牛津大学教授怀尔斯（Andrew Wiles，1953—　）完成证明。

changes in functions and functionals, to find maxima and minima of functionals: mappings from a set of functions to the real numbers①。即变分法是研究求解泛函极值及其相应极值函数问题的数学分支。此处出现的新概念泛函(functional)和泛函极值详见本书第 3 章。实际上,变分法与微分方程、黎曼几何和拓扑学等许多数学分支均有密切联系,在力学、光学、电子工程、经济学[23]等多个领域均有重要应用。

被公认为 20 世纪最伟大的数学家希尔伯特,1900 年在巴黎国际数学家代表大会上发表著名演讲"数学问题"[24],他在演讲中指出:"只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着这门科学独立发展的衰亡或中止"。针对最速降线问题,他专门有一段论述:"我只提醒大家注意伯努利(Johann Bernoulli)提出的'最速降线问题'。在公开宣布这一问题时,伯努利说:经验告诉我们,正是摆在面前的那些困难而有用的问题,引导着有才智的人们为丰富人类的知识而奋斗。……变分学的起源应归功于这个伯努利问题和相类似的一些问题。"目前,促进变分法诞生的第一个问题②公认为是伯努利兄弟打赌的最速降线问题(brachistochrone curve problem)。除了与哥哥雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli,1654—1705)学术竞争等因素外,约翰·伯努利(Johann Bernoulli,1667—1748)意识到了最速降线问题的挑战性与新颖性,最终以"新问题——向数学家们征解"为题,于 1696 年 6 月在《教师学报》(Acta Eruditorm)上公开发出挑战。请读者特别注意约翰画像手中图纸上的曲线。

雅各布·伯努利
(1654—1705)


约翰·伯努利
(1667—1748)

例 1.2　最速降线问题(brachistochrone curve problem)。

已知垂直平面上不在同一垂线上的两点 A、B,欲求一条路径,使质点 M 仅在自身重力作用下(即忽略摩擦)沿此路径由 A 点下滑至 B 点所用时间最短。

为讨论方便,取 $A(0,0)$ 为原点,建立如图 1.3 所示的平面直角坐标系,设 B

---

① https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations#cite_note-2

② 牛顿 1685 年年底提出"最小阻力问题",于《自然哲学的数学原理》中正式出版。该问题在变分法早期未产生重大影响的原因,参见本章参考文献[22]。

点坐标为(x_1,y_1)，质点 M 的质量为 m。最速降线问题归结为：在连接 AB 两点的所有曲线中，寻求一条光滑曲线 $y(x)$，使得质量为 m 的质点 M 以零初始速度由 $A(0,0)$滑行至 $B(x_1,y_1)$所需的时间最短。

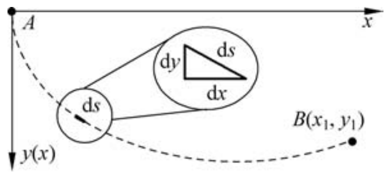

图 1.3　最速降线问题

所求曲线 $y(x)$经过 A、B 两点，故曲线在端点处满足如下条件：

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(x_1)=y_1 \end{cases} \tag{1.6}$$

假设质点滑行至曲线上(x,y)处的速度为 v，由能量守恒定律可得 $mgy=mv^2/2$，式中当地重力加速度 g 为一常值。由此得到质点通过点(x,y)处时的速度 $v=\sqrt{2gy}$，以此速度通过该点处单位弧长（或称充分小弧长）$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}\,\mathrm{d}x$ 所需的时间可表示为

$$\frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}$$

式中“d”为微分算子。质点静止从 A 点出发沿任意曲线 $y(x)$滑行至 B 点所需时间 $T[y(x)]$应为如下积分：

$$T[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

至此，应用所学微积分和物理知识已经建立了最速降线问题的数学模型，即对于给定的起始点 A 和终止点 B，求解使得滑行时间 $T[y(x)]$取最小值的曲线 $y(x)$。观察式(1.7)，可以发现该问题与之前微积分中极大极小值问题有着本质的区别，不再是求解普通函数的极值，而是在无数条曲线中需求某一曲线（即函数），使得沿此曲线的积分量取极值。因此，最速降线问题是求解函数之函数极值的问题。

上例就是数学史上著名的最速降线问题，又称捷线问题或最速滑行问题[25]。听从老师莱布尼茨的建议，1697 年元旦约翰·伯努利在格罗宁根①(Groningen)发表公告，将问题求解期限延长至复活节。最终，约翰·伯努利、雅各布·伯努利、法国数学家洛必达(Marquis de L′Hospital，1661—1704)、莱布尼茨和牛顿都独立给

① 约翰·伯努利于 1695—1705 年任荷兰格罗宁根大学数学教授。格罗宁根大学(University of Groningen)创建于 1614 年，位于荷兰北部，是欧洲最古老的大学之一，目前为世界百强名校。

出了正确的解答。除洛必达和莱布尼茨外，其他三人解法发表在1697年5月号《教师学报》上。

最速降线问题的求解及其答案将在本书第3章详细讨论，此处不再展开。在五人当时给出的求解方法中，作为哥哥的雅各布·伯努利解法中体现了局部变分的思想，较其他几位基于曲线几何性质和微积分思想的解答更为独特和新颖[22]。为此，后世数学家认为最速降线挑战中雅各布·伯努利技高一筹，他的局部变分思想和求解方法为解决更复杂的变分问题奠定了基础，在早期变分法发展中迈出重要一步，并对约翰·伯努利和欧拉等人产生了深刻影响。

1.2.2 等周问题

科学的发展离不开历史的洪流。17世纪至18世纪初的百年里，世界上同期出现了三位极具影响力的帝王，分别是法国波旁王朝路易十四(Louis XIV，1638—1715，1643—1715在位)、中国清代康熙皇帝(爱新觉罗·玄烨，1654—1722，1661—1722年在位)、俄国罗曼诺夫王朝彼得一世(Peter Ⅰ，1672—1725，1682—1725在位，后世尊称“彼得大帝”)。他们均建立了强大的帝国，并为帝国的强盛奠定了基础。时间的指针回拨至1697年，是年2月彼得大帝派出代表团赴西欧学习，自己则乔装成一位工人随队出访。3月，康熙皇帝第三次亲自出征，成功剿灭绰罗斯·噶尔丹。5月，法国和西班牙签署《勒斯维克条约》，结束了长达九年的“大同盟之战”，奠定了法国今日的疆域。

在法国和西班牙忙着签署条约之际，刚刚结束最速降线打赌的伯努利两兄弟赌约再次升级。据记载，此次的赌约导致兄弟两人由学术竞争演变为充满敌意的争吵，并一直持续到哥哥雅各布1705年去世。那么，究竟是什么问题导致兄弟如此争执呢?

原来，1697年5月号《教师学报》上雅各布·伯努利给出最速降线解法后又提出了三个问题：变动端点的最速降线问题(详见书中3.3节)、变密度介质中质点运动的路线问题、等周问题(isoperimetric problem)。特别地，雅各布就第三个问题向弟弟约翰公开提出挑战，并写道：如果他弟弟3个月内接受挑战并于年底前给出正确答案，那么一位不愿透露姓名的绅士愿意给他提供50金币的奖金。若年底前没有人解出，他将公布自己的解答。

此次打赌的等周问题复兴了古典等周问题，对变分法的产生和发展起了重要推动作用，在数学发展史中亦占有重要地位，直至今日依然有学者在研究其变种。中国微分几何学派创始人苏步青①先生曾言：“等周问题是人类理性文明中，既精

① 苏步青(1902—2003)，中国浙江人，中国科学院院士、数学家、教育家，中国微分几何学派创始人，被誉为“东方国度上灿烂的数学明星”。

要又美妙的一个古典几何问题。”据传说，等周问题源于古希腊时期狄多(Dido)女王建立迦太基城(Carthage)，因此亦称“狄多等周问题”(the Dido isoperimetric problem 或 the classical Dido problem)[26]。传说在北非地中海岸边，女王向当地国王购买了“一块牛皮之地”栖身，为获得尽可能大的占地面积，将牛皮切成细条后连成一条长绳，沿海岸围出一个半圆形的区域。为方便讨论，将小范围内海岸线抽象为一条直线，如图 1.4 所示，据此建立问题的数学模型。

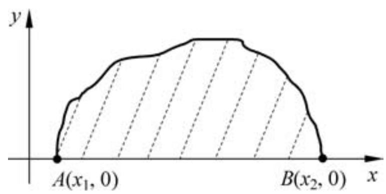

图 1.4　等周问题

例 1.3　等周问题(isoperimetric problem)。

在 x 轴上给定两点 $A(x_1,0)$ 和 $B(x_2,0)$，在连接 AB 两点、长度固定为 L 的所有曲线中寻求一条曲线 $y(x)$，使得该曲线与 x 轴所围成的面积最大。

问题中所求曲线 $y(x)$ 经过 A、B 两点，故曲线在端点处满足条件：

$$\begin{cases} y(x_1)=0 \\ y(x_2)=0 \end{cases} \tag{1.8}$$

曲线 $y(x)$ 与 x 轴围成的面积可表示为

$$S[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

同时，曲线需要满足长度为 L 的约束条件，曲线上任取弧长微元 $\mathrm{d}s$，则有

$$\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2}\,\mathrm{d}x=L \tag{1.10}$$

至此，等周问题可以归结为寻求一条经过固定两点的曲线 $y(x)$，能够最大化式(1.9)中面积 $S[y(x)]$。该问题与例 1.2 中最速降线问题最大的不同，在于增加了式(1.10)的积分型等式约束。

由于没有认识到等周问题中积分约束带来的变化，约翰·伯努利当时给出了错误的解答。1700 年 6 月号《教师学报》上哥哥雅各布简单介绍了他的解法与正确答案，并于 1701 年 5 月在该期刊进一步给出了等周问题的详细解答。最终，1718 年约翰·伯努利基于雅各布 1701 年论文的思想以更直观简单的方式求解了等周问题。应用变分法求解等周问题时，还要引入拉格朗日乘子(Lagrange multiplier 或 Lagrangian multiplier)，详细求解过程将在 3.4 节给出。毫无疑问，伯努利兄弟打赌的问题及其开拓性的工作，为变分法的诞生奠定了基础，终将在 18 世纪结出累累硕果。

1.2.3 一般变分问题


欧拉
(1707—1783)

中国现代文学家鲁迅①在短篇小说《故乡》中有句名言："其实地上本没有路，走的人多了，也便成了路。"这句话拿来形容变分法的创立同样适用。1744 年，已在柏林科学院工作的欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)，发表了世界上第一部有关变分法的专著——《寻求具有极大或极小特性曲线或解最广义等周问题的技巧》(下简称《技巧》)。《技巧》一书是欧拉青年时期关于变分问题十几年科研工作的系统性总结，将变分法从对一些具体问题的讨论转变为非常一般的问题的讨论[27]，标志着"变分法"作为一门独立的数学分支的初步形成，被后世公认为变分法发展史上的一座里程碑！《技巧》的出版为他个人带来了极大的荣誉，使得欧拉被认为是 18 世纪在世最伟大的数学家[28]。这些科研成果和荣誉的获得，除了欧拉的个人天赋和努力外，还要归功于约翰·伯努利对他的特殊指导和学术引导。

1707 年，康熙四十六年(中国农历丁亥)，英格兰和苏格兰的议会在伦敦合并，正式合并组建大不列颠王国(Kingdom of Great Britain，1707—1800)。时年 53 岁的康熙皇帝第六次南巡，与康熙同龄的雅各布·伯努利已于两年前去世，弟弟约翰·伯努利回到家乡巴塞尔接替了他数学教授的职位。这一年的 4 月 15 日，牧师保罗·欧拉喜得贵子，为他取名 Leonhard。1720 年，年仅 13 岁的欧拉入读巴塞尔大学，成为当时瑞士全国年龄最小的大学生。入学后，欧拉获得了跟随约翰·伯努利学习数学的机会。1726 年，欧拉完成了他的博士学位论文，并公开发表了个人第一篇科研论文，此时刚刚 19 岁。1727 年 3 月牛顿以 85 岁高龄逝世，安葬于泰晤士河畔的威斯敏斯特教堂(Westminster Abbey，又译"西敏寺")，同年 5 月，欧拉在约翰·伯努利次子丹尼尔·伯努利②(Daniel Bernoulli，1700—1782)的邀请下抵达俄国。

1728 年，约翰·伯努利向欧拉提出了"寻求一般曲面上两点之间的最短线"问题，这一问题实际自 1697 年约翰便开始关注，在 30 多年的断续研究中得到了多类特殊曲面的测地线，不过并未用到变分法。作为欧拉关于变分法研究的第一个机会，他成功得到了一般曲面上测地线的微分方程，成果发表于 1732 年《圣彼得堡科学院汇刊》，由此开启了通往变分法的大门。受这一问题的启发，欧拉关于变分法

---

① 鲁迅(1881—1936)，中国现代文学的奠基人，著名文学家。原名周树人，"鲁迅"是他 1918 年发表《狂人日记》时的笔名。代表作有小说集《呐喊》《彷徨》和散文集《朝花夕拾》等。

② 丹尼尔·伯努利(1700—1782)，出生于荷兰格罗宁根，瑞士数学家、物理学家，伯努利家族中最杰出的一位，以 1726 年提出流体力学中的"伯努利原理"(Bernoulli's principle)而闻名于世。1726 年欧拉接到丹尼尔的邀请，次年抵达俄国圣彼得堡科学院担任丹尼尔的助手，开启了长达 40 多年的合作研究。1733 年丹尼尔回到瑞士巴塞尔，欧拉开始主持圣彼得堡科学院数学部工作直至 1741 年迁往柏林。