

ROBOTICS

机器人学

(第四版)

蔡自兴 谢斌 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍了机器人学的基本原理及其应用,反映了国内外机器人学研究 and 应用的最新进展,是一部系统和全面的机器人学著作。本书共 10 章,内容涉及机器人学的概况、数理基础、运动学、动力学、位置和力控制、高级控制、传感器、机器人规划、程序设计和展望等。

本书对《机器人学(第三版)》进行了全面的修订与补充,在保持其丰富内容和明显特色的基础上,特别引入国内外机器人学新的发展情况,补充了机器人逆运动学的数值解法和基于深度学习的机器人控制,增加了基于机器学习的机器人规划、机器人操作系统和解释型脚本语言 Python 等内容。

本书特别适合作为高年级本科生和研究生的机器人学教材,也可供从事机器人学研究、开发和应用的科技人员学习参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989,beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

机器人学:第 4 版/蔡自兴,谢斌编著. —北京:清华大学出版社,2022.3
ISBN 978-7-302-59822-0

I. ①机… II. ①蔡… ②谢… III. ①机器人学—教材 IV. ①TP24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 280250 号

责任编辑:戚 亚

封面设计:常雪影

责任校对:王淑云

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京同文印刷有限责任公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:23.25 插 页:1 字 数:562 千字

版 次:2022 年 3 月第 1 版 印 次:2022 年 3 月第 1 次印刷

定 价:79.00 元

产品编号:090429-01

机器人学——自动化的辉煌篇章

代 序

现代自动控制技术的进步,为科学研究和探测工作开辟了新的可能性,开拓了靠人力所不能胜任的新科学事业。20世纪90年代实现了6000~10 000m深海探测,实现了对太阳系的金星、火星、木星及一些卫星和彗星的探测。哈勃空间望远镜的轨道运行给天文学家研究宇宙提供了前所未有的工具和机会。1997年美国科学家们研制的“火星探路者号”(Mars Pathfinder)小车顺利地完成了火星表面的实地探测,是20世纪自动化技术的最高成就之一。

机器人学的进步和应用是20世纪自动控制最有说服力的成就,是当代最高意义上的自动化。仅仅花了20年,机器人就从爬行发展为用两腿走路,成为直立机器人,而人类从爬行到直立花了上百万年。机器人已能用手使用工具,能看、听、用多种语言。它安心可靠地干最脏最累的活。据估计,现在全世界已有近100万个机器人在生产线上工作。有近万家工厂在生产机器人,销售额每年增长20%以上。机器人正雄心勃勃,准备在21世纪进入服务业,当出租车司机,到医院当护士,到家庭照顾老人,到银行当出纳。

如果微电子学的发展再进一步,就可以把IBM/6000SP挤进机器人的脑袋里,运行Deep Blue软件,像1997年5月击败世界冠军Gary Kasparov那样,使世界象棋大师们望而生畏。Isaac Asimov曾设想,“机器人有数学天才,能心算三重积分,做张量分析题目如同吃点心一样”,如今已不难做到。

20世纪60年代出现过的恐惧、反对自动化和机器人的社会心态已被证明是没有根据的。今天,一些应用机器人最多的国家失业率并没有明显升高,即使有,也没有人指责控制科学家和工程师,那是金融家和政治家的过错。相反,智能技术广泛进入社会,有利于提高人民的生活质量,提高劳动生产率,提高全社会的文化素质,创造更多的就业机会。

站在进入21世纪的门槛,回顾人类文明进步的近代史,如果说19世纪实现了社会体力劳动机械化,延伸了人的体力,那么20世纪的主要特征是实现了劳动生产自动化,极大地提高了社会劳动生产率,创造了比过去任何时期都多得多的社会财富,彻底改变了人类的生产和生活方式,提高了人们的生活质量,延长了人类的平均寿命。这完全是现代科学技术的功劳。我们可以感到骄傲的是,控制论科学家和工程师们为此做出了重要贡献。预计在21世纪,自动化技术仍将是高技术前沿,是推进新技术革命的核心力量。制造业和服务业仍然是它取得辉煌成就的主要领域。

在生命科学和人工智能的推动下,控制理论和自动化领域出现了提高控制系统智能的强大趋势。对这门新学科今后的发展方向和道路已经取得了一些共识,可以列举以下诸点:

第一,研究和模仿人类智能是智能控制的最高目标。所以,人们把能自动识别和记忆信号(图像、语言、文字)、会学习、能推理、有自动决策能力的自动控制系统称为“智能控制系统”。

本文是国际自动控制联合会第十四届世界大会主席、全国政协副主席、中国工程院院长宋健院士在大会开幕式上所作学术报告《智能控制——超越世纪的目标》(1999年7月5日,北京)的摘录,文字略有改动。

第二,智能控制必须靠多学科联合才能取得新的突破。生命科学和脑科学关于人体和脑功能机制的更深入的知识是必不可少的。揭开生物界的进化机制,生命系统中自组织能力,免疫能力和遗传能力的精确结构对建造智能控制系统极为重要。这主要是生物化学家和遗传学家的任务,但控制论科学家和工程师们也能够为此做出贡献。

第三,智能化程度的提高,不能全靠子系统的堆积。要做到“整体大于组分之和”,只靠非线性效应是不够的。智能化程度越高,系统越复杂。复杂巨系统的行为和结构必定是分层次的。子系统和整体利益的和谐统一是有机体得以生存发展的基本原则。每一个层次都有新的特征和状态描述。要建立每个层次能上下相容的结构和与周边友好的界面。统计力学中从分子热运动到气体宏观状态参数抽取是层次划分的范例,这就是被物理学家们称为“粗粒化抽取”(coarse-graining extraction)的最好说明。

第四,世界上一切生物的进化都是逐步的,人类从新石器时代到机器人经历了1万多年。从机械自动化到电子自动化仅花了100多年。要做到智能自动化,把机器人的智商提高到智人水平,还需要数十年。这是科学技术进步不可逾越的过程。20世纪后半叶,微电子学、生命科学、自动化技术突飞猛进,为21世纪实现智能控制和智能自动化创造了很好的起始条件。为达到此目标,不仅需要技术的进步,更需要科学思想和理论的突破。很多科学家坚持认为,只有发现新的原理,或者改造已知的物理学基本定理,才能彻底懂得和仿造人类的智能,才能设计和制造出具有高级智能的自动控制系统。无论如何,这个进程已经开始。可以设想,再过50年,在第31届IFAC大会时,人类的生产效率比现在要提高10倍,不再有人挨饿。全世界的老人都可以有一个机器人服务员,在身边帮助料理生活。每一个参加会议的人都可能在文件箱中带一个机器人秘书,就像现在的电子笔记本一样。

21世纪对人类是一个特别重要的历史时期。世界人口将稳定在一个较高的水平上,例如120亿,比现在再翻一番。科学界要为保障人类和我们的家园——地球的生存和可持续发展做出必须贡献,而控制论科学家和工程师应当承担主要任务。进一步发展和大力推广应用控制论和自动化技术,保证未来的后代在一个没有短缺、饥饿和污染的世界里生活得更幸福,是天赋我责。正如物理学家Murray Gell-Mann所说,在可见的未来,包括人类在内的自然进化将让位于人类科学技术和文化的进步。Cybernetics一词来自希腊语,原意为舵手,我们至少有资格成为舵手们的科学顾问和助手,对推动社会进步发挥更大作用,这是我们的光荣。

宇健

第一版序

机器人的诞生和机器人学的建立,无疑是 20 世纪人类科学技术的重大成就。不到 40 年时间,机器人从无到有,现在已拥有“百万大军”,在国民经济各条战线和人民生活的各个领域忠诚地为人类服务,做出不可磨灭的贡献。展望 21 世纪,人类更需要机器人的和谐共处,更离不开机器人这位得力助手和可靠朋友。

早在机器人学孕育于它的社会和经济母胎时,人类在期待机器人诞生的同时就存有几分不安。随着机器人技术的巨大进步,人们已适应了与机器人的共处。然而,仍然有些人对智能机器人的发展表示担忧。实践将再次证明,这种担忧是不必要的。无论机器人的智能如何发展,它都是人类创造出来的成果,人类才是这些智能机器人的真正主人。我们一定想办法让机器人继续为人类造福,而不是反抗人类、统治人类。这就是我们进入 21 世纪时对待机器人应有的心态。

我国机器人学的研究开发工作虽然起步较晚,但在国家有关部门的支持和全体机器人学科技和教育工作者的努力下进步较快,已在工业机器人、特种机器人和智能机器人各个方面取得明显成绩,为我国机器人学的进一步发展打下良好的基础。其中,国家高技术发展计划智能机器人主题的研究更是令人瞩目,成果层出不穷。国内已在一些学会内成立了机器人或智能机器人的二级学会,经常召开全国性的机器人学研讨会或学术会议,而且出版了一批机器人学的专著和教材。尤其值得一提的是,由中国自动化学会、中国机械工程学会、中国汽车工程学会、中国电子学会、中国宇航学会、中国人工智能学会、国家“863”计划智能机器人主题专家组、国家“863”计划空间机器人主题专家组以及中国机器人工程协会 9 个一级学会主办的中国机器人学术大会,自 1987 年以来,每 2~3 年召开一次,已举办了 5 次,并即将在今年 10 月举办第六届大会——中国 2000 年机器人学大会。这是我国机器人学领域层次最高和规模最大的一次盛会。我衷心地预祝大会圆满成功,为推动我国机器人学的发展做出新的贡献。

在 21 世纪,中国的机器人学必将有更大的发展和更广泛的应用。中国的机器人市场必将走向世界,与国际市场实现一体化,在国际上占有一席之地。

随着国内外机器人学的快速发展,国内许多大学开设了机器人学的课程,一些关于机器人学的教材和专著也应运而生。12 年前,在国内急需机器人学教材的时候,一本名为《机器人原理及其应用》的大作出版了,它全面介绍了机器人学的基本原理及其应用,是国内第一部智能机器人基础的系统专著与教材。此书后被选入《中国优秀科技图书要览》。这本书曾被国内广泛采用,成为许多从事机器人学研究、教学和应用的科教工作者的教材或必读著作,为推动我国机器人学的发展做出了重要贡献。此书给我留下深刻而良好的印象,读后受益匪浅。十分巧合的是,12 年前出版的该书作者和中国 2000 年机器人学大会的主席正好是一个人,而且也是《机器人学》这部新著的作者、中国智能机器人学会理事长、中南工业大学教授、我校兼职教授蔡自兴先生。他的勤奋、敬业、开拓和奉献精神令人钦佩。我感到,他

那颗火热的心,近20年来一直热恋着他钟爱的中国机器人事业,并为之做出公认的卓越贡献。

《机器人学》包括机器人学的概况、数学基础、运动学、动力学、控制、规划、编程、应用和展望等,内容非常丰富,系统安排确当,理论联系实际,反映出国内外机器人学研究和应用的最新进展,可读性好,是一部不可多得的高水平机器人学著作。书中有不少内容是作者自己的研究成果和他对机器人学发展的创见。例如,机器人控制、机器人规划、机器人应用和机器人展望等章的内容都颇有新意。我相信,本书的出版必将为我国机器人学的教育和发展、机器人技术的推广和应用发挥重要的促进作用。

张启先

北京航空航天大学教授、中国工程院院士

2000年5月16日于北京

前 言

作为一门高度交叉的前沿学科,机器人学激发了越来越多的具有不同背景的人们的广泛兴趣,已被深入研究,并获得快速发展,取得了令人瞩目的成就。进入 21 世纪以来,工业机器人产业发展速度加快,年增长率达到 30% 左右。其中,亚洲工业机器人的增长速度最为突出,工业机器人市场前景向好。其中,中国从 2014 年起成为世界最大的机器人市场。近年来,随着人工智能进入一个新的发展时期,促进国际机器人的研究与应用也进入一个新的时期,推动机器人技术达到更高的水平。

本书主要介绍机器人学的基本原理和应用,是一部系统和全面的机器人学著作。全书共 10 章,涉及机器人学的概况、数理基础、运动学、动力学、控制、规划、编程和展望等内容。第 1 章简述机器人学的起源与发展,讨论机器人学的定义,分析机器人的特点、结构与分类,探讨机器人学的研究和应用领域。第 2 章讨论机器人学的数理基础,包括空间质点的位置和姿态变换、坐标变换、齐次坐标变换、物体的变换和逆变换,以及通用旋转变换等。第 3 章阐述机器人运动方程的表示与求解,即机器人正向运动学和逆向运动学问题,包括机械手运动姿态、方向角、运动位置和坐标的运动方程以及连杆变换短阵的表示,解释解法、数值解法等求解方法和机器人微分运动及其雅可比矩阵等。第 4 章涉及机器人动力学方程、动态特性和静态特性;着重分析机械手动力学方程的两种求法,即拉格朗日功能平衡法和牛顿-欧拉动态平衡法,总结建立拉格朗日方程的步骤,并以二连杆和三连杆机械手为例推导机械手的动力学方程;探讨机器人的动态特性和静态特性。第 5 章研究机器人的位置和力控制,包括机器人的控制原则和控制方法、传动系统结构、位置伺服控制、位置和力混合控制、柔顺控制和分解运动控制等。第 6 章探讨机器人控制问题,涉及机器人的变结构控制、自适应控制和智能控制等。第 7 章介绍机器人传感器的特点与分类、各种典型的机器人内传感器和外传感器的工作原理。第 8 章讨论机器人规划问题。在说明机器人规划的作用和任务之后,从积木世界的机器人规划入手,逐步深入开展对机器人规划的讨论,包括规则演绎法、逻辑演算和通用搜索法及基于专家系统的规划等。在机器人路径规划方面,第 8 章在阐明机器人路径规划的主要方法和发展趋势之后,着重介绍了作者科研团队的一些研究新成果,如基于近似维诺图的机器人路径规划、基于免疫进化和示例学习的机器人路径规划和基于蚁群算法的机器人路径规划等。第 9 章概括论述机器人的程序设计,研究对机器人编程的要求和分类、机器人语言系统的结构和基本功能、机器人操作系统、几种重要的专用机器人语言、Python 语言和 MATLAB 机器人学仿真工具,以及机器人的离线编程等。第 10 章分析机器人学的现状,展望机器人学的未来,包括国内外机器人技术和市场的最新发展状态和预测、机器人技术的发展趋势、各国雄心勃勃的机器人发展计划和应用机器人引起的社会问题等,并提出克隆技术对智能机器人的挑战问题。每章最后均附有习题,供教师选用和学生练习。书末附有参考文献和英汉术语对照表,有助于学生深入研究和阅读机器人学的英文文献。

本书特别适合作为教材。当作为本科生教材时,可以跳过一些内容偏难的章节;当作为

研究生教材时,教师可补充一些反映最新研究进展的学术论文和专题研究资料。本书也适合从事机器人学研究、开发和应用的科技人员学习参考。

本书第一版由蔡自兴编著。第二版、第三版和第四版由蔡自兴全面负责编写、修订和统稿;谢斌参加了第三版和第四版修订大纲的讨论,并修订了 3.1 节和 3.2 节及 7.2 节和 9.3 节等。

在本书的编写和出版过程中,得到众多领导、专家、教授、朋友和学生的热情鼓励和帮助。宋健院士的代序和张启先院士的序,一直是对本书作者和广大读者的极大支持和厚爱。包括中南大学、湖南自兴人工智能科技集团和清华大学及其出版社在内的许多机器人专家、高校师生、编辑和读者一直关心本书的编著和使用,并提出了一些十分中肯的建议。这些都是对作者的很大帮助,使我们深受鼓舞。在此特向有关领导、专家、编辑、合作者、师生和广大读者致以衷心的感谢。我还要特别感谢部分国内外机器人学专著、教材和有关论文的作者们。

本书在《机器人学(第三版)》的基础上全面修订而成。本次修订特别对第 1 章(绪论)、第 3 章(机器人运动学)、第 6 章(机器人高级控制)、第 8 章(机器人规划)和第 9 章(机器人程序设计)进行了重点修订,并对全书进行了勘误,使质量进一步提高。欢迎各位专家和广大读者在阅读后批评指正。

蔡自兴

2022 年春节

于长沙鹅羊山德怡园

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 机器人学的起源与发展	1
1.1.1 机器人学的起源	1
1.1.2 国际机器人学的发展	2
1.1.3 中国机器人学的发展	4
1.2 机器人的定义和特征	6
1.2.1 机器人的定义	6
1.2.2 机器人的主要特征	7
1.3 机器人的构成与分类	8
1.3.1 机器人系统的构成	8
1.3.2 机器人的自由度	10
1.3.3 机器人的分类	12
1.4 机器人学的研究领域	16
1.5 机器人学的应用领域	18
1.5.1 工业机器人	18
1.5.2 探索机器人	19
1.5.3 服务机器人	20
1.5.4 军用机器人	21
1.6 本书概要	22
1.7 本章小结	23
习题 1	24
第 2 章 数学基础	26
2.1 位姿和坐标系描述	26
2.2 平移和旋转坐标系映射	28
2.3 平移和旋转齐次坐标变换	29
2.4 物体的变换和变换方程	33
2.5 通用旋转变换	36
2.6 本章小结	39
习题 2	39
第 3 章 机器人运动学	42
3.1 机器人运动方程的表示	43

3.1.1	机械手运动姿态和方向角的表示	43
3.1.2	平移变换的不同坐标系表示	45
3.1.3	广义连杆和广义变换矩阵	47
3.1.4	建立连杆坐标系的步骤和举例	49
3.2	机器人运动方程的求解	51
3.2.1	逆运动学求解的一般问题	51
3.2.2	逆运动学的解析解法	53
3.2.3	逆运动学的数值解法	61
3.3	机器人运动的分析与综合举例	66
3.3.1	机器人正向运动学举例	66
3.3.2	机器人逆向运动学举例	69
3.4	机器人的雅可比公式	73
3.4.1	机器人的微分运动	73
3.4.2	雅可比矩阵的定义与求解	81
3.4.3	机器人雅可比矩阵计算举例	84
3.5	本章小结	85
习题 3		86

第 4 章 机器人动力学 91

4.1	刚体的动力学方程	91
4.1.1	刚体的动能与位能	92
4.1.2	拉格朗日方程和牛顿-欧拉方程	93
4.2	机械手动力学方程的计算与简化	98
4.2.1	质点速度的计算	99
4.2.2	质点动能和位能的计算	100
4.2.3	机械手动力学方程的推导	102
4.2.4	机械手动力学方程的简化	104
4.3	机械手动力学方程举例	107
4.3.1	二连杆机械手动力学方程	107
4.3.2	三连杆机械手的速度和加速度方程	109
4.4	机器人的动态特性	115
4.4.1	动态特性概述	115
4.4.2	稳定性	116
4.4.3	空间分辨率	117
4.4.4	精度	117
4.4.5	重复性	119
4.5	机械手的静态特性	121

4.5.1	静力和静力矩的表示	121
4.5.2	不同坐标系间的静力变换	121
4.5.3	关节力矩的确定	123
4.5.4	负荷质量的确定	124
4.6	本章小结	125
	习题 4	125
第 5 章	机器人位置和力控制	129
5.1	机器人控制与传动概述	129
5.1.1	机器人控制的分类、变量与层次	129
5.1.2	机器人传动系统	132
5.2	机器人的位置控制	136
5.2.1	直流控制系统原理与数学模型	137
5.2.2	机器人位置控制的一般结构	140
5.2.3	单关节位置控制器的结构与模型	142
5.2.4	多关节位置控制器的耦合与补偿	149
5.3	机器人的力和位置混合控制	151
5.3.1	柔顺运动与柔顺控制	152
5.3.2	主动阻力控制	155
5.3.3	力和位置混合控制方案和规律	159
5.3.4	柔顺运动位移和力混合控制的计算	164
5.4	本章小结	166
	习题 5	167
第 6 章	机器人高级控制	169
6.1	机器人的变结构控制	169
6.1.1	变结构控制的特点和原理	169
6.1.2	机器人的滑模变结构控制	171
6.1.3	机器人轨迹跟踪滑模变结构控制	174
6.2	机器人的自适应控制	177
6.2.1	自适应控制器的状态模型和结构	178
6.2.2	机器人模型参考自适应控制器	180
6.3	机器人的智能控制	183
6.3.1	智能控制与智能控制系统概述	183
6.3.2	主要智能控制系统简介	188
6.3.3	机器人自适应模糊控制	191
6.3.4	多指灵巧手的神经控制	193

6.4	基于深度学习的机器人控制	196
6.4.1	基于深度学习的机器人控制概述	196
6.4.2	基于深度学习的机器人控制示例	198
6.5	本章小结	200
	习题 6	201
第 7 章	机器人传感器	203
7.1	机器人传感器概述	203
7.1.1	机器人传感器的特点与分类	203
7.1.2	应用传感器时应考虑的问题	204
7.2	内传感器	206
7.2.1	位移(位置)传感器	206
7.2.2	速度和加速度传感器	209
7.2.3	姿态传感器	211
7.2.4	力觉传感器	214
7.3	外传感器	216
7.3.1	触觉传感器	216
7.3.2	应力传感器	219
7.3.3	接近度传感器	221
7.3.4	其他外传感器	223
7.4	机器人视觉装置	223
7.4.1	机器人眼	224
7.4.2	视频信号数字变换器	225
7.4.3	固态视觉装置	226
7.4.4	激光雷达	229
7.5	本章小结	232
	习题 7	232
第 8 章	机器人规划	234
8.1	机器人规划概述	234
8.1.1	规划的概念和作用	234
8.1.2	机器人规划系统的任务与方法	235
8.2	积木世界的机器人规划	235
8.2.1	积木世界的机器人问题	235
8.2.2	积木世界机器人规划的求解	236
8.3	基于消解原理的机器人规划系统	239
8.3.1	STRIPS 的组成	239

8.3.2	STRIPS 规划过程	239
8.4	基于专家系统的机器人规划	243
8.4.1	规划系统结构和机理	243
8.4.2	机器人规划专家系统	244
8.5	机器人路径规划	251
8.5.1	机器人路径规划的主要方法和发展趋势	251
8.5.2	基于近似 VORONOI 图的机器人路径规划	253
8.5.3	基于免疫进化和示例学习的机器人路径规划	255
8.5.4	基于蚁群算法的机器人路径规划	258
8.6	基于机器学习的机器人规划	263
8.7	本章小结	265
	习题 8	265
第 9 章	机器人程序设计	268
9.1	机器人编程要求与语言类型	268
9.1.1	对机器人编程的要求	269
9.1.2	机器人编程语言的类型	272
9.2	机器人语言系统结构和基本功能	275
9.2.1	机器人语言系统的结构	275
9.2.2	机器人编程语言的基本功能	276
9.3	机器人操作系统 ROS	278
9.4	常用的工业机器人编程语言	281
9.4.1	VAL 语言	282
9.4.2	SIGLA 语言	284
9.4.3	IML	285
9.4.4	AL	285
9.5	解释型脚本语言 Python	286
9.5.1	Python 语言的基本数据结构	286
9.5.2	选择结构和循环结构	289
9.5.3	函数	290
9.6	基于 MATLAB 的机器人学仿真	291
9.7	机器人的离线编程	296
9.7.1	机器人离线编程的特点和主要内容	296
9.7.2	机器人离线编程系统的结构	297
9.7.3	机器人离线编程仿真系统 HOLPSS	299
9.8	本章小结	302
	习题 9	303

第 10 章 机器人学展望	307
10.1 机器人技术与市场的现状和预测.....	307
10.1.1 世界机器人发展现状和发展预测.....	307
10.1.2 中国工业机器人市场统计数据分析.....	310
10.2 机器人技术的发展趋势.....	311
10.3 各国雄心勃勃的机器人发展计划.....	313
10.4 应用机器人引起的社会问题.....	316
10.5 克隆技术对智能机器人的挑战.....	319
10.6 本章小结.....	322
习题 10	323
参考文献.....	324
英汉术语对照表.....	340

CONTENTS

Chapter 1 Introduction	1
1.1 Origin and Development of Robotics	1
1.1.1 Origin of the Robotics	1
1.1.2 Advances in International Robotics	2
1.1.3 Research and Development of Robotics in China	4
1.2 Definition and Characteristics of Robots	6
1.2.1 Definition of Robots	6
1.2.2 Main Characteristics of Robots	7
1.3 Structure and Classification of Robots	8
1.3.1 Structure of a Robot System	8
1.3.2 Degrees of Freedom of Robots	10
1.3.3 Classification of Robots	12
1.4 Research Fields for Robots	16
1.5 Application Fields for Robots	18
1.5.1 Robots for Industry	18
1.5.2 Robots for Exploration	19
1.5.3 Robots for Service	20
1.5.4 Robots for Military	21
1.6 Outline of the Book	22
1.7 Summary	23
Exercises 1	24
Chapter 2 Mathematics Foundation	26
2.1 Representation of Position, Attitude and Coordinate Frames	26
2.2 Mapping of Transfer and Rotation Coordinate Systems	28
2.3 Homogeneous Transformation of Transfer and Rotation	29
2.4 Transformation of Object and Its Equations	33
2.5 General Rotation Transformation	36
2.6 Summary	39
Exercises 2	39
Chapter 3 Kinematics of Robots	42
3.1 Representation of the Kinematical Equation of Manipulators	43
3.1.1 Representation of Pose and Oriented Angle of Manipulator	43
3.1.2 Coordinate Representations of Transfer Transformation	45
3.1.3 Generalized Link and Generalized Transformation Matrix	47

3.1.4	Step and Example for Link Coordinate Setting	49
3.2	Solving Kinematical Equations of Robot Manipulators	51
3.2.1	General Issues for Solving Inverse Kinematics	51
3.2.2	Explanation Solution of Inverse Kinematics	53
3.2.3	Numerical Solution of Inverse Kinematics	61
3.3	Examples of Analysis and Synthesis for Robot Motion	66
3.3.1	Motion Analysis of Robot Manipulator	66
3.3.2	Motion Synthesis of Robot Manipulator	69
3.4	Jacobian of Robot Manipulator	73
3.4.1	Differential Motion of Robot	73
3.4.2	Definition and Solving of Jacobian Matrix	81
3.4.3	Computational Example of Robot Jacobian	84
3.5	Summary	85
	Exercises 3	86
Chapter 4	Dynamics of Robots	91
4.1	Dynamics of A Rigid Body	91
4.1.1	Kinetic and Potential Energy of A Rigid Body	92
4.1.2	Lagrange Equation and Newton-Euler Equation	93
4.2	Computation and Simplification of Dynamic Equation of Robot Manipulator	98
4.2.1	Computing the Particle Velocity	99
4.2.2	Computing the Kinetic and Potential Energy of Particle	100
4.2.3	Derivation of Dynamic Equation of Manipulator	102
4.2.4	Simplification of the Dynamic Equation of Manipulator	104
4.3	Examples of Dynamic Equation of Manipulators	107
4.3.1	Dynamic Equation of Two-Link Manipulator	107
4.3.2	Velocity and Acceleration Dynamic Equations of Three-Link Manipulator	109
4.4	Dynamic Properties of Robots	115
4.4.1	Introduction to Dynamic Performance	115
4.4.2	Stability	116
4.4.3	Spatial Resolution	117
4.4.4	Accuracy	117
4.4.5	Repeatability	119
4.5	Static Characteristics of Manipulators	121
4.5.1	Representation of Static Forces and Moments	121
4.5.2	Transformation of Forces Between Coordinate Frames	121
4.5.3	Determination of Joint Torques	123
4.5.4	Determination of Load Quantity	124
4.6	Summary	125
	Exercises 4	125

Chapter 5	Position/Force Control of Robots	129
5.1	Introduction to Robotic Control and Driving	129
5.1.1	Classification, Variables and Levels of Robot Control	129
5.1.2	Driving Systems of Robots	132
5.2	Position Control of Robots	136
5.2.1	Principle and Mathematical Model of D. C. Control System	137
5.2.2	Basic Structure of Robot Position Control	140
5.2.3	Structure and Model of Position Controller of A Single Joint	142
5.2.4	Coupling and Compensation of Position Controller With Multiple Joints	149
5.3	Hybrid Control of Force/Position of Robots	151
5.3.1	Compliance Motion and Compliance Control	152
5.3.2	Active Impedance Control	155
5.3.3	Control Scheme and Rule of Robotic Hybrid Position/Force Control	159
5.3.4	Computation of Hybrid Displacement and Force Control of Compliance Motion	164
5.4	Summary	166
	Exercises 5	167
Chapter 6	Advanced Control of Robots	169
6.1	Variable Structure Control of Robots	169
6.1.1	Features and Principles of Variable Structure Control	169
6.1.2	Variable Structure Control of Robots in Sliding Mode	171
6.1.3	Variable Structure Control of Robotic Trajectory Tracking in Sliding Mode	174
6.2	Adaptive Control of Robots	177
6.2.1	State Models and Structures of Adaptive Controller	178
6.2.2	Model-Reference Adaptive Controller of Robots	180
6.3	Intelligent Control of Robots	183
6.3.1	Introduction to Intelligent Control and Intelligent Control Systems	183
6.3.2	Brief Introduction to Main Intelligent Control Systems	188
6.3.3	Adaptive Fuzzy Control of Robot	191
6.3.4	Neural Control of Multi-Fingered Robot Hand	193
6.4	Robot Control Based on Deep Learning	196
6.4.1	Introduction to Robot Control Based on Deep Learning	196
6.4.2	Example of Robot Control Based on Deep Learning	198
6.5	Summary	200
	Exercises 6	201

Chapter 7	Robot Sensors	203
7.1	Introduction to Robot Sensors	203
7.1.1	Features and Classification of Robot Sensors	203
7.1.2	Considered Issues of Sensor Applications	204
7.2	Inner Sensors	206
7.2.1	Displacement/Position Sensors	206
7.2.2	Velocity and Acceleration Sensors	209
7.2.3	Attitude Sensors	211
7.2.4	Force Sensors	214
7.3	External Sensors	216
7.3.1	Tactile Sensors	216
7.3.2	Stress Sensors	219
7.3.3	Proximity Sensors	221
7.3.4	Other External Sensors	223
7.4	Vision Devices of Robots	223
7.4.1	Robot Eyes	224
7.4.2	Video Digitizer	225
7.4.3	Solid Vision Device	226
7.4.4	Laser Radar	229
7.5	Summary	232
	Exercises 7	232
Chapter 8	Robot Planning	234
8.1	Introduction to Robot Planning	234
8.1.1	Function of Planning and Ways of Problem Decomposition	234
8.1.2	Tasks and Methods of Robot Planning System	235
8.2	Robot Planning of the Block World	235
8.2.1	Robot Problem in the Block World	235
8.2.2	Solving for Robot Planning of the Block World	236
8.3	Robot Planning System Based on Resolution Principle	239
8.3.1	Organization of STRIPS System	239
8.3.2	Planning Process of STRIPS System	239
8.4	Robot Planning Based on the Expert System	243
8.4.1	System Structure and Planning Mechanism	243
8.4.2	ROPES Robot Planning Systems	244
8.5	Robot Motion Path Planning	251
8.5.1	Main Methods and Development Trends of Robot Path Planning	251

8.5.2	Robot Path Planning Based on Approximate Voronoi Diagram	253
8.5.3	Robot Path Planning Based on Immune/Evolutionary Algorithms and Instance Learning	255
8.5.4	Robot Path Planning Based on Ant Algorithm	258
8.6	Robot Planning Base on Machine Learning	263
8.7	Summary	265
Exercises 8		265
Chapter 9	Robot Programming	268
9.1	Requirements and Language Types to Robot Programming	268
9.1.1	Requirements to Robot Programming	269
9.1.2	Language Types of Robot Programming	272
9.2	Structure and Basic Functions of Robot Language System	275
9.2.1	Structure of Robot Language System	275
9.2.2	Basic Functions of Robot Programming Languages	276
9.3	Robot Operation System ROS	278
9.4	Common-Used Languages for Robot Programming	281
9.4.1	Language VAL	282
9.4.2	Language SIGLA	284
9.4.3	Language IML	285
9.4.4	Language AL	285
9.5	Interpreted Scripting Language Python	286
9.5.1	Basic Data Structures of the Python Language	286
9.5.2	Selection Structures and Loop Structures	289
9.5.3	The Function	290
9.6	Robotics Simulation Based on MATLAB	291
9.7	Off-Line Programming of Robots	296
9.7.1	Features and Main Contents of Robot Off-Line Programming	296
9.7.2	Structure of Robot Off-Line Programming System	297
9.7.3	Robot Off-Line Programming System HOLPSS	299
9.8	Summary	302
Exercises 9		303
Chapter 10	Prospect to Robots	307
10.1	Current Situation and Prediction of Robot Technology and Market	307
10.1.1	World Robot Development Status and Development Forecast	307
10.1.2	Statistical Data Analysis of China's Industrial Robot Market	310
10.2	Developing Trends of Robot Technology	311

10.3	Current Robotics Development Programs in the World	313
10.4	Social Problems Caused by Applying Robots	316
10.5	Clone Technique Challenges to Intelligent Robot	319
10.6	Summary	322
	Exercises 10	323
References		324
List of English-Chinese Terms		340

第 1 章 绪 论

进入 21 世纪以来,人类除了致力于自身的发展外,还需要关注机器人、外星人和克隆人等问题。本书将不探讨外星人和克隆人问题,而着重讨论机器人问题。

当今社会的人们,对“机器人”这个名称并不陌生。从古代的神话传说,到现代的科学幻想小说、戏剧、电影和电视,都有许多关于机器人的精彩描绘。尽管在机器人学和机器人技术的研究领域已取得许多重要成果,但现实世界中的绝大多数机器人,既不像神话和文艺作品描写的那样智勇双全,也没有如某些企业家和媒体宣扬的那样多才多艺。现在,机器人的本领还是比较有限的。不过,机器人技术正在迅速发展,称得上日新月异,并开始对整个经济、工农业和服务业生产、太空和海洋探索,以及人类生活的各方面产生越来越大的影响。

1.1 机器人学的起源与发展

1.1.1 机器人学的起源

机器人的起源要追溯到 3000 多年前。“机器人”是 20 世纪 20 年代出现的存在于多种语言和文字中的新造词,它体现了人类长期以来的一种梦想,即创造出一种像人一样的机器人或人造人,以便能够代替人从事各种工作。

直到 60 多年前,“机器人”才作为专业术语加以引用,然而机器人的概念在人类的想象中却已存在 3000 多年了。早在我国西周时代(前 1046—前 771 年),就流传着有关巧匠偃师献给周穆王一个艺伎(歌舞机器人)的故事。作为第一批自动化动物之一的能够飞翔的木鸟是在公元前 400 年至公元前 350 年间制成的。在希腊神话中,公元前 3 世纪,古希腊发明家戴达罗斯用青铜为克里特岛国王迈诺斯建造了一个守卫宝岛的青铜卫士塔罗斯。在公元前 2 世纪出现的书籍中,描写过一个具有类似机器人角色的机械化剧院,这些角色能够在宫廷仪式上进行舞蹈和列队表演。我国东汉时期(25—220 年)的张衡发明的指南车是世界上最早的机器人雏形。

进入近代之后,人类期望发明各种机械工具和动力机器,用以协助甚至代替人们从事各种体力劳动的梦想更加强烈。18 世纪发明的蒸汽机开辟了利用机器动力代替人力的新纪元。随着动力机器的发明,人类社会出现了第一次工业和科学革命。各种自动机器、动力机和动力系统的问世,使机器人开始由幻想时期转入自动机械时期,许多机械式控制的机器人,主要是各种精巧的机器人玩具和工艺品,应运而生。

瑞士钟表名匠德罗斯父子三人于 1768—1774 年间,设计制造出 3 个像真人一样大小的机器人——写字偶人、绘图偶人和弹风琴偶人。它们是由凸轮控制和弹簧驱动的自动机器,至今还作为国宝保存在瑞士纳沙泰尔市艺术和历史博物馆内。同时,还有德国梅林制造的巨型泥塑偶人“巨龙哥雷姆”,日本物理学家细川半藏设计的各种自动机械图形,法国杰夸特设计的机械式可编程序织造机等。1893 年,加拿大摩尔设计的能行走的机器人“安德罗丁”

(Android),是以蒸汽为动力的。这些机器人工艺珍品,标志着人类在机器人从梦想到现实这一漫长道路上前进了一大步。

20 世纪初期,机器人已躁动于人类社会和经济的母胎,人们含有几分不安地期待着它的诞生。他们不知道即将问世的机器人将是个宠儿,还是个怪物。1920 年,捷克剧作家卡雷尔·恰佩克在他的科幻情节剧《罗萨姆的万能机器人》(Rossum's Universal Robots)中,第一次提出了“机器人”这个词语,被认为是机器人一词的起源。在该剧中,恰佩克把斯洛伐克语“Robota”理解为奴隶或劳役的意思。该剧忧心忡忡地预告了机器人的发展将对人类社会产生的悲剧性影响,引起人们的广泛关注。该剧的大致情节如下:罗萨姆公司设计制造的机器人按照其主人的命令默默地、没有感觉和感情地、呆板地从事繁重的劳动。后来,该公司的机器人技术取得了突破性进展,使机器人具有了智能和感情,导致机器人被广泛应用;在工厂和家务劳动中,机器人成了必不可少的成员。这些智能机器人逐渐发觉人类十分自私和不公正,终于有一天开始反抗人类了。机器人的体能和智能都非常优异,它们消灭了人类主人。但是机器人不知道如何制造它们自己,每台机器人的寿命不超过 20 年。它们认识到自己很快就会灭绝,所以它们保留了罗萨姆公司技术部主任的生命,让他传授使机器人世代繁殖的技术。但是,当它们掌握了这个技术后,技术部主任也难逃一死。

恰佩克提出的是机器人的安全、智能和自繁殖问题。机器人技术的进步很可能引发人类不希望出现的问题和结果。虽然科幻世界只是一种想象,但人类担心社会将可能出现这种现实。

各国对机器人的译法,几乎都从斯洛伐克语“robota”音译为“罗伯特”(如英语 robot,日语ロボット,俄语 работа,德语 robot 等),只有中文译为“机器人”。

针对人类社会对即将问世的机器人的不安,美国著名科学幻想小说家阿西摩夫于 1950 年在他的小说《我是机器人》中,提出了有名的“机器人三守则”:

- (1) 机器人必须不危害人类,也不允许它眼看人将受害而袖手旁观;
- (2) 机器人必须绝对服从于人类,除非这种服从有害于人类;
- (3) 机器人必须保护自身不受伤害,除非为了保护人类或者是人类命令它做出牺牲。

这三条守则,给机器人社会赋以新的伦理性,并使机器人的概念通俗化,更易于为人类社会接受。至今,它仍为机器人研究人员、设计制造厂家和用户,提供了十分有意义的指导方针。

美国人乔治·德沃尔在 1954 年设计了第一台电子程序可编的工业机器人,并于 1961 年申请了该项机器人专利。1962 年,美国万能自动化(Unimation)公司的第一台机器人 Unimate 在美国通用汽车公司投入使用,标志着第一代机器人的诞生。从此,机器人开始成为人类生活中的现实。此后,人类继续以自己的智慧和劳动,谱写机器人历史的新篇章。

1.1.2 国际机器人学的发展

工业机器人问世后的 10 年,从 20 世纪 60 年代初期到 70 年代初期,机器人技术的发展较为缓慢,许多研究单位和公司所做的努力均未获得成功。这一阶段的主要成果有美国斯坦福国际研究院(SRI International)于 1968 年研制的移动式智能机器人夏凯(Shakey)和辛

辛那提·米拉克龙(Cincinnati Milacron)公司于 1973 年制成的第一台适于投放市场的机器人 T3 等。

20 世纪 70 年代,人工智能学界开始对机器人产生浓厚兴趣。他们发现,机器人的出现与发展为人工智能的发展带来了新的生机,提供了一个很好的试验平台和应用场所,是人工智能可能取得重大进展的潜在领域。这一认识很快为许多国家的科技界、产业界和政府有关部门所赞同。随着自动控制理论、电子计算机和航天技术的迅速发展,到了 20 世纪 70 年代中期,机器人技术进入了一个新的发展阶段。到 20 世纪 70 年代末期,工业机器人有了更大的发展。进入 20 世纪 80 年代后,机器人生产继续保持 20 世纪 70 年代后期的发展势头。到 20 世纪 80 年代中期,机器人制造业已成为发展得最快和最好的经济部门之一。

到 20 世纪 80 年代后期,由于传统机器人用户应用工业机器人已趋饱和,从而造成工业机器人产品的积压,不少机器人厂家倒闭或被兼并,国际机器人学研究和机器人产业不景气。到 20 世纪 90 年代初,机器人产业出现复苏和继续发展的迹象。但是好景不长,1993—1994 年又出现了低谷。全世界工业机器人的数目每年在递增,但市场是波浪式向前发展的,1980 年至 20 世纪末,出现过三次马鞍形曲线。1995 年后,世界机器人数量逐年增加,增长率也较高,机器人学以较好的发展势头进入 21 世纪。

进入 21 世纪,工业机器人产业发展速度加快,年增长率达到 30% 左右。其中,亚洲工业机器人增长速度高达 43%,最为突出。

据联合国欧洲经济委员会(the United Nations Economic Commission for Europe, UNECE)和国际机器人联合会(International Federation of Robotics, IFR)统计,全球工业机器人在 1960—2006 年底累计安装 175 万多台;1960—2011 年累计安装超过 230 万台。工业机器人市场前景向好。

近年来,全球机器人行业发展迅速,2007 年全球机器人行业总销售量比 2006 年增长 10%。人性化、重型化、智能化已经成为未来机器人产业的主要发展趋势。现在全世界正在服役的工业机器人总数在 100 万台以上。此外,还有数千万服务机器人在运行。

据国际机器人联合会统计,2019 年全球机器人市场规模预计将达到 294.1 亿美元,其中,工业机器人 159.2 亿美元,服务机器人 94.6 亿美元,特种机器人 40.3 亿美元。2014—2019 年的平均增长率约为 12.3%。现在全世界运行的工业机器人总数在 200 万台以上。

在过去 50 年间,机器人学和机器人技术获得了引人瞩目的发展,具体体现在:①机器人产业在全世界迅速发展;②机器人的应用范围遍及工业、科技和国防的各个领域;③形成了新的学科——机器人学;④机器人向智能化方向发展;⑤服务机器人成为新秀并迅猛发展。

现在工业上运行的多数机器人,都不具有智能。随着工业机器人数量的快速增长和工业生产的发展,对机器人的工作能力也提出更高的要求,特别是需要各种具有不同程度智能的机器人和特种机器人。这些智能机器人有的能够模拟人类用两条腿走路,可在凹凸不平的地面上行走移动;有的具有视觉和触觉功能,能够进行独立操作、自动装配和产品检验;有的具有自主控制和决策能力。这些智能机器人不仅能应用各种反馈传感器,而且能运用人工智能中的各种学习、推理和决策技术。智能机器人还能应用许多最新的智能技术,如临场感技术、虚拟现实技术、多智能体技术、人工神经网络技术、遗传算法、仿生技术、多传感器集成和融合技术及纳米技术等。

机器人学与人工智能有十分密切的关系。智能机器人的发展是建立在人工智能的基础上的,并与人工智能相辅相成。一方面,机器人学的进一步发展需要人工智能基本原理的指导,并采用各种人工智能技术;另一方面,机器人学的出现与发展又为人工智能的发展带来了新的生机,产生了新的推动力,并提供了一个很好的试验与应用场所。也就是说,人工智能想在机器人学上找到实际应用,并使知识表示、问题求解、搜索规划、机器学习、环境感知和智能系统等基本理论得到进一步发展。粗略地说,由机器来模仿人类的智能行为,就是人工智能,或称为“机器智能”。而应用各种人工智能技术的新型机器人,就是智能机器人。

移动机器人是一类具有较高智能的机器人,也是智能机器人研究的一类前沿和重点领域。智能移动机器人是一类能够通过传感器感知环境和自身状态,实现在有障碍物的环境中面向目标的自主运动,从而完成一定作业功能的机器人系统。移动机器人与其他机器人的不同之处就在于强调了“移动”的特性。移动机器人不仅能够在生产、生活中起到越来越大的作用,而且是研究复杂智能行为的产生、探索人类思维模式的有效工具与实验平台。²¹ 世纪机器人的智能水平已经发展到一个新的高度,并将持续发展到令人赞叹的更高水平。

1.1.3 中国机器人学的发展

自 20 世纪 70 年代以来,中国的机器人学经历了一场从无到有、从小变大、从弱渐强的发展过程。如今,中国已经成为国际最大的机器人市场,一股前所未有的机器人学热潮汹涌澎湃,席卷神州大地,正在为中国经济的快速持续发展和人民福祉的不断改善做出新的贡献。

下文概括了中国机器人学的发展过程,着重归纳了中国机器人学的基本成就,并阐述了中国机器人学的发展战略。

1. 基本成就

中国于 1972 年开始研制工业机器人,虽起步较晚但进步较快,已在工业机器人、特种机器人和智能机器人各方面取得明显成绩,为我国机器人技术的发展打下初步基础。

(1) 工业机器人

中国工业机器人的发展大致可分为 4 个阶段:20 世纪 70 年代的萌芽期;20 世纪 80 年代的开发期;20 世纪 90 年代—21 世纪初(2010 年)的初步应用期,21 世纪初(2010 年)以来的井喷式发展与应用期。

“七五”期间进行了工业机器人基础技术、基础元器件、几类工业机器人整机及应用工程的开发研究;完成了示教再现式工业机器人成套技术的开发;研制出喷涂、弧焊、点焊和搬运等作业机器人整机,以及几类专用和通用控制系统及关键零部件等,且形成了小批量生产能力。

在 20 世纪 90 年代中期,以焊接机器人的工程应用作为重点进行了开发研究,迅速掌握了焊接机器人的应用工程技术。20 世纪 90 年代后半期至 21 世纪初,实现了国产机器人的商品化和工业机器人的推广应用,为产业化奠定基础。

中国工业机器人产量和装机台数占世界的比重在 1972—2000 年期间微不足道,进入 21 世纪以来,工业机器人市场迅速增长,经过一段产业化过程后,其市场已呈井喷之势。2014 年全球新安装工业机器人达到 16.67 万台,其中中国的工业机器人年装机量超过日

本,达到 5.6 万台,约占世界总量的 1/3,成为全球最大的机器人市场。2019 年,中国新增工业机器人装机量为 14.05 万台,累计装机 78.3 万台,总量居亚洲第一,年增长率为 12%。不过,中国的机器人密度仍然较低。

(2) 智能机器人计划

1986 年 3 月,中国启动实施了“国家高技术研究发展计划”(简称“863”计划)。按照“863”计划智能机器人主题的总体战略目标,智能机器人研究开发工作的实施分为型号和应用工程、基础技术开发、实用技术开发、成果推广 4 个层次,通过各层次的工作体现和实现战略目标。中国的服务机器人项目涉及除尘机器人、玩具机器人、保安机器人、教育机器人、智能轮椅机器人、智能穿戴机器人等。

此外,国家自然科学基金也资助智能机器人领域的重大课题研究,包括智能机器人仿生技术、移动机器人的视觉与听觉计算、深海自主机器人、智能服务机器人、微创医疗机器人等。

(3) 特种机器人

到 20 世纪 90 年代,在“863”计划的支持下,中国在发展工业机器人的同时,也对非制造环境下的应用机器人问题进行了研究,并取得了一批成果。特种机器人的开发包括管道机器人、爬壁机器人、水下机器人、自动导引车和排险机器人等。例如,2012 年 6 月 27 日,我国深海载人潜水器“蛟龙号”,成功下潜至 7062m;2020 年,我国最新型的深水潜航器“奋斗者号”已完成载人深海下潜万米级深度,标志着中国水下潜航器的发展进入到了新的阶段,达到国际先进水平。

又如,月球车“玉兔号”顺利驶抵月球表面,围绕“嫦娥三号”旋转拍照,并传回照片,标志着我国探月工程获得阶段性的重大成果。2021 年 5 月 15 日,我国首个火星探测器“天问一号”已顺利着陆火星,中国已成为世界上首次探索火星即完成软着陆任务的国家。

2. 发展战略

新一轮工业革命呼唤发展智能制造。在“十二五”规划中,高端制造业(机器人+智能制造)已被列入战略性新兴产业。国家科技部 2012 年 4 月发布《智能制造科技发展“十二五”专项规划》和《服务机器人科技发展“十二五”专项规划》。在“十二五”期间,重点培育发展服务机器人新兴产业,重点发展公共安全机器人、医疗康复机器人、仿生机器人平台和模块化核心部件。

国务院于 2015 年 5 月 8 日公布《中国制造 2025》,明确提出实现中国制造强国的路线图,提出的大力推动重点领域突出了机器人制造,要“围绕汽车、机械、电子、危险品制造、国防军工、化工、轻工等工业机器人、特种机器人,以及医疗健康、家庭服务、教育娱乐等服务机器人应用需求,积极研发新产品,促进机器人标准化、模块化发展,扩大市场应用。突破机器人本体、减速器、伺服电机、控制器、传感器与驱动器等关键零部件及系统集成设计制造等技术瓶颈”。

国务院又于 2015 年 7 月 8 日公布《新一代人工智能发展规划》,其重点任务中涉及发展机器人科技的内容有:

(1) 建立自主协同控制与优化决策理论。研究面向自主无人系统的协同感知与交互,面向自主无人系统的协同控制与优化决策,知识驱动的人机物三元协同与互操作等理论。

(2) 发展自主无人系统的智能技术。研究无人机自主控制和汽车、船舶、轨道交通自动

驾驶等智能技术,服务机器人、空间机器人、海洋机器人、极地机器人技术,无人车间/智能工厂智能技术,高端智能控制技术和自主无人操作系统。研究复杂环境下基于计算机视觉的定位、导航、识别等机器人及机械手臂自主控制技术。

(3) 创建自主无人系统支撑平台。建立自主无人系统共性核心技术支撑平台,无人机自主控制以及汽车、船舶和轨道交通自动驾驶支撑平台,服务机器人、空间机器人、海洋机器人、极地机器人支撑平台,智能工厂与智能控制装备技术支撑平台等。

(4) 发展智能机器人新兴产业。攻克智能机器人核心零部件、专用传感器,完善智能机器人硬件接口标准、软件接口协议标准以及安全使用标准。研制智能工业机器人、智能服务机器人,实现大规模应用并进入国际市场。研制和推广空间机器人、海洋机器人、极地机器人等特种智能机器人。建立智能机器人标准体系和安全规则。

2016年4月28日,工业和信息化部、国家发展和改革委员会与财政部共同发布《机器人产业发展规划(2016—2020)》,明确要在工业机器人领域,聚焦智能生产、智能物流,攻克工业机器人关键技术,提升可操作性和可维护性,重点发展弧焊机器人、真空(洁净)机器人、全自主编程智能工业机器人、人机协作机器人、双臂机器人、重载无人搬运车(automated guided vehicles, AGV)6种标志性工业机器人产品,引导我国工业机器人向中高端发展。在服务机器人领域,重点发展消防救援机器人、手术机器人、智能型公共服务机器人、智能护理机器人4种标志性产品,推进专业服务机器人实现系列化,个人/家庭服务机器人实现商品化。

由此可见,发展智能机器人已上升为我国国家战略,必将对我国机器人产业乃至国民经济的发展产生巨大推动作用和深远影响。

1.2 机器人的定义和特征

1.2.1 机器人的定义

至今还没有对机器人的统一定义。要给机器人下个合适的和为人们普遍接受的定义是很难的,还因公众对机器人的想象以及科学幻想小说、电影和电视中对机器人形状的描绘而变得更为困难。为了规定技术、开发机器人新的工作能力和比较不同国家和公司的成果,需要对机器人这一术语有某些共同的理解。现在,世界上对机器人还没有统一的定义,各国有自己的定义,专家们也采用不同的方法来定义这个术语,这些定义之间差别较大。产生这种差别的部分原因是很难区别简单的机器人与其密切相关的运送材料的“刚性自动化”技术装置。

关于机器人的定义,国际上主要有如下几种:

(1) 英国《牛津简明英语词典》的定义。机器人是“貌似人的自动机,是具有智力的、顺从于人的但不具有人格的机器”。

这一定义并不完全正确,因为还不存在与人类相似的机器人在运行。这是一种理想的机器人。

(2) 美国机器人协会(Robotics Industries Association, RIA)的定义。机器人是“一种用于移动各种材料、零件、工具或专用装置的,通过可编程序动作来执行种种任务的,并具有编程能力的多功能机械手”(manipulator)。

尽管这一定义较为实用,但并不全面。这里指的是工业机器人。

(3) 日本工业机器人协会(Japan Robot Association, JRA)的定义。工业机器人是“一种装备有记忆装置和末端执行器(end effector)的、能够转动并通过自动完成各种移动来代替人类劳动的通用机器”。

或者分为两种情况来定义：

① 工业机器人是“一种能够执行与人的上肢类似动作的多功能机器”。

② 智能机器人是“一种具有感觉和识别能力,并能够控制自身行为的机器”。

前一定义是工业机器人的一个较为广义的定义。后一种则分别对工业机器人和智能机器人进行了定义。

(4) 美国国家标准和技术研究所(National Institute of Standards and Technology, NIST)的定义。机器人是“一种能够进行编程并在自动控制下执行某些操作和移动作业任务的机械装置”。

这也是一种比较广义的工业机器人定义。

(5) 国际标准化组织(International Organization for Standardization, ISO)的定义。机器人是“一种自动的、位置可控的、具有编程能力的多功能机械手,这种机械手具有几个轴,能够借助于可编程序操作来处理各种材料、零件、工具和专用装置,以执行种种任务”。

显然,这一定义与美国机器人协会的定义相似。

(6) 我国机器人的定义。随着机器人技术的发展,我国也面临讨论和制定关于机器人技术的各项标准问题,其中包括对机器人的定义。我们可以参考各国的定义,结合我国情况,对机器人做出统一的定义。

《中国大百科全书》对机器人的定义为:能灵活地完成特定的操作和运动任务,并可再编程序的多功能操作器。而对机械手的定义为:一种模拟人手操作的自动机械,它可按固定程序抓取、搬运物件或操持工具完成某些特定操作。

我国科学家对机器人的定义是:机器人是一种自动化的机器,具备一些与人或生物相似的智能能力,如感知能力、规划能力、动作能力和协同能力,是一种具有高度灵活性的自动化机器。

上述各种定义有共同之处,即认为机器人①像人或人的上肢,并能模仿人的动作;②具有智力或感觉与识别能力;③是人造的机器或机械电子装置。

随着机器人的进化和机器人智能的发展,这些定义都有修改的必要,甚至需要重新定义。

机器人的范畴不但要包括“由人类制造的像人一样的机器”,还应包括“由人类制造的生物”,甚至包括“人造人”,尽管我们不赞成制造这种人。由此看来,现在就很难统一定义的机器人,今后更难为它下个确切的和公认的定义了!

1.2.2 机器人的主要特征

机器人具有许多特征,而通用性和适应性是机器人的两个最主要的特征。

1. 通用性(versatility)

通用性指的是某种执行不同功能和完成多样简单任务的实际能力。机器人的通用性取决于其几何特性和机械能力。通用性也意味着,机器人具有可变的几何结构,即根据生产工

作需要进行变更的几何结构;或者说,在机械结构上允许机器人执行不同的任务或以不同的方式完成同一工作。现有的大多数机器人都具有不同程度的通用性,包括机械手的机动性和控制系统的灵活性。

必须指出的是,通用性不是由自由度单独决定的。增加自由度一般能提高通用性。不过,还必须考虑其他因素,特别是末端装置的结构和能力,如它们能否适用不同的工具等。

2. 适应性(adaptability)

机器人的适应性是指其对环境的自适应能力,即所设计的机器人能够自我执行未经完全指定的任务,而不管任务执行过程中所发生的没有预计到的环境变化。这一能力要求机器人认识其环境,即具有人工知觉。在这方面,机器人将使用下述能力:

- (1) 运用传感器感测环境的能力;
- (2) 分析任务空间和执行操作规划的能力;
- (3) 自动指令模式能力。

迄今为止,所开发的机器人知觉与人类对环境的解释能力相比仍然比较有限。这个领域内的某些重要研究工作已取得重大突破。

对于工业机器人来说,适应性指的是编好的程序模式和运动速度能够适应工件尺寸、位置和工作场地的变化的能力。其中,主要考虑两种适应性:

- (1) 点适应性,涉及机器人如何找到点的位置。例如,找到开始程序操作点的位置。

点适应性具有 4 种搜索(允许对程序进行自动反馈调节)模式,即近似搜索、延时近似搜索、精确搜索和自由搜索。近似搜索允许传感器在程序控制下沿着程序方向中断机器人运动。延时近似搜索能够在编程传感器被激发一定时间之后中断机器人的运动。精确搜索能够使机器人停止在传感器信号出现变化的精确位置上。自由搜索能够使机器人找到满足所有编程传感器信号显示的位置。

- (2) 曲线适应性,涉及机器人如何利用由传感器得到的信息沿着曲线工作。曲线适应性包括速度适应性和形状适应性两种。

速度适应性涉及选择最佳运动速度的问题。即使有了完全确定的运动曲线,选择最佳运动速度仍然困难。在具有速度适应性之后,就能够根据传感器提供的信息,调整机器人的运动速度。

形状适应性涉及要求工具跟踪某条形状未知的曲线问题。

综合运用点适应性和曲线适应性,能够对程序进行自动调整。初始编制的仅仅是个粗略的程序,然后由系统自行适应实际位置和形状。

1.3 机器人的构成与分类

1.3.1 机器人系统的构成

1886 年,法国作家利尔亚当在他的小说《未来的夏娃》中将外表上像人的机器起名为“安德罗丁”(Android),它由 4 部分组成:

- (1) 生命系统: 具有平衡、步行、发声、身体摆动、感觉、表情、调节运动等功能。

(2) 造型解质：关节能自由运动的金属覆盖体，一种盔甲。

(3) 人造肌肉：在上述盔甲上有肌肉、静脉、性别特征等人体的基本形态。

(4) 人造皮肤：含有肤色、肌理、轮廓、头发、视觉、牙齿、手爪等。

现在的一个机器人系统，一般由下列 4 个互相作用的部分组成：机械手、环境、任务和控制器，如图 1.1(a)所示，图 1.1(b)为其简化形式。

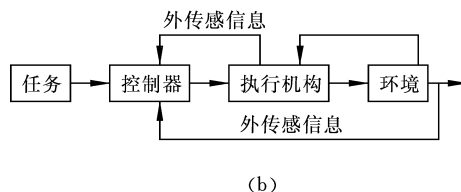
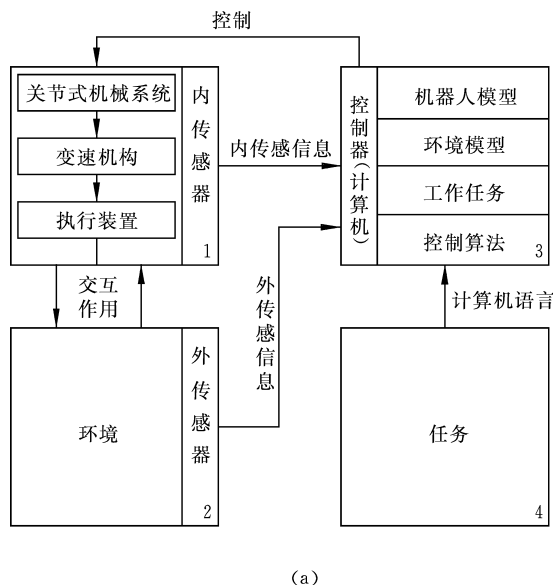


图 1.1 机器人系统的基本结构

机械手是具有传动执行装置的机械，它由臂、关节和末端执行装置(工具等)构成，组合为一个互连接和互相依赖的运动机构。机械手用于执行指定的作业任务。不同的机械手具有不同的结构类型。图 1.2 给出了机械手的几何结构简图。

在一些文献中，称机械手为“操作机”、“机械臂”或“操作手”。大多数机械手是具有几个自由度的关节式机械结构，一般具有 6 个自由度。其中，前 3 个自由度引导夹手装置至所需位置，而后 3 个自由度用来决定末端执行装置的方向，见图 1.2。机械手的结构将在下文进一步讨论。

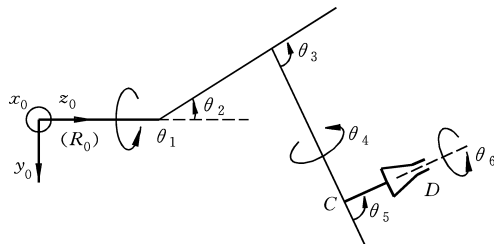


图 1.2 机械手的几何结构简图

环境即机器人所处的周围环境。环境不仅由几何条件(可达空间)决定，而且由环境和它所包含的每个事物的全部自然特性决定。机器人的固有特性由这些自然特性及其环境间的互相作用决定。

在环境中，机器人会遇到一些障碍物和其他物体，它必须避免与这些障碍物发生碰撞，并对这些物体发生作用。

机器人系统中的一些传感器设置在环境中的某处而不在机械手上。这些传感器是环境的组成部分，称为“外传感器”。

环境信息一般是确定的和已知的,但在许多情况下环境是未知的和不确定的。

任务被定义为环境的两种状态(初始状态和目标状态)间的差别。必须用适当的程序设计语言来描述这些任务,并把它们存入机器人系统的控制计算机。这种描述必须能为计算机所理解。随着所用系统的不同,语言的描述方式可为图形的、口语的(语音的)或书面文字的。

计算机是机器人的控制器或脑子。机器人接收来自传感器的信号,对之进行数据处理,并按照预存信息、机器人的状态及其环境情况等,产生控制信号驱动机器人的各个关节。

对于技术比较简单的机器人,计算机只含有固定程序;对于技术比较先进的机器人,可采用程序完全可编的小型计算机、微型计算机或微处理机作为其计算机。具体来说,在计算机内存储有下列信息:

- (1) 机器人动作模型,表示执行装置在激发信号与随之发生的机器人运动之间的关系。
- (2) 环境模型,描述机器人在可达空间内的每一事物。例如,说明由于哪些区域存在障碍物而不能对其起作用。
- (3) 任务程序,使计算机能够理解其所要执行的作业任务。
- (4) 控制算法,是计算机指令的序列,提供对机器人的控制,以便执行需要做的工作。

1.3.2 机器人的自由度

自由度是机器人的一个重要技术指标,它是由机器人的结构决定的,并直接影响机器人的机动性。

(1) 刚体的自由度

物体上任何一点都与坐标轴的正交集有关。物体能够对坐标系进行独立运动的数目称为“自由度”(degree of freedom, DOF)。物体所能进行的运动(见图 1.3)有:

沿着坐标轴 Ox , Oy 和 Oz 的 3 个平移运动 T_1 , T_2 和 T_3 ;

绕着坐标轴 Ox , Oy 和 Oz 的 3 个旋转运动 R_1 , R_2 和 R_3 。

这意味着物体能够运用 3 个平移和 3 个旋转、相对于坐标系进行定向和运动。

一个简单物体有 6 个自由度。当两个物体间确立起某种关系时,一个物体就对另一个物体失去一些自由度。这种关系也可以用两物体间由于建立连接关系而不能进行的移动或转动来表示。

(2) 机器人的自由度

人们期望机器人能够以准确的方位把它的端部执行装置(end effector)或与它连接的工具移动到给定点。如果机器人的用途预先是未知的,那么它应当具有 6 个自由度。不过,如果工具本身具有某种特别结构,那么就可能不需要 6 个自由度。例如,要把一个球放到空间某个给定位置有 3 个自由度就足够了(见图 1.4(a))。又如,要对某个旋转钻头进行定位

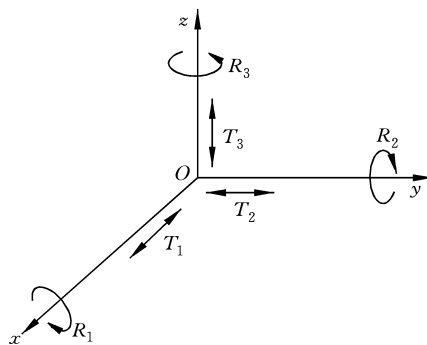


图 1.3 刚体的 6 个自由度

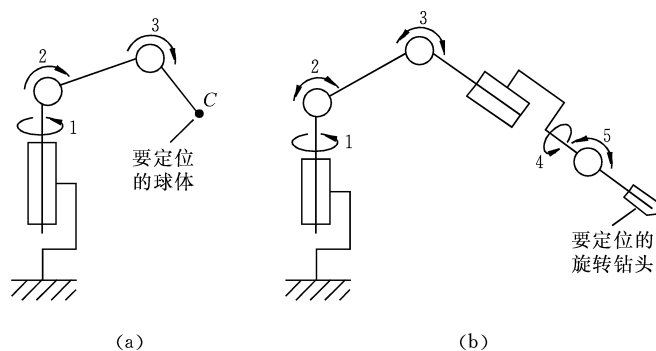


图 1.4 机器人自由度举例

与定向就需要 5 个自由度；该钻头可表示为某个绕着其主轴旋转的圆柱体(见图 1.4(b))。

一般地，机器人的手臂具有 3 个自由度，其他的自由度为末端执行装置所有。当要求某一机器人钻孔时，其钻头必须转动。不过，这一转动总是由外部的电动机带动的。因此，不把它看作机器人的一个自由度。这同样适用于机械手。机械手的夹手应能开闭。不过，也不能把夹手的这个开闭所用的自由度当作机器人的自由度之一，因为这个自由度只对夹手的操作起作用。这一点是很重要的，必须记住。

3. 自由度与机动性

不能把自由度描述为一个事物对另一个事物的属性。图 1.5(a)就是一例。图中，对于固定底座来说，点 A 没有自由度，点 B 有两个自由度，而点 C 有 3 个自由度。如果点 D 的位置被确定，那么用于移动 D 的关节 C 在理论上将是冗余的，尽管在实际上并没有这种需要。这时，可以认为关节 C 不再有自由度了，但具有机动度(degree of mobility)。不过，如果 CD 是由定位点 C 来定向的，那么关节 C 就成为一个自由度，它能够使 CD 在一定范围内定向。如果要使 CD 指向任何方向，那么就需要另外两个自由度。

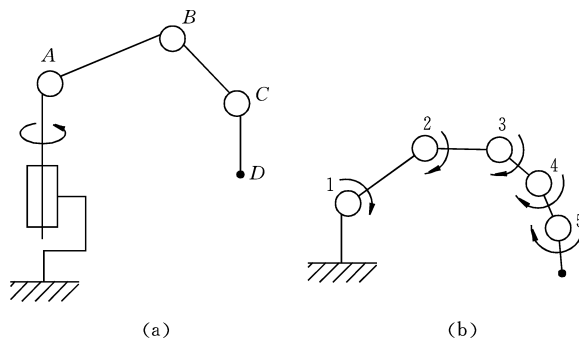


图 1.5 自由度与机动度

有两点值得记住：

(1) 并非所有的机动性都构成 1 个自由度。从所执行的作用考虑，一个关节可能成为 1 个自由度，但是并非一成不变。例如，在图 1.5(b)中，尽管有很多关节数(5 个)，但是在任何情况下这台机器人的独立自由度不多于 2 个。

(2) 一般不要求机器人具有 6 个以上的独立自由度,但是可以采用比此多得多的机动度。弄清这一点对于建立机器人的控制是十分重要的。过多的自由度可能产生冗余自由度。尽管如此,仍然有人在研究具有 9 个自由度的机器人,以求得到更大的机动性。

1.3.3 机器人的分类

机器人的分类方法很多。这里首先介绍 3 种分类法,即按机械手的几何结构、机器人的控制方式和机器人的信息输入方式分类。

1. 按机械手的几何结构分类

机械手的机械配置形式多种多样。最常见的结构形式是用其坐标特性来描述的。这些坐标结构包括笛卡儿坐标结构、柱面坐标结构、极坐标结构、球面坐标结构和关节式球面坐标结构等。这里简单介绍柱面、球面和关节式球面坐标结构 3 种最常见的机器人。

(1) 柱面坐标机器人。柱面坐标机器人主要由垂直柱子、水平手臂(或机械手)和底座构成。水平机械手装在垂直柱子上,能自由伸缩,并可沿垂直柱子上下运动。垂直柱子安装在底座上,并与水平机械手一起(作为一个部件)能在底座上移动。这样,这种机器人的工作包迹(区间)就形成了一段圆柱面,如图 1.6 所示。因此,把这种机器人称为“柱面坐标机器人”。

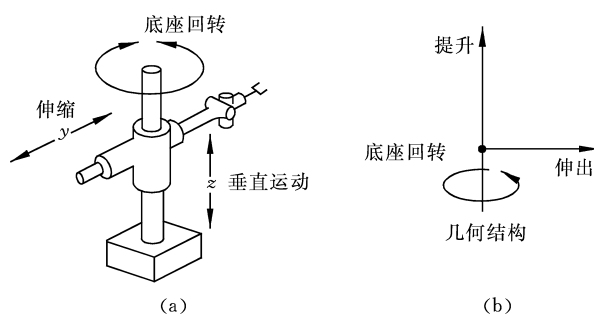


图 1.6 柱面坐标机器人

(2) 球面坐标机器人。如图 1.7 所示,它像坦克的炮塔一样,机械手能够做里外伸缩移动、在垂直平面上摆动以及绕底座在水平面上转动。因此,这种机器人的工作包迹形成了球面的一部分,并被称为“球面坐标机器人”。

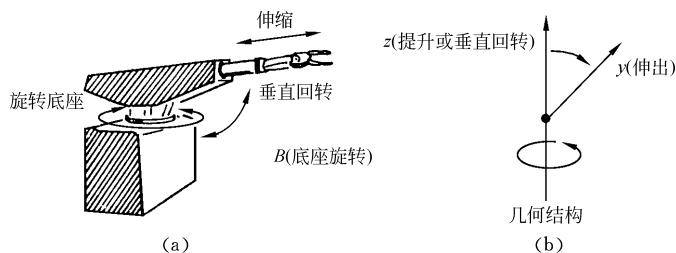


图 1.7 球面坐标机器人

(3) 关节式球面坐标机器人。主要由底座(或躯干)、上臂和前臂构成。上臂和前臂可

在通过底座的垂直平面上运动,如图 1.8 所示。在前臂和上臂间,机械手有个肘关节;而在上臂和底座间,机械手有个肩关节。在水平平面上的旋转运动,既可由肩关节进行,也可以通过绕底座旋转来实现。这种机器人的工作包迹形成了球面的大部分,称为“关节式球面机器人”。

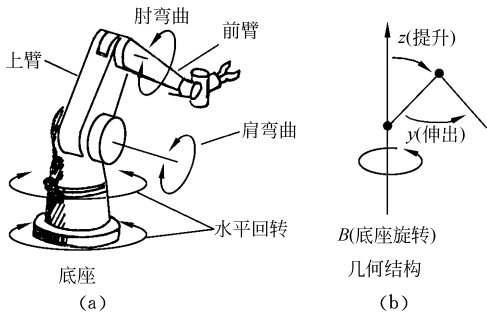


图 1.8 关节式球面机器人

2. 按机器人的控制方式分类

按照控制方式可把机器人分为非伺服机器人和伺服控制机器人两种。

(1) 非伺服机器人(non-servo robots)。非伺服机器人的工作能力比较有限,它们往往指那些叫作“终点”、“抓放”或“开关”式的机器人,尤其是“有限顺序”机器人。这种机器人按照预先编好的程序顺序进行工作,使用终端限位开关、制动器、插销板和定序器来控制机器人机械手的运动,其工作原理方块如图 1.9 所示。在图 1.9 中,插销板用来预先规定机器人的工作顺序,其往往是可调的。定序器是一种定序开关或步进装置,能够按照预定的正确顺序接通驱动装置的能源。驱动装置在接通能源后,就带动机器人的手臂、腕部和抓手等装置运动。当它们移动到由终端限位开关所规定的位置时,限位开关切换工作状态,向定序器送去一个“工作任务(或规定运动)业已完成”的信号,并使终端制动器动作,切断驱动能源,使机械手停止运动。

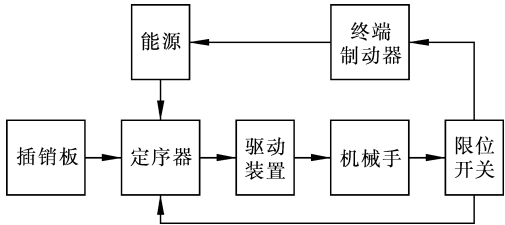


图 1.9 有限顺序机器人方块图

(2) 伺服控制机器人(servo-controlled robots)。伺服控制机器人比非伺服机器人的工作能力更强,因而价格较贵,而且在某些情况下不如简单的机器人可靠。图 1.10 为伺服控制机器人的方块图。伺服系统的被控制量(输出)可为机器人端部执行装置(或工具)的位置、速度、加速度和力等。通过反馈传感器取得的反馈信号与来自给定装置(如给定电位器)的综合信号,在用比较器进行比较后,得到误差信号,经过放大后用以激发机器人的驱动装置,进而带动末端执行装置进行具有一定规律的运动、到达规定的位置或速度等。显然,这

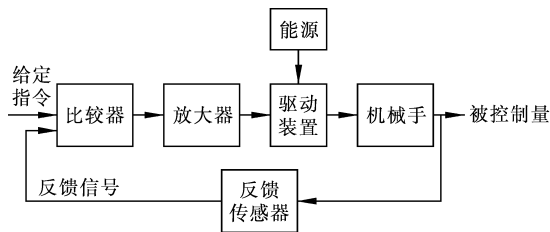


图 1.10 伺服控制机器人方块图

就是一个反馈控制系统。

伺服控制机器人又可分为点位伺服控制和连续路径(轨迹)伺服控制两种。

点位伺服控制机器人能够在其工作包迹内精确执行三维编程点之间的运动。一般只对其一段路径的端点进行示教,而且机器人以最快的和最直接的路径从一个端点移到另一端点。可把这些端点设置在已知移动轴的任何位置上。点与点之间的操作总是有点不平稳,即使同时控制两根轴,它们的运动轨迹也很难完全一样。因此,点位伺服控制机器人用于只有终端位置是重要的而对编程点之间的路径和速度不做主要考虑的场合。

点位伺服控制机器人的初始程序比较容易设计,但不易在运行期间对编程点进行修正。由于没有行程控制,实际工作路径可能与示教路径不同。这种机器人具有很大的操作灵活性,因而其负载能力和工作范围均名列前茅。液压装置是这种机器人系统最常用的驱动装置。

连续路径(轨迹)伺服控制机器人能够平滑地跟随某个预先规定的路径,其轨迹往往是某条不在预编程端点停留的曲线路径。因此,这种机器人特别适用于喷漆作业。

连续路径伺服控制机器人具有良好的控制和运行特性;其数据是依时间采样的,而不是依预先规定的空间点采样。这样,就能够把大量的空间信息存储在磁盘或光盘上。这种机器人的运行速度较快,功率较小,负载能力也较小。喷漆、弧焊、抛光和磨削等加工是这种机器人的典型应用场合。

3. 按机器人控制器的信息输入方式分类

在采用这种分类法进行分类时,不同国家略有不同,但有统一的标准。这里主要介绍日本工业机器人协会(JRA)、美国机器人协会(RIA)和法国工业机器人协会(Association Francaise de Robotique Industrielle, AFRI)所采用的分类法。

(1) JRA 分类法

日本工业机器人协会把机器人分为 6 类。

第 1 类: 手动操作手,是一种由操作人员直接进行操作的具有几个自由度的加工装置。

第 2 类: 定序机器人,是按照预定的顺序、条件和位置,逐步地重复执行给定的作业任务的机械手,其预定信息(如工作步骤等)难以修改。

第 3 类: 变序机器人,它与第 2 类一样,但其工作次序等信息易于修改。

第 4 类: 复演式机器人,这种机器人能够按照记忆装置存储的信息复现原先由人示教的动作。这些示教动作能够被自动地重复执行。

第 5 类: 程控机器人,操作人员并不是对这种机器人进行手动示教,而是向机器人提供

运动程序,使它执行给定的任务。其控制方式与数控机床一样。

第 6 类:智能机器人,它能够采用传感信息来独立检测其工作环境或工作条件的变化,并借助其自我决策能力,成功地进行相应的工作,而不管其执行任务的环境条件发生了什么变化。

(2) RIA 分类法:

美国机器人协会把 JRA 分类法中的后 4 类机器当作机器人。

(3) AFRI 分类法

法国工业机器人协会把机器人分为 4 种型号。

A 型: JRA 分类法中的第 1 类,手控或遥控加工设备。

B 型: 包括 JRA 分类法中的第 2 类和第 3 类,具有预编工作周期的自动加工设备。

C 型: 包括 JRA 分类法中的第 4 类和第 5 类,程序可编和伺服机器人,具有点位或连续路径轨迹,称为“第一代机器人”。

D 型: JRA 分类法中的第 6 类,能获取一定的环境数据,称为“第二代机器人”。

4. 按机器人的智能程度分类

(1) 一般机器人,不具有智能,只具有一般编程能力和操作功能。

(2) 智能机器人,具有不同程度的智能,又可分为:

① 传感型机器人,利用传感信息(包括视觉、听觉、触觉、接近觉、力觉和红外、超声及激光等)进行信息处理,实现控制与操作。

② 交互型机器人,机器人通过计算机系统与操作员或程序员进行人-机对话,实现对机器人的控制与操作。

③ 自主型机器人,在设计制作之后,机器人无需人的干预,能够在各种环境下自动完成各项拟人任务。

5. 按机器人的用途分类

(1) 工业机器人或产业机器人,应用在工农业生产中,主要应用在制造业部门,进行焊接、喷漆、装配、搬运、检验、农产品加工等作业。

(2) 探索机器人,用于进行太空和海洋探索,也可用于地面和地下探索。

(3) 服务机器人,一种半自主或全自主工作的机器人,其所从事的服务工作可使人类生存得更好,使制造业以外的设备工作得更好。

(4) 军用机器人,用于军事目的,或为进攻性的、或为防御性的机器人。又可分为空中军用机器人、海洋军用机器人和地面军用机器人。可简称为“空军机器人”、“海军机器人”和“陆军机器人”。

6. 按机器人移动性分类

(1) 固定式机器人,固定在某个底座上,整台机器人(或机械手)不能移动,只能移动各个关节。

(2) 移动机器人,整个机器人可沿某个方向或任意方向移动。这种机器人又可分为轮式机器人、履带式机器人和步行机器人,其中后者又有单足、双足、四足、六足和八足行走机

机器人之分。

此外,也可以把机器人分为下列几种:

- (1) 机械手或操作机,模仿人的上肢运动;
- (2) 轮式移动机器人,模仿车辆移动;
- (3) 步行机器人,模仿人的下肢运动;
- (4) 水下机器人,工作在水下;
- (5) 飞行机器人,飞行在空中;
- (6) 传感型机器人,特别是视觉机器人,具有传感器;
- (7) 智能型机器人,应用人工智能技术的机器人,具有人工智能技术;
- (8) 机器人化工业自动线,在生产线上成批应用机器人。

1.4 机器人学的研究领域

机器人学有着极其广泛的研究和应用领域。这些领域体现出广泛的学科交叉特点,涉及众多的课题,如机器人体系结构、机构、控制、智能、传感、机器人装配、恶劣环境下的机器人以及机器人语言等。机器人已在工业、农业、商业、旅游业、空中和海洋以及国防等领域获得越来越普遍的应用。下面是一些比较重要的研究领域。

1. 机器人视觉

机器视觉或计算机视觉是给计算机系统装上视频输入装置以便能够“看见”周围的物体。机器视觉主要用计算机来模拟人的视觉功能,从客观事物的图像中提取信息,进行处理并加以理解,最终用于实际检测、测量和控制。

计算机视觉通常可分为低层视觉与高层视觉两类。低层视觉主要执行预处理功能,如边缘检测、动目标检测、纹理分析,通过阴影获得形状、立体造型、曲面色彩等。高层视觉则主要是理解所观察的形象。

机器人视觉是指使机器人具有视觉感知功能的系统,是传感型智能机器人系统的重要领域之一。机器人视觉可以通过视觉传感器获取环境的二维图像,并通过视觉处理器进行分析和解释,进而转换为符号,让机器人能够辨识物体,并确定其位置。机器人视觉已在智能制造、智能驾驶导航、智能交通、智慧农业以及机器人竞赛中获得广泛应用。

2. 语音识别技术

语音识别(speech recognition)也称为“自动语音识别”(automatic speech recognition, ASR),是自然语言处理的重要内容之一。语音识别就是利用机器将语音信号转换成文本信息,其最终目的是让机器能够听懂人的语言。语音识别技术是指让机器通过识别和理解把语音信号转变为计算机可读的文本或命令的技术。语音识别的本质是一种基于语音特征参数的模式识别,即通过学习,系统能够把输入的语音按一定模式进行分类,进而根据判定准则找出最佳匹配结果。

语音识别技术已在机器人中获得广泛应用,世界各国著名的人工智能和机器人公司争先恐后地开发语音识别产品,投放市场。其中比较有影响的公司和产品有苹果的智能语音

助理 Siri、微软的社交对话机器人小娜(Cortana)、阿里巴巴的私人语音助理小蜜、科大讯飞的语音识别咪咕灵犀和 SR301、百度的 Raven H、腾讯的叮当智能屏、思必驰的 AISpeech 以及丰富多彩、五花八门的语音识别装置和聊天机器人产品等。

3. 传感器与感知系统

- 各种新型传感器的开发,包括视觉、触觉、听觉、接近觉、力觉、临场感等
- 多传感系统与传感器融合
- 传感数据集成
- 主动视觉与高速运动视觉
- 传感器硬件模块化
- 恶劣工况下的传感技术
- 连续语言理解与处理
- 传感系统软件
- 虚拟现实技术

4. 驱动、建模与运动控制

- 超低惯性驱动电机
- 直接驱动与交流驱动
- 离散事件驱动系统的建模、控制与性能评价
- 控制机理(理论),包括经典控制、现代控制和智能控制
- 控制系统结构
- 控制算法
- 多机器人分组协调控制与群控
- 控制系统动力学分析
- 控制器接口
- 在线控制和实时控制
- 自主操作和自主控制
- 声音控制和语音控制

5. 自动规划与调度

- 环境模型的描述
- 控制知识的表示
- 路径规划
- 任务规划
- 非结构环境下的规划
- 含有不确定性时的规划
- 未知环境中移动机器人规划与导航
- 智能算法
- 协调操作(运动)规划

- 装配规划
- 基于传感信息的规划
- 任务协商与调度
- 制造(加工)系统中机器人的调度

6. 计算机系统

- 智能机器人控制计算机系统的体系结构
- 通用与专用计算机语言
- 标准化接口
- 神经计算机与并行处理
- 人机通信
- 多智能体系统(multi-agent system, MAS)

7. 应用领域

- 机器人在工业、农业、建筑业中的应用
- 机器人在服务业的应用
- 机器人在核能、高空和太空、水下和其他危险环境中的应用
- 采矿机器人
- 军用机器人
- 灾难救援机器人
- 康复机器人
- 排险机器人和防爆机器人
- 机器人在计算机集成制造系统(computer integrated manufacturing systems, CIMS)和柔性制造系统(flexible manufacturing systems, FMS)中的应用

8. 其他

- 微电子-机械系统的设计与超微型机器人
- 产品及其自动加工的协同设计

1.5 机器人学的应用领域

机器人已在工业生产、海空探索、康复和军事等领域获得广泛应用。此外,机器人已逐渐在医院、家庭和一些服务行业获得推广应用,发展十分迅速。

1.5.1 工业机器人

机器人无论是否与其他机器一起运用,与传统的机器相比,它具有两个主要优点:

(1) 生产过程的几乎完全自动化带来了较高质量的成品和更好的质量控制,并提高了对不断变化的用户需求的适应能力,从而提高产品在市场上的竞争能力。

(2) 生产设备的高度适应能力允许生产线从一种产品快速转换为另一种产品。例如,从生产一种型号的汽车转换为生产另一型号的汽车。当某个故障使生产设备上的一个零件不能运动时,该设备也具有适应故障的能力。

上述各种自适应生产设备叫作“柔性制造(加工)系统”。一个柔性生产单元是由为数不多的机器人和一些配套运行的机器组成的。例如,一台设计用于与车床配套的机器人,与自动车床一起组成了一个柔性单元。许多柔性单元一起运行就构成了柔性车间。

现在工业机器人主要用于汽车工业、机电工业(包括电信工业)、通用机械和工程机械工业、建筑业、金属加工、铸造以及其他重型工业和轻工业部门。

机器人的工业应用分为4个方面,即材料加工、零件制造、产品检验和装配。其中,材料加工往往是最简单的。零件制造包括锻造、点焊、捣碎和铸造等。检验包括显式检验(在加工过程中或加工后检验产品表面的图像和几何形状、零件和尺寸的完整性)和隐式检验(在加工中检验零件质量上或表面上的完整性)两种。装配是最复杂的应用领域,因为它可能包含材料加工、在线检验、零件供给、配套、挤压和紧固等工序。

在农业方面,机器人已用于水果和蔬菜的嫁接、收获、检验与分类,剪羊毛和挤牛奶等。把自主(无人驾驶)移动机器人应用于农田耕种,包括播种、田间管理和收割等,是一个有潜在发展前景的产业机器人应用领域。

在众多制造业领域中,应用工业机器人最广泛的领域是汽车及汽车零部件制造业。

随着科学与技术的发展,工业机器人的应用领域不断扩大。目前,工业机器人不仅应用于传统制造业如机械制造、采矿、冶金、石油、化学、船舶等领域,同时也已开始扩大到核能、航空、航天、医药、生化等高科技领域。

1.5.2 探索机器人

除了在工农业广泛应用外,机器人还用于探索,即在恶劣或不适于人类工作的环境中执行任务。例如,在水下(海洋)、太空以及在放射性、有毒或高温等环境中进行作业。在这种环境下,可以使用自主机器人、半自主机器人或遥控机器人。

(1) 自主机器人。自主机器人能在恶劣环境中执行编程任务而无需人的干预。

(2) 遥控机器人。遥控机器人是把机器人(称为“从动装置”)放置在某个危险、有害或恶劣环境中,由操作人员在远处控制主动装置,使从动装置跟随主动装置的操作动作,实现遥控。

下面讨论两种主要的探索机器人——水下机器人和空间机器人的概况及其应用。

1. 水下机器人

随着海洋开发事业的发展,一般的潜水技术已无法适应高深度的综合考察和研究且完成多种作业的需要了。因此许多国家都对水下机器人给予了极大的关注。

水下机器人依据不同特征可有不同的分类,按其在水中运动的方式可分为:

(1) 浮游式水下机器人;

(2) 步行式水下机器人;

(3) 移动式水下机器人。

近年来对海洋考察和开发的需要,使水下机器人的应用在世界范围内日益广泛,发展速度之快出乎人们的意料,其应用领域包括水下工程、打捞救生、海洋工程和海洋科学考察等方面。

2011年7月26日,中国研制的深海载人潜水器“蛟龙号”成功潜至海面以下5188米,这标志着中国已经进入载人深潜技术的全球先进国家之列。2012年6月24日,“蛟龙号”成功下潜至7062米,这也意味着我国的深海载人潜水器成为世界上第2个下潜到7000米以下的国家,达到国际先进水平。

2020年10月,我国最新型的深水潜航器“奋斗者号”已成功下沉到海平面以下10058米的深度,标志着中国水下潜航器的发展进入到了新的阶段,跻身国际海洋强国。

2. 空间机器人

近年来随着各种智能机器人的研究与发展,能在宇宙空间作业的空间机器人成为了新的研究目标,并已成为空间开发的重要组成部分。

目前,空间机器人的主要任务可分为两大方面:

(1) 在月球、火星及其他星球等非人居住条件下完成先驱勘探。

(2) 在宇宙空间代替宇航员实现卫星服务(主要是捕捉、修理和补给能量)、空间站上的服务(主要是安装和组装空间站的基本部件,确保各种有效载荷正常运转,EVA支援等)和空间环境的应用实验。

我国研发的月球车“玉兔号”是一种典型的空间机器人。2013年12月2日1时30分,我国成功地将由着陆器和“玉兔号”月球车组成的“嫦娥三号”探测器送入轨道。12月15日4时35分,“嫦娥三号”着陆器与巡视器分离,“玉兔号”巡视器顺利驶抵月球表面。12月15日23时45分“玉兔号”完成围绕“嫦娥三号”的旋转拍照,并传回照片。这标志着我国探月工程取得了阶段性的重大成果。

2021年5月15日,“天问一号”着陆巡视器成功着陆于火星乌托邦平原南部预选着陆区,中国首次火星探测任务取得圆满成功。

2021年6月27日,国家航天局发布了“天问一号”火星探测任务和巡视探测系列实拍影像,包括着陆巡视器开伞和下降过程、火星全局环境感知图像等。

1.5.3 服务机器人

随着网络技术、传感技术、仿生技术、智能控制等技术的发展以及机电工程与生物医学工程等的交叉融合,服务机器人技术发展呈现三大态势:一是服务机器人由简单机电一体化装备向以生机电一体化和智能化等方向发展;二是服务机器人由单一作业向群体协同、远程学习和网络服务等方面发展;三是服务机器人由研制单一复杂系统向将其核心技术、核心模块嵌入先进制造相关系统中发展。虽然服务机器人分类较广,包含清洁机器人、医用服务机器人、护理和康复机器人、家用机器人、消防机器人、监测和勘探机器人等,但完整的服务机器人系统通常都由3个基本部分组成——移动机构、感知系统和控制系统。因此,各类服务机器人的关键技术就包括自主移动技术(包括地图创建、路径规划、自主导航)、感知技术和人机交互技术等。

现实生活中能够看到的最接近于人类的机器人可能要算家用机器人了。家用机器人能够清扫地板而不碰坏家具,已开始进入家庭和办公室,代替人从事清扫、洗刷、守卫、煮饭、照料小孩、接待、接电话、打印文件等工作。酒店售货和餐厅服务机器人、炊事机器人和家政机器人已不再是一种幻想。随着家用机器人质量的提高和造价的大幅降低,其将获得日益广泛的应用。

研制用来为病人看病、护理病人和协助病残人员康复的机器人能够极大地改善病人的状态,以及改善瘫痪者(包括下肢和四肢瘫痪者)和被截肢者的生活条件。

服务机器人还有送信机器人、导游机器人、加油机器人、建筑机器人、农业及林业机器人等。其中,爬壁机器人既可用于清洁,又可用于建造;娱乐机器人包括文娱歌舞机器人和体育机器人。

根据《2014—2018 年中国服务机器人行业发展前景与投资战略规划分析报告》的前瞻数据统计,全球专业服务机器人的销量从 2011 年的 15 776 台增加至 2012 年的 16 067 台,比 2011 年增长 1.8%,销售额约为 230 亿元。2012 年全球个人/家用服务机器人的销量约为 300 万台,比 2011 年增长 20%,销售额约为 450 亿元。随着个人机器人进入各行各业,进入千家万户,服务机器人的总产值可望达到万亿元。由此,服务机器人的快速增长和巨大市场可见一斑。

2019 年全球服务机器人市场规模预计将达到 94.6 亿美元,2021 年将快速增长突破 130 亿美元。2019 年,全球家用服务机器人、医疗服务机器人和公共服务机器人市场规模预计分别为 42 亿美元、25.8 亿美元和 26.8 亿美元,其中家用服务机器人市场规模占比最高达 44%。

1.5.4 军用机器人

同任何其他先进技术一样,机器人技术也可用于军事目的。这种用于军事目的的机器人,即为军用机器人。按工作环境分,其可以分为地面、水下(海洋)和空间军用机器人。其中,以地面军用机器人的开发最为成熟,应用也较为普遍。

1. 地面军用机器人

地面军用机器人分为两类:一类是智能机器人,包括自主和半自主车辆;另一类是遥控机器人,即各种用途的遥控无人驾驶车辆。智能机器人依靠车辆本身的机器智能,在无人干预的情况下自主行驶或作战。遥控机器人由人进行遥控,以完成各种任务。遥控车辆已经在一些国家列装部队,而自主地面战车也开始走向战场。

2. 海洋军用机器人

各国的海军也不甘落后,在开发和应用海洋(水下)军用机器人方面取得了成功。

美国海军有一个独立的水下机器人分队,这支由精锐人员和水下机器人组成的分队,可以在全世界海域进行搜索、定位、援救和回收工作。

水下机器人在海军中的另一个主要用途是扫雷,如 MINS 水下机器人系统,可以发现、分类、排除水下残物和系留的水雷。

法国在军用扫雷机器人方面一直处于世界领先地位。ECA 公司自 20 世纪 70 年代中期以来已向 15 个国家的海军销售了数百艘 PAP-104 排雷用遥控无人潜水器(remote operated vehicle, ROV)。最新的 V 型 ROV 装有新的电子仪器和遥测传送装置,能扫除人工或其他扫雷工具不能扫除的水雷。

3. 空间军用机器人

严格地说,上文讨论过的空间机器人都可被用于军事目的。此外,可以把无人机看作空间机器人。也就是说,无人机和其他空间机器人,都可能成为空间军用机器人。

微型飞机用于填补军用卫星和侦察机无法达到的盲区,为前线指挥员提供小范围内的具体敌情。这种飞机既小又轻,可由士兵的背包携带,可装备固体摄像机、红外传感器或雷达,能够飞行数公里。

要研制出适用的微型无人机具有很高的难度,需解决一系列技术难题。这种飞机不是玩具,它既要满足军事上的要求,又要做到低成本、低价格。目前,这种微型军用无人机已经飞向战场,走上实用之路。

1.6 本书概要

本书介绍了机器人学的基本原理及应用,是一部机器人学的专著和通用教材。除了讨论一般的原理外,还特别阐述了一些新的方法与技术,并用一定篇幅叙述了机器人学的应用和发展趋势。本书包含下列具体内容:

(1) 简述机器人学的起源及国内外机器人学的研究与发展,讨论机器人学的定义,分析机器人的特点、结构与分类,探讨机器人学的研究领域,分析机器人的应用领域,涉及工业机器人、探索机器人、服务机器人和军用机器人。这些内容可使读者对机器人学有初步认识。

(2) 讨论机器人学的数学基础,包括空间任意点的位置和姿态变换、坐标变换、齐次坐标变换、物体的变换和逆变换,以及通用旋转变换等。这些数学基础知识为后面有关各章研究机器人运动学、动力学和控制建模提供了有力的数学工具。

(3) 阐述机器人运动方程的表示与求解。这些表示包括机械手的运动姿态、方向角、运动位置和坐标的运动方程,以及连杆变换矩阵。对于运动方程的求解则讨论了欧拉变换解、滚-仰-偏变换解和球面变换解等方法。此外,还讨论了机器人的微分运动及其雅可比矩阵。这些内容是研究机器人动力学和控制必不可少的基础。

(4) 涉及机器人动力学方程、动态特性和静态特性,着重分析机械手动力学方程的两种求法,即拉格朗日功能平衡法和牛顿-欧拉动态平衡法,然后在分析二连杆机械手的基础上,总结出建立拉格朗日方程的步骤,并计算机械手连杆上一点的速度、动能和位能,进而推导出四连杆机械手的动力学方程。在此基础上,举例推导了二连杆机械手的动力学方程及三连杆机械手的速度和加速度方程。机器人动力学问题的研究,对于快速运动的机器人及其控制具有特别重要的意义。

(5) 研究了机器人的控制原则和控制方法。这些方法包括机器人的位置伺服控制、柔顺控制、分解运动控制、变结构控制、自适应控制和智能控制等。作为机器人智能控制的应用实例,介绍了智能机器人递阶装配系统、机器人自适应模糊控制、多指灵巧手的神经控制、

移动机器人自主导航的进化控制以及基于深度学习的机器人控制等。这些例子提供了实际研究结果,说明了各种相关智能控制方法的有效性和适用性。

(6) 阐述机器人传感器的特点与分类。涉及机器人的感觉顺序与策略、机器人传感器的分类以及应用传感器时应考虑的问题。分别讨论了机器人的内传感器和外传感器。在内传感器部分,研究了位移/位置传感器、速度和加速度传感器和力觉传感器等。在外传感器部分,研究了触觉传感器、应力觉传感器、接近度传感器和其他外传感器。举例介绍了一些有代表性的机器人视觉装置,包括机器人眼、视频信号数字变换器和固态视觉装置等。着重讨论了各种传感器的工作原理,并说明了其应该注意的问题。

(7) 讨论机器人规划问题。在说明机器人规划的作用和任务之后,从积木世界的机器人规划入手,逐步深入地开展对机器人规划的讨论。这些规划方法有规则演绎法、逻辑演算和通用搜索法,以及具有学习能力的规划和基于专家系统的规划等。机器人规划是人工智能与机器人学的一个令人感兴趣的结合点,也是智能机器人的一个重要研究领域。

(8) 比较概括地论述机器人的程序设计。机器人的程序设计——编程,是机器人运动和控制的结合点,也是实现人与机器人通信的主要方法。研究了对机器人编程的要求和分类;讨论了机器人语言系统的结构和基本功能;介绍了几种重要的专用机器人编程语言,如机器人操作系统 ROS,机器人研发语言 Python、MATLAB,工业机器人常用语言 VAL、SIGLA、IML 和 AL 语言等;讨论了机器人离线编程的特点、主要内容和系统结构,并列举了一个机器人离线编程仿真系统 HOLPSS。

(9) 分析机器人学的现状,展望机器人学的未来,包括国际机器人技术和市场的发展现状及预测、国内机器人的发展现状、21 世纪机器人技术的发展趋势、我国新时代机器人学的发展战略等。探讨了应用机器人将引起的一些社会问题,并提出克隆技术对智能机器人的挑战问题。这部分内容连贯过去、现在与未来,具有一定的探索性和前瞻性,值得讨论。

(10) 各章均附有习题,可供教师选用作为学生的课内作业或课外练习思考题,以检验学生对各章内容的掌握程度,并加深对所学概念、技术和方法的理解。书末附有大量的国内外参考文献和英汉术语对照表,有助于学生阅读机器人学的英文文献。

本书可作为本科生和研究生的教材。当用作本科生教材时,建议删去部分章节,如机器人的动态和静态特性、机器人的高级控制和智能控制以及机器人高层规划等。当用作研究生教材时,教师可以补充一些反映最新研究进展的学术论文和专题研究资料,以培养研究生的独立工作能力和创新能力,并对专题内容有更深入的了解。

本书也可供从事机器人学研究、开发和应用的科技人员学习参考。

1.7 本章小结

作为本书的开篇,本章首先讨论了机器人的由来、定义和国内外机器人技术的发展;介绍了国际上关于机器人的几种主要定义,并归纳出这些定义的共同点。

机器人具有通用性和适应性的特点,这是它获得广泛应用的重要基础。可以把一个机器人系统看作由执行机构、环境、任务 and 控制器 4 个部分组成。

机器人的分类方法很多,分别按照机械手的几何结构、机器人的控制方式、机器人的信

息输入方式、机器人的智能程度、机器人的用途以及机器人的移动性来讨论机器人的分类问题。

机器人学有着十分广阔的研究领域,涉及机器人视觉、机器人语音识别、传感器与感知系统、驱动与控制、自动规划、计算机系统以及应用研究等。本章一一列出了这些研究和应用领域。

机器人已在工业生产、海空探索、服务和军事等领域获得广泛应用。1.5节逐一介绍了工业机器人、探索机器人、服务机器人和军用机器人的应用情况。

工业机器人正在汽车工业、机电工业和其他工业部门工作,为人类的物质生产建功立业。其中,以焊接机器人和装配机器人为两个最主要的应用领域。

探索机器人除了在恶劣工况下执行任务的特种机器人外,主要为太空探索机器人和海洋(水下)探索机器人。随着空间科学和海洋工程的发展,需要越来越多的各式各样的空间机器人和海洋机器人参与探索太空和开发海洋的工作。

服务机器人的发展前景也被十分看好。服务机器人近年来发展很快,其数量已大大超过工业机器人,并呈逐年上升之势。

军用机器人是把机器人技术用于战争的产物,是国力、经济实力、技术实力和军事实力竞争的聚焦点之一。军用机器人以地面军用机器人为多,技术已比较成熟;海洋军用机器人和空间军用机器人很难与民用海洋机器人和空间机器人分开;它们的技术既可用于承担和平建设使命,也可用于军事活动。

习 题 1

- 1.1 国内外机器人技术的发展有何特点?
- 1.2 请为工业机器人和智能机器人下个定义。
- 1.3 什么是机器人的自由度?试举出1~2种你知道的机器人的自由度数,并说明为什么需要这个数目。
- 1.4 机器人的分类方法有哪几种?是否还有其他的分类方法?
- 1.5 试编写一个工业机器人大事年表(从1954年起,必要时可查阅有关文献)。
- 1.6 机器人学与哪些学科有密切关系?机器人学的发展将对这些学科产生什么影响?
- 1.7 试编写一个图表,说明现有工业机器人的主要应用领域(如点焊、装配等)及其所占百分比。
- 1.8 用1~2句话定义下列术语:适应性、伺服控制、偿还期、智能机器人、人工智能。
- 1.9 “机器人三守则”是什么?它的重要意义是什么?
- 1.10 人工智能与机器人学的关系如何?有哪些人工智能技术已在机器人学上得到应用?哪些人工智能技术将在机器人学上获得应用?
- 1.11 服务机器人已经得到日益广泛的应用。你对服务机器人的发展与应用有何建议?
- 1.12 随着“智能制造”的逐步升级,工业机器人特别是智能机器人的应用将受到高度重视。你认为在制造业大量应用机器人应考虑和注意哪些问题?
- 1.13 工业机器人能够应用在什么领域?各举一例说明它的必要性与合理性。

- 1.14 你认为我国机器人的应用范围和发展前景如何?
- 1.15 试举出 1~2 个例子,说明应用工业机器人带来的好处。
- 1.16 服务机器人有哪些用武之地? 试列举实例加以说明。
- 1.17 探索机器人有哪几种? 它们有何用途?
- 1.18 你对机器人用于军事目的有何看法? 试述各种军用机器人的现状。
- 1.19 你认为有哪些人工智能技术在机器人上得到了广泛应用?
- 1.20 建议举行一个课程讨论会,介绍和分析国内外机器人学的研究与发展情况。

第2章 数学基础

第1章讨论机器人系统的构成时曾经指出,机械手是机器人系统的机械运动部分。作为自动化工具的机械手具有如下特点:机械手的执行机构是用来保证复杂空间运动的综合刚体,而且其自身也往往需要在机械加工或装配等过程中作为统一体进行运动。因此,需要一种可以描述单一刚体位移、速度和加速度以及动力学问题的有效而又方便的数学方法。这种数学描述方法不是唯一的,不同的人可能采用不同的方法。本章将采用矩阵法来描述机器人机械手的运动学和动力学问题。这种数学描述是以四阶方阵变换三维空间点的齐次坐标为基础的,能够将运动、变换和映射与矩阵运算联系起来。

研究操作机器人的运动不仅涉及机械手本身,而且涉及各物体间以及物体与机械手的关系。本章将要讨论的齐次坐标及其变换,就是用来表达这些关系的。齐次坐标变换不仅能够表示动力学问题,而且能够表达机器人控制算法、计算机视觉和计算机图形学等问题。因此,该方法受到了特别重视。

2.1 位姿和坐标系描述

在描述物体(如零件、工具或机械手)间的关系时,要用到位置矢量、平面和坐标系等概念。首先,建立这些概念及其表示法。

1. 位置描述

一旦建立了一个坐标系,就能够用某个 3×1 位置矢量来确定该空间内任一点的位置。对于直角坐标系 $\{A\}$,空间任一点 p 的位置可用 3×1 的列矢量 ${}^A p$

$${}^A p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

表示。式中, p_x, p_y, p_z 是点 p 在坐标系 $\{A\}$ 中 x, y, z 三个轴方向的坐标分量。 ${}^A p$ 的上标 A 代表参考坐标系 $\{A\}$ 。称 ${}^A p$ 为位置矢量,如图 2.1 所示。

2. 方位描述

为了研究机器人的运动与操作,往往不仅要表示空间某个点的位置,而且需要表示物体的方位(orientation)。物体的方位可由某个固接于此物体的坐标系描述。为了规定空间某刚体 B 的方位,设置一直角坐标系 $\{B\}$ 与此刚体固接。用坐标系 $\{B\}$ 的三个单位主矢量 x_B, y_B, z_B 相对于参考坐标系 $\{A\}$ 的方向余弦组成的 3×3 矩阵

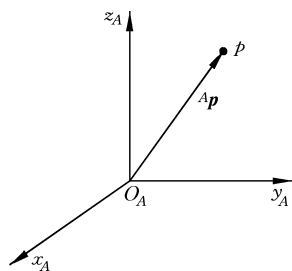


图 2.1 位置表示

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{x}_B & {}^A\mathbf{y}_B & {}^A\mathbf{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

表示刚体 B 相对于坐标系 $\{A\}$ 的方位。 ${}^A_B\mathbf{R}$ 被称为“旋转矩阵”。其中,上标 A 代表参考坐标系 $\{A\}$,下标 B 代表被描述的坐标系 $\{B\}$ 。 ${}^A_B\mathbf{R}$ 共有 9 个元素,但只有 3 个是独立的。由于 ${}^A_B\mathbf{R}$ 的 3 个列矢量 ${}^A\mathbf{x}_B$, ${}^A\mathbf{y}_B$ 和 ${}^A\mathbf{z}_B$ 都是单位矢量,且双双相互垂直,所以它的 9 个元素满足如下 6 个约束条件(正交条件):

$${}^A\mathbf{x}_B \cdot {}^A\mathbf{x}_B = {}^A\mathbf{y}_B \cdot {}^A\mathbf{y}_B = {}^A\mathbf{z}_B \cdot {}^A\mathbf{z}_B = 1 \quad (2.3)$$

$${}^A\mathbf{x}_B \cdot {}^A\mathbf{y}_B = {}^A\mathbf{y}_B \cdot {}^A\mathbf{z}_B = {}^A\mathbf{z}_B \cdot {}^A\mathbf{x}_B = 0 \quad (2.4)$$

可见,旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}$ 是正交的,并且满足条件

$${}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R}^T; \quad |{}^A_B\mathbf{R}| = 1 \quad (2.5)$$

式中,上标 T 表示转置; $| \quad |$ 为行列式符号。

对应于轴 x, y 或 z 作转角为 θ 的旋转变换,其旋转矩阵分别为

$$\mathbf{R}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

式中, s 表示 $\sin$, c 表示 $\cos$, 本书一律采用此约定。

图 2.2 表示某物体(这里为抓手)的方位。此物体与坐标系 $\{B\}$ 固接,并相对于参考坐标系 $\{A\}$ 运动。

3. 位姿描述

上文已经讨论了如何采用位置矢量描述点的位置,如何用旋转矩阵描述物体的方位。要完全描述刚体 B 在空间的位姿(位置和姿态),通常将物体 B 与某一坐标系 $\{B\}$ 相固接。 $\{B\}$ 的坐标原点一般选在物体 B 的特征点上,如质心等。相对参考系 $\{A\}$,坐标系 $\{B\}$ 的原点位置和坐标轴的方位,分别由位置矢量 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ 和旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}$ 描述。这样,刚体 B 的位姿可由坐标系 $\{B\}$ 来描述,即有

$$\{B\} = \{ {}^A_B\mathbf{R} \quad {}^A\mathbf{p}_{Bo} \} \quad (2.9)$$

当表示位置时,式(2.9)中的旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R} = \mathbf{I}$ (单位矩阵);当表示方位时,式(2.9)中的位置矢量 ${}^A\mathbf{p}_{Bo} = \mathbf{0}$ 。

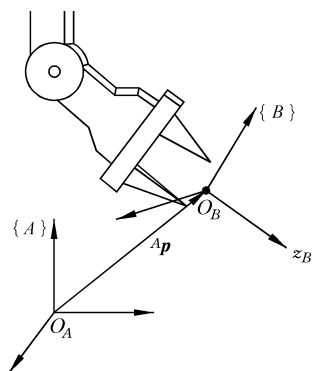


图 2.2 某物体的方位表示

2.2 平移和旋转坐标系映射

空间中任意点 p 在不同坐标系中的描述是不同的。为了阐明从一个坐标系描述到另一个坐标系描述的关系,需要讨论这种变换的数学问题。

1. 平移坐标变换

设坐标系 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 具有相同的方位,但 $\{B\}$ 坐标系的原点与 $\{A\}$ 的原点不重合。用位置矢量 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ 描述它相对于 $\{A\}$ 的位置,如图 2.3 所示。称 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ 为 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的“平移矢量”。如果点 p 在坐标系 $\{B\}$ 中的位置为 ${}^B\mathbf{p}$,那么它相对于坐标系 $\{A\}$ 的位置矢量 ${}^A\mathbf{p}$ 可由矢量相加得出,即

$${}^A\mathbf{p} = {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo} \quad (2.10)$$

式(2.10)即被称为“坐标平移方程”。

2. 旋转坐标变换

设坐标系 $\{B\}$ 与 $\{A\}$ 有共同的坐标原点,但两者的方位不同,如图 2.4 所示。用旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}$ 描述 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的方位。同一点 p 在两个坐标系 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 中的描述 ${}^A\mathbf{p}$ 和 ${}^B\mathbf{p}$ 具有如下变换关系:

$${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{p} \quad (2.11)$$

式(2.11)即被称为“坐标旋转方程”。

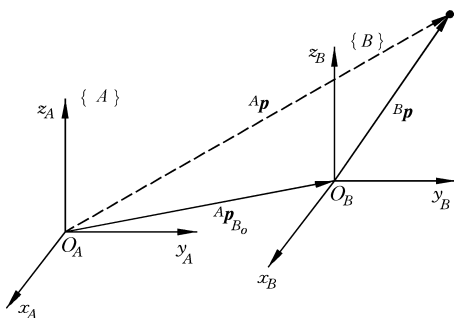


图 2.3 平移变换

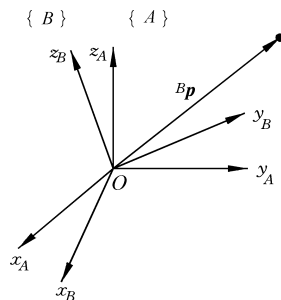


图 2.4 旋转变换

类似地,可以用 ${}^B_A\mathbf{R}$ 描述坐标系 $\{A\}$ 相对于 $\{B\}$ 的方位。 ${}^A_B\mathbf{R}$ 和 ${}^B_A\mathbf{R}$ 都是正交矩阵,两者互逆。根据正交矩阵的性质式(2.5)可得

$${}^B_A\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R}^T \quad (2.12)$$

对于最一般的情形:坐标系 $\{B\}$ 的原点与 $\{A\}$ 的原点并不重合, $\{B\}$ 的方位与 $\{A\}$ 的方位也不相同。用位置矢量 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ 描述 $\{B\}$ 的坐标原点相对于 $\{A\}$ 的位置;用旋转矩阵 ${}^A_B\mathbf{R}$ 描述 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的方位,如图 2.5 所示。对于任一点 p 在两坐标系 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 中的描述 ${}^A\mathbf{p}$ 和 ${}^B\mathbf{p}$ 具有以下变换关系:

$${}^A\mathbf{p} = {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo} \quad (2.13)$$

可把式(2.13)看作坐标旋转和坐标平移的复合变换。实际上,规定一个过渡坐标系

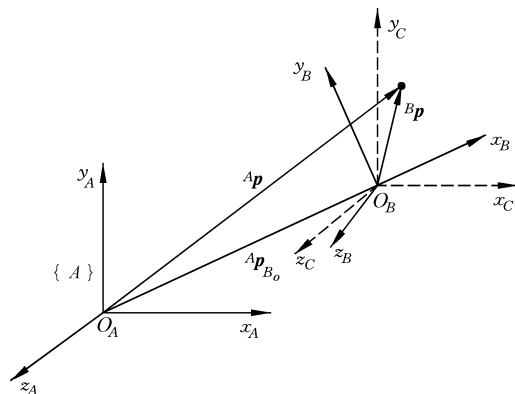


图 2.5 复合变换

$\{C\}$, 使 $\{C\}$ 的坐标原点与 $\{B\}$ 的原点重合, 而 $\{C\}$ 的方位与 $\{A\}$ 的相同。据式(2.11)可得向过渡坐标系的变换:

$${}^C p = {}^C_B R {}^B p = {}^A_B R {}^B p$$

再由式(2.10), 可得复合变换:

$${}^A p = {}^C p + {}^A p_{C_0} = {}^A_B R {}^B p + {}^A p_{B_0}$$

例 2.1 已知坐标系 $\{B\}$ 的初始位姿与 $\{A\}$ 重合, 首先 $\{B\}$ 相对于坐标系 $\{A\}$ 的 z_A 轴转 30° , 再沿 $\{A\}$ 的 x_A 轴移动 12 个单位, 并沿 $\{A\}$ 的 y_A 轴移动 6 个单位。求位置矢量 ${}^A p_{B_0}$ 和旋转矩阵 ${}^A_B R$ 。假设点 p 在坐标系 $\{B\}$ 的描述为 ${}^B p = [3, 7, 0]^T$, 求其在坐标系 $\{A\}$ 中的描述 ${}^A p$ 。

据式(2.8)和式(2.1), 可得 ${}^A_B R$ 和 ${}^A p_{B_0}$ 分别为

$${}^A_B R = R(z, 30^\circ) = \begin{bmatrix} c 30^\circ & -s 30^\circ & 0 \\ s 30^\circ & c 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^A p_{B_0} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由式(2.14), 得

$${}^A p = {}^A_B R {}^B p + {}^A p_{B_0} = \begin{bmatrix} -0.902 \\ 7.562 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 平移和旋转齐次坐标变换

已知某个直角坐标系中的某点坐标, 那么该点在另一直角坐标系中的坐标可通过齐次坐标变换求得。

1. 齐次变换

变换式(2.13)对于点 ${}^B p$ 是非齐次的, 但是可以将其表示成等价的齐次变换形式:

$$\begin{bmatrix} {}^A p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A p_{B_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

式中, 4×1 的列向量表示三维空间的点, 称为点的“齐次坐标”, 仍然记为 ${}^A\mathbf{p}$ 或 ${}^B\mathbf{p}$ 。可把式(2.14)写成矩阵形式:

$${}^A\mathbf{p} = {}^A\mathbf{T}_B {}^B\mathbf{p} \quad (2.15)$$

式中, 齐次坐标 ${}^A\mathbf{p}$ 和 ${}^B\mathbf{p}$ 是 4×1 的列向量, 与式(2.13)中的维数不同, 加入了第 4 个元素 $\mathbf{1}$ 。齐次变换矩阵 ${}^A\mathbf{T}_B$ 是 4×4 的方阵, 具有如下形式:

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

${}^A\mathbf{T}_B$ 综合地表示了平移变换和旋转变换。变换式(2.14)和式(2.13)是等价的, 式(2.14)实质上可写为

$${}^A\mathbf{p} = {}^A\mathbf{R}_B {}^B\mathbf{p} + {}^A\mathbf{p}_{Bo}; \quad \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

位置矢量 ${}^A\mathbf{p}$ 和 ${}^B\mathbf{p}$ 到底是 3×1 的直角坐标还是 4×1 的齐次坐标, 要根据上、下文中的关系而定。

例 2.2 试用齐次变换方法求解例 2.1 中的 ${}^A\mathbf{p}$ 。

由例 2.1 求得的旋转矩阵 ${}^A\mathbf{R}_B$ 和位置矢量 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$, 可以得到齐次变换矩阵

$${}^A\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{R}_B & {}^A\mathbf{p}_{Bo} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 12 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

代入齐次变换式(2.15)得

$${}^A\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 & 12 \\ 0.5 & 0.866 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.098 \\ 13.562 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即用齐次坐标描述的点 p 的位置。

至此, 可得空间某点 p 的直角坐标描述和齐次坐标描述分别为

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \\ w \end{bmatrix}$$

式中, w 为非零常数, 是坐标比例系数。

坐标原点的矢量, 即零矢量表示为 $[0, 0, 0, 1]^T$, 是没有定义的。具有形如 $[a, b, c, 0]^T$ 的矢量表示无限远矢量, 用来表示方向, 即用 $[1, 0, 0, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, $[0, 0, 1, 0]$ 分别表示 x , y 和 z 轴的方向。

规定两矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的点积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.17)$$

为一标量, 而两矢量的叉积(向量积)为与此两相乘矢量所决定的平面垂直的矢量:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (2.18)$$

或者用下列行列式来表示：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

2. 平移齐次坐标变换

空间某点由矢量 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 描述。其中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为轴 x, y, z 上的单位矢量。此点可用平移齐次变换表示为

$$\text{Trans}(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

式中, Trans 表示平移变换。

对已知矢量 $\mathbf{u} = [x, y, z, w]^T$ 进行平移变换所得的矢量 $\mathbf{v}$ 为

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + aw \\ y + bw \\ z + cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/w + a \\ y/w + b \\ z/w + c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

即可把此变换看作矢量 $(x/w)\mathbf{i} + (y/w)\mathbf{j} + (z/w)\mathbf{k}$ 与矢量 $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ 之和。

用非零常数乘以变换矩阵的每个元素, 不改变该变换矩阵的特性。

例 2.3 考虑矢量 $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 被矢量 $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ 平移变换得到的新的点矢量：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

如果用 -5 乘以此变换矩阵, 用 2 乘以被平移变换的矢量, 则得到：

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & -5 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -5 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ -90 \\ -10 \end{bmatrix}$$

它与矢量 $[6, 0, 9, 1]^T$ 相对应, 与乘以常数前的点矢量一样。

3. 旋转齐次坐标变换

对应于轴 x, y 或 z 作转角为 θ 的旋转变换, 分别可得

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\text{Rot}(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

式中, Rot 表示旋转变换。下面举例说明这种旋转变换。

例 2.4 已知点 $u = 7i + 3j + 2k$, 对它进行绕轴 z 旋转 90° 的变换后可得

$$v = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

图 2.6(a) 表示旋转变换前后点矢量处在坐标系中的位置。从图可见, 点 u 绕 z 轴旋转 90° 至点 v 。如果点 v 绕 y 轴旋转 90° , 即得点 w , 这一变换也可从图 2.6(a) 看出, 并可由式 (2.23) 求出:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

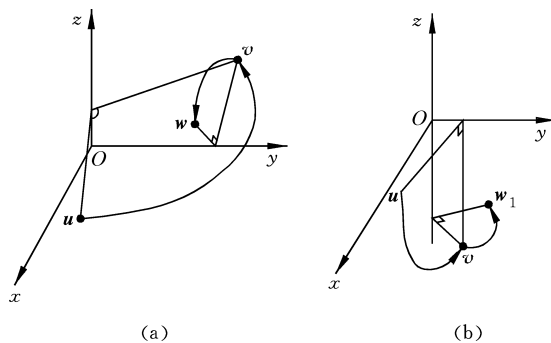


图 2.6 旋转次序对变换结果的影响

(a) $\text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ)$; (b) $\text{Rot}(z, 90^\circ) \text{Rot}(y, 90^\circ)$

如果把上述两旋转变换 $v = \text{Rot}(z, 90^\circ)u$ 与 $w = \text{Rot}(y, 90^\circ)v$ 组合在一起, 那么可以得到

$$w = \text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ)u \quad (2.25)$$

因为

$$\text{Rot}(y, 90^\circ) \text{Rot}(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

所以可得

$$w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所得结果与前述一致。

如果改变旋转次序,首先使 u 绕 y 轴旋转 90° ,那么就会使 u 变换至与 w 不同的位置 w_1 ,见图 2.6(b)。从计算也可得出 $w_1 \neq w$ 的结果。这个结果是必然的,因为矩阵的乘法不具有交换性质,即 $AB \neq BA$ 。变换矩阵的左乘和右乘的运动解释是不同的:变换顺序“从右向左”,说明运动是相对固定坐标系而言的;变换顺序“从左向右”,说明运动是相对运动坐标系而言的。

例 2.5 考虑把旋转变换与平移变换结合起来的情况。如果在图 2.6(a)旋转变换的基础上,再进行平移变换 $4i - 3j + 7k$,那么据式(2.20)和式(2.26)可求得

$$\text{Trans}(4, -3, 7)\text{Rot}(y, 90^\circ)\text{Rot}(z, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$t = \text{Trans}(4, -3, 7)\text{Rot}(y, 90^\circ)\text{Rot}(z, 90^\circ)u = [6, 4, 10, 1]^T$$

这一变换结果如图 2.7 所示。

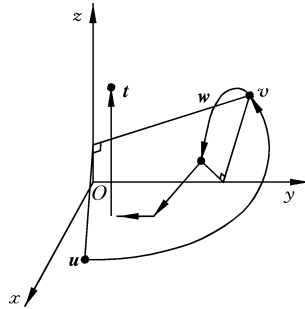


图 2.7 平移变换与旋转变换的组合

2.4 物体的变换和变换方程

1. 物体位置描述

可以用描述空间一点的变换方法来描述物体在空间的位置和方向。例如,图 2.8(a)所示的楔形物体可由固定该物体的坐标系内的 6 个点来表示。

如果首先让物体绕 z 轴旋转 90° ,接着绕 y 轴旋转 90° ,再沿 x 轴方向平移 4 个单位,那么,可用下式描述这一变换:

$$T = \text{Trans}(4, 0, 0) \text{Rot}(y, 90) \text{Rot}(z, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这个变换矩阵表示对原参考坐标系重合的坐标系进行旋转和平移操作。

可对上述楔形物体的 6 个点变换如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

变换结果见图 2.8(b)。由此图可见,这个用数字描述的物体与描述其位置和方向的坐标系具有确定的关系。

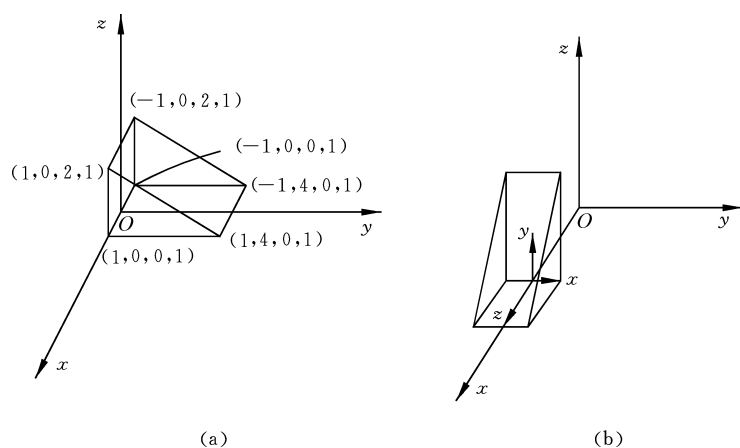


图 2.8 对楔形物体的变换

2. 齐次变换的逆变换

给定坐标系 $\{A\}$, $\{B\}$ 和 $\{C\}$, 若已知 $\{B\}$ 相对 $\{A\}$ 的描述为 ${}^A_B T$, $\{C\}$ 相对 $\{B\}$ 的描述为 ${}^B_C T$, 则

$${}^B_C p = {}^B_C T {}^C p \quad (2.27)$$

$${}^A_C p = {}^A_B T {}^B_C p = {}^A_B T {}^B_C T {}^C p \quad (2.28)$$

定义复合变换

$${}^A_C T = {}^A_B T {}^B_C T \quad (2.29)$$

表示 $\{C\}$ 相对于 $\{A\}$ 的描述。据式(2.6)可得

$${}^A_C T = {}^A_B T {}^B_C T = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A_B p_{Bo} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B_C R & {}^B_C p_{Co} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R {}^B_C R & {}^A_B R {}^B_C p_{Co} + {}^A_B p_{Bo} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

从坐标系 $\{B\}$ 相对坐标系 $\{A\}$ 的描述 ${}^A_B T$, 求得 $\{A\}$ 相对于 $\{B\}$ 的描述 ${}^B_A T$, 是齐次变换求逆问题。一种求解方法是直接对 4×4 的齐次变换矩阵 ${}^A_B T$ 求逆; 另一种是利用齐次变换矩阵的特点, 简化矩阵求逆运算。下面首先讨论变换矩阵求逆方法。

对于给定的 ${}^A_B\mathbf{T}$,求 ${}^B_A\mathbf{T}$,等价于给定 ${}^A_B\mathbf{R}$ 和 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$,计算 ${}^B_A\mathbf{R}$ 和 ${}^B\mathbf{p}_{Ao}$ 。利用旋转矩阵的正交性,可得

$${}^B_A\mathbf{R} = {}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R}^T \quad (2.31)$$

再据式(2.13),求原点 ${}^A\mathbf{p}_{Bo}$ 在坐标系 $\{B\}$ 中的描述

$${}^B({}^A\mathbf{p}_{Bo}) = {}^B_A\mathbf{R} {}^A\mathbf{p}_{Bo} + {}^B\mathbf{p}_{Ao} \quad (2.32)$$

${}^B({}^A\mathbf{p}_{Bo})$ 表示 $\{B\}$ 的原点相对于 $\{B\}$ 的描述,为矢量 $\mathbf{O}$,因而式(2.32)为0,可得

$${}^B\mathbf{p}_{Ao} = -{}^B_A\mathbf{R} {}^A\mathbf{p}_{Bo} = -{}^A_B\mathbf{R}^{TA} \mathbf{p}_{Bo} \quad (2.33)$$

综上分析,并据式(2.31)和式(2.33)推算可得:

$${}^B_A\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R}^T & -{}^A_B\mathbf{R}^{TA} \mathbf{p}_{Bo} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

式中, ${}^B_A\mathbf{T} = {}^A_B\mathbf{T}^{-1}$ 。式(2.34)提供了一种求解齐次变换逆矩阵的简便方法。

下面讨论直接对 4×4 齐次变换矩阵的求逆方法。

实际上,逆变换是由被变换了的坐标系变回为原坐标系的一种变换,也就是参考坐标系对于被变换了的坐标系的描述。图2.8(b)所示物体的参考坐标系相对于被变换了的坐标系来说,坐标轴 x, y 和 z 分别为 $[0, 0, 1, 0]^T$, $[1, 0, 0, 0]^T$ 和 $[0, 1, 0, 0]^T$,而其原点为 $[0, 0, -4, 1]^T$ 。于是,可得逆变换为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

用变换 $\mathbf{T}$ 乘此逆变换而得到单位变换,就能够证明此逆变换的确是变换 $\mathbf{T}$ 的逆:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般情况下,已知变换 $\mathbf{T}$ 的各元

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

则其逆变换为

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

式中, $\cdot$ 表示矢量的点乘, $\mathbf{p}, \mathbf{n}, \mathbf{o}$ 和 $\mathbf{a}$ 是4个列矢量,分别称为“原点矢量”、“法线矢量”、“方向矢量”和“接近矢量”。在第3章中将结合机器人的夹手进一步说明这些矢量。由式(2.36)右乘式(2.35)即易证明这一结果的正确性。

3. 变换方程初步

为了描述机器人的操作,必须建立起机器人各连杆之间,以及机器人与周围环境之间的运动关系,即要构建各种坐标系之间的坐标变换关系,从而描述机器人与环境之间的相对位姿关系。如图 2.9(a)所示为一个夹持螺丝机器人的工作场景。其中, $\{B\}$ 代表基坐标系, $\{T\}$ 代表工具系, $\{S\}$ 代表工作站系, $\{G\}$ 代表目标系,可用相应的齐次变换来描述它们之间的位姿关系:

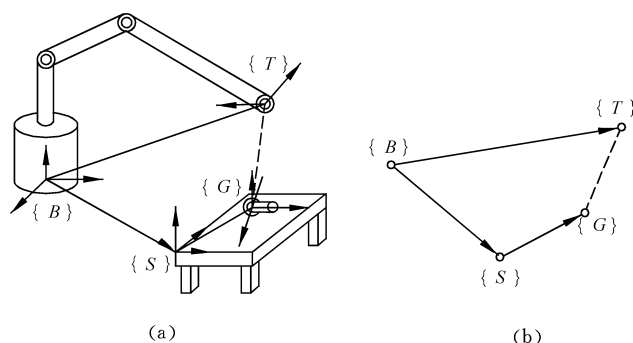


图 2.9 变换方程及其有向变换图

${}^B_S\mathbf{T}$ 表示工作站系 $\{S\}$ 相对于基坐标系 $\{B\}$ 的位姿; ${}^S_G\mathbf{T}$ 表示目标系 $\{G\}$ 相对于 $\{S\}$ 的位姿; ${}^B_T\mathbf{T}$ 表示工具系 $\{T\}$ 相对于基坐标系 $\{B\}$ 的位姿。

对物体进行操作时,工具系 $\{T\}$ 相对目标系 $\{G\}$ 的位姿 ${}^G_T\mathbf{T}$ 直接影响操作效果。它是机器人控制和规划的目标,与其他变换之间的关系可用一有向变换图表示,如图 2.9(b)所示。其中,实线链条代表已知的或可以通过简单测量得到的变换,而虚线链条则代表未知的变换。工具系 $\{T\}$ 相对于基坐标系 $\{B\}$ 的描述可用下列变换矩阵的乘积来表示:

$${}^B_T\mathbf{T} = {}^B_S\mathbf{T} {}^S_G\mathbf{T} {}^G_T\mathbf{T} \quad (2.37)$$

建立起这样的矩阵变换方程后,当上述矩阵变换中只有一个变换未知时,就可以将这一未知的变换表示为其他已知变换的乘积的形式。对于图 2.9 所示的场景,如要求目标系 $\{G\}$ 相对于工具系 $\{T\}$ 的位姿 ${}^T_G\mathbf{T}$,则可在式(2.37)两边同时左乘 ${}^B_T\mathbf{T}$ 的逆变换 ${}^B_T\mathbf{T}^{-1}$,以及同时右乘 ${}^T_G\mathbf{T}$,得到:

$${}^T_G\mathbf{T} = {}^B_T\mathbf{T}^{-1} {}^B_S\mathbf{T} {}^S_G\mathbf{T} \quad (2.38)$$

这样就通过 3 个已知的变换求出了原本未知的变换 ${}^T_G\mathbf{T}$ 。

2.5 通用旋转变换

上文已研究了绕轴 x, y 和 z 旋转的旋转变换矩阵。现在来研究最一般的情况,即研究某个绕着从原点出发的任一矢量(轴) f 旋转 θ 角时的旋转矩阵。

1. 通用旋转变换公式

设 f 为坐标系 $\{C\}$ 的 z 轴上的单位矢量,即

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{f} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (2.40)$$

于是,绕矢量 $\mathbf{f}$ 旋转等价于绕坐标系 $\{C\}$ 的 z 轴旋转,即有

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) = \text{Rot}(c_z, \theta) \quad (2.41)$$

如果已知以参考坐标描述的坐标系 $\{T\}$, 就能够求得以坐标系 $\{C\}$ 描述的另一坐标系 $\{S\}$, 因为

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{S} \quad (2.42)$$

式中, $\mathbf{S}$ 表示 $\mathbf{T}$ 相对于坐标系 $\{C\}$ 的位置。对 $\mathbf{S}$ 求解得

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T} \quad (2.43)$$

$\mathbf{T}$ 绕 $\mathbf{f}$ 旋转等价于 $\mathbf{S}$ 绕坐标系 $\{C\}$ 的 z 轴旋转:

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) \mathbf{T} &= \mathbf{C} \text{Rot}(z, \theta) \mathbf{S} \\ \text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) \mathbf{T} &= \mathbf{C} \text{Rot}(z, \theta) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T} \end{aligned}$$

于是可得

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) = \mathbf{C} \text{Rot}(z, \theta) \mathbf{C}^{-1} \quad (2.44)$$

因为 $\mathbf{f}$ 为坐标系 $\{C\}$ 的 z 轴, 所以对式 (2.44) 加以扩展可以发现 $\text{Rot}(z, \theta) \mathbf{C}^{-1}$ 仅仅是 $\mathbf{f}$ 的函数, 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \text{Rot}(z, \theta) \mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x c\theta - o_x s\theta & n_y c\theta - o_y s\theta & n_z c\theta - o_z s\theta & 0 \\ n_x s\theta + o_x c\theta & n_y s\theta + o_y c\theta & n_z s\theta + o_z c\theta & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x n_x c\theta - n_x o_x s\theta + n_x o_x s\theta + o_x o_x c\theta + a_x a_x & n_x n_y c\theta - n_y o_x s\theta + n_x o_y s\theta + o_y o_x c\theta + a_y a_x & n_x n_z c\theta - n_z o_x s\theta + n_x o_z s\theta + o_z o_x c\theta + a_z a_x & 0 \\ n_y n_x c\theta - n_y o_x s\theta + n_x o_y s\theta + o_y o_x c\theta + a_y a_x & n_y n_y c\theta - n_y o_y s\theta + n_y o_y s\theta + o_y o_y c\theta + a_y a_y & n_y n_z c\theta - n_z o_y s\theta + n_y o_z s\theta + o_z o_y c\theta + a_z a_y & 0 \\ n_z n_x c\theta - n_z o_x s\theta + n_x o_z s\theta + o_z o_x c\theta + a_z a_x & n_z n_y c\theta - n_z o_y s\theta + n_y o_z s\theta + o_z o_y c\theta + a_z a_y & n_z n_z c\theta - n_z o_z s\theta + n_z o_z s\theta + o_z o_z c\theta + a_z a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x n_x c\theta - n_x o_x s\theta + n_x o_x s\theta + o_x o_x c\theta + a_x a_x & n_x n_y c\theta - n_y o_x s\theta + n_x o_y s\theta + o_y o_x c\theta + a_y a_x & n_x n_z c\theta - n_z o_x s\theta + n_x o_z s\theta + o_z o_x c\theta + a_z a_x & 0 \\ n_y n_x c\theta - n_y o_x s\theta + n_x o_y s\theta + o_y o_x c\theta + a_y a_x & n_y n_y c\theta - n_y o_y s\theta + n_y o_y s\theta + o_y o_y c\theta + a_y a_y & n_y n_z c\theta - n_z o_y s\theta + n_y o_z s\theta + o_z o_y c\theta + a_z a_y & 0 \\ n_z n_x c\theta - n_z o_x s\theta + n_x o_z s\theta + o_z o_x c\theta + a_z a_x & n_z n_y c\theta - n_z o_y s\theta + n_y o_z s\theta + o_z o_y c\theta + a_z a_y & n_z n_z c\theta - n_z o_z s\theta + n_z o_z s\theta + o_z o_z c\theta + a_z a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

根据正交矢量点积、矢量自乘、单位矢量和相似矩阵特征值等性质,并令 $z=a$, $\text{vers}\theta = 1 - c\theta$, $f=z$, 对式(2.45)进行化简(请读者自行推算)可得

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta - f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

这是一个重要的结果。

从上述通用旋转变换公式能够求得各个基本旋转变换。例如,当 $f_x=1$, $f_y=0$ 和 $f_z=0$ 时, $\text{Rot}(\mathbf{f}, \theta)$ 即 $\text{Rot}(x, \theta)$ 。若把这些数值代入式(2.46),即可得

$$\text{Rot}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与式(2.22)一致。

2. 等效转角与转轴

给出任一旋转变换,能够由式(2.46)求得进行等效旋转 θ 角的转轴。已知旋转变换

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

令 $\mathbf{R} = \text{Rot}(\mathbf{f}, \theta)$, 即

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta - f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

把式(2.48)两边的对角线项分别相加,并化简可得

$$n_x + o_y + a_z = (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) \text{vers}\theta + 3c\theta = 1 + 2c\theta$$

以及

$$c\theta = \frac{1}{2}(n_x + o_y + a_z - 1) \quad (2.49)$$

把式(2.48)中的非对角线项成对相减可得

$$\begin{cases} o_z - a_y = 2f_x s\theta \\ a_x - n_z = 2f_y s\theta \\ n_y - o_x = 2f_z s\theta \end{cases} \quad (2.50)$$

对式(2.49)各行平方后相加得

$$(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_y)^2 + (n_y - o_x)^2 = 4s^2\theta$$

以及

$$s\theta = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2} \quad (2.51)$$

把旋转规定为绕矢量 $\mathbf{f}$ 的正向旋转,使 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ 。这时,式(2.51)中的符号取正。于是,转角 θ 被唯一地确定为

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{n_x + o_y + a_z - 1} \quad (2.52)$$

而矢量 $\mathbf{f}$ 的各分量可由式(2.50)求得:

$$\begin{cases} f_x = (o_z - a_y)/2s\theta \\ f_y = (a_x - n_z)/2s\theta \\ f_z = (n_y - o_x)/2s\theta \end{cases} \quad (2.53)$$

2.6 本章小结

本章介绍了机器人的数学基础,包括空间任意点的位置和姿态的表示、坐标和齐次坐标变换、物体的变换与逆变换以及通用旋转变换等。

对于位置描述,首先需要建立一个坐标系,然后用某个 3×1 位置矢量来确定该坐标空间内任一点的位置,并用一个 3×1 列矢量表示,称为“位置矢量”。对于物体的方位,也用固接于该物体的坐标系描述,并用一个 3×3 矩阵表示。还给出了对应于 x 轴, y 轴和 z 轴作转角为 θ 旋转的旋转变换矩阵。在采用位置矢量描述点的位置、用旋转矩阵描述物体方位的基础上,物体在空间的位姿就由位置矢量和旋转矩阵共同表示。

在讨论了平移和旋转坐标变换之后,进一步研究齐次坐标变换,包括平移齐次坐标变换和旋转齐次坐标变换。这些有关空间点的变换方法为空间物体的变换和逆变换建立了基础。为了描述机器人的操作,必须建立机器人各连杆间以及机器人与周围环境间的运动关系。为此,建立了机器人操作变换方程的初步概念,并给出了通用旋转变换的一般矩阵表达式以及等效转角与转轴矩阵表达式。

上述结论为研究机器人运动学、动力学、控制建模提供了数学工具。近年来,在研究空间刚体旋转运动时,还采用了一种新的数学方法,即用指数坐标及其指数映射和指数积公式描述运动学问题。有兴趣的读者可参阅有关文献。

习 题 2

2.1 用一个描述旋转与/或平移的变换左乘或者右乘一个表示坐标系的变换,所得到的结果是否相同?为什么?试举例作图说明。

2.2 矢量^A $\mathbf{p}$ 绕 Z_A 旋转 θ ,然后绕 X_A 旋转 ϕ 。试给出依次按上述次序完成旋转的旋转矩阵。

2.3 坐标系 $\{B\}$ 的位置变化如下:初始时,坐标系 $\{A\}$ 与 $\{B\}$ 重合,使坐标系 $\{B\}$ 绕 Z_B

轴旋转 θ ; 然后再绕 X_B 轴旋转 ϕ 。给出把对矢量^B $\mathbf{p}$ 的描述变为对^A $\mathbf{p}$ 描述的旋转矩阵。

2.4 当 $\theta=30^\circ, \phi=45^\circ$ 时, 求习题 2.2 和习题 2.3 中的旋转矩阵。

2.5 已知矢量 $\mathbf{u}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 和坐标系

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}$ 为由 $\mathbf{F}$ 所描述的一点。

(1) 确定表示同一点但由基坐标系描述的矢量 $\mathbf{u}$ 。

(2) 首先让 $\mathbf{F}$ 绕基坐标系的 y 轴旋转 90° , 然后沿基系 x 轴方向平移 20 个单位。求变换所得新坐标系 $\mathbf{F}'$ 。

(3) 确定表示同一点但由坐标系 $\mathbf{F}'$ 所描述的矢量 $\mathbf{v}'$ 。

(4) 作图表示 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}'$ 之间的关系。

2.6 已知齐次变换矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

要求 $\text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) = \mathbf{H}$, 确定 $\mathbf{f}$ 和 θ 值。

2.7 编写一个求某个旋转矩阵的等效转角和转轴的算法, 要求此算法能够处理 $\theta=0^\circ$ 和 $\theta=180^\circ$ 两种特殊情况。

2.8 定义

$$\text{wedge}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

表示图 2.8 中楔形物体的方位。试计算下列楔形及其变换矩阵, 并画出每次变换后楔形处在坐标系中的位置和方向:

(1) $\text{Wedge}_1 = \text{Rot}(\text{Base}_x, -45^\circ) \text{Wedge}_0$

(2) $\text{Wedge}_2 = \text{Trans}(\text{Base}_x, 5) \text{Wedge}_1$

(3) $\text{Wedge}_3 = \text{Trans}(\text{Base}_z, -2) \text{Wedge}_2$

(4) $\text{Wedge}_4 = \text{Rot}(\text{Base}_z, 30^\circ) \text{Wedge}_3$

(5) $\text{Wedge}_4 = \mathbf{A}_n \text{Wedge}_0$

求 $\mathbf{A}_n$ 。

2.9 图 2.10(a) 示出了摆放在坐标系中的两个相同的楔形物体。要求把它们重新摆放在图 2.10(b) 所示位置。

(1) 用数字值给出两个描述重新摆置的变换序列, 每个变换表示沿某个轴平移或绕该轴旋转。在重置过程中, 必须避免两楔形物体的碰撞。

(2) 作图说明每个从右至左的变换序列。

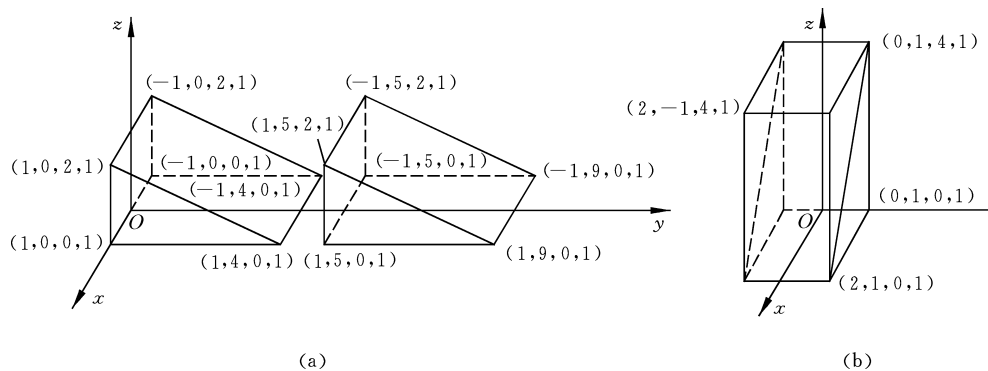


图 2.10 两个楔形物体的重置

(3) 作图说明每个从左至右的变换序列。

2.10 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 两坐标系仅仅方向不同。坐标系 $\{B\}$ 是这样得到的：首先与坐标系 $\{A\}$ 重合,然后围绕单位矢量 f 旋转 θ ,即

$${}^A R_B = R_B({}^A f, \theta)$$

求证： ${}^A R_B = e^{f\theta}$, 式中

$$f = \begin{bmatrix} 0 & -f_z & f_y \\ f_z & 0 & -f_x \\ -f_y & f_x & 0 \end{bmatrix}$$

2.11 设想让矢量 Q 绕矢量 f 旋转 θ ,以产生新矢量 Q' ,即

$$Q' = \text{Rot}(f, \theta)Q$$

应用式(2.46),求 Q' ,即求证

$$Q' = Q \cos \theta + s \theta (f \times Q) + (1 - \cos \theta) (f \cdot Q) f$$

第 3 章 机器人运动学

机器人的工作是由控制器指挥的,对应驱动末端位姿运动的各关节参数是需要实时计算的。当机器人执行工作任务时,其控制器根据加工轨迹指令规划好位姿序列数据,实时运用逆向运动学算法计算出关节参数序列,并依此驱动机器人关节,使末端执行器按照预定的位姿序列运动。

机器人运动学或机构学从几何或机构的角度描述和研究机器人的运动特性,而不考虑引起这些运动的力或力矩的作用。机器人运动学中有以下两类基本问题。

(1) 机器人运动方程的表示问题,即正向运动学:对一给定的机器人,已知连杆几何参数和关节变量,欲求机器人末端执行器相对于参考坐标系的位置和姿态。机器人程序设计语言具有按照笛卡儿坐标规定工作任务的能力。物体在工作空间内的位置和机器人手臂的位置,都是以某个确定的坐标系的位置和姿态来描述的;这就需要建立机器人运动方程。运动方程的表示问题,即正向运动学,属于问题分析。因此,也可以把机器人运动方程的表示问题称为“机器人运动分析”。

(2) 机器人运动方程的求解问题,即逆向运动学:已知机器人连杆的几何参数,给定机器人末端执行器相对于参考坐标系的期望位置和姿态(位姿),求机器人能够达到预期位姿的关节变量。当工作任务由笛卡儿坐标系描述时,必须把上述这些规定变换为一系列能够由手臂驱动关节的变量。确定手臂位置和姿态的各关节变量的解答,这就是运动方程的求解。机器人运动方程的求解问题,即逆向运动学,属于问题综合。因此,也可以把机器人运动方程的求解问题称为“机器人运动综合”。

目前,工业机器人的轮廓运动主要作匀速控制,采用计算机加运动控制卡的两级控制解决运动学位姿、关节变量间映射问题就够了。如果要求拓展到推算和控制轮廓速度变化,可进一步通过雅可比矩阵实现各单个关节速度对笛卡儿坐标系中的最后一个连杆速度进行线性变换。大多数工业机器人具有 6 个关节,这意味着雅可比矩阵是一个 6 阶方阵。

1955 年德纳维特(Denavit)和哈滕伯格(Hartenberg)提出了一种机器人的通用描述方法,用连杆的参数描述机构的运动关系。这种方法使用 4×4 的齐次变换矩阵来描述两个相邻连杆之间的空间关系,把正向运动学计算问题化简为齐次变换矩阵的运算问题,以此描述机器人末端执行器相对于参考坐标系的变换关系。而逆向运动学问题可采用多种方法进行求解,最常用的是代数法、几何法和迭代法等。

在机器人机构中,主要有 4 种不同的参考坐标系配置约定,直观上每一种都有其优势。除了德纳维特和哈滕伯格的原始约定外,此后做过修正约定的有沃尔德隆(Waldron)和保罗(Paul)版本、克雷格(Craig)版本、哈利勒(Khalil)和邓伯尔(Dombre)版本。目前,国内科技文献以沃尔德隆和保罗、克雷格这两种版本较为普遍,本教材的运动学部分采用以德纳维特-哈滕伯格原始约定为基础的克雷格版本。

本章的前两节将依次研究机器人运动方程的表示与求解方法,接着以 PUMA 560 机器人为例分析总结机器人的运动方程的表示与求解,最后讨论机器人的微分运动和雅可比公式。

3.1 机器人运动方程的表示

机械手是由一系列关节连接起来的连杆构成的一个运动链。将关节链上的一系列刚体称为“连杆”(link),通过转动关节或平动关节将相邻的两个连杆连接起来。要为机械手的每一连杆建立一个坐标系,并用齐次变换来描述这些坐标系间的相对位置和姿态。

六连杆机械手可具有 6 个自由度,每个连杆含有 1 个自由度,并能在其运动范围内任意定位与定向。按机器人的惯常设计,3 个自由度用于规定位置,而另 3 个自由度用来规定姿态。 T_6 表示机械手的位置和姿态。

3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

1. 机械手的运动方向

机械手的一个夹手可由图 3.1 表示。把所描述坐标系的原点置于夹手指尖的中心,此原点由矢量 p 表示。描述夹手方向的 3 个单位矢量的指向如下: z 向矢量处于夹手进入物体的方向上,称为“接近矢量 a ”; y 向矢量的方向从一个指尖指向另一个指尖,处于规定夹手方向上,称为“方向矢量 o ”;最后一个矢量叫作“法线矢量 n ”,它与矢量 o 和 a 一起构成一个右手矢量集合,并由矢量的交乘所规定: $n = o \times a$ 。因此,变换 T_6 具有下列元素。

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

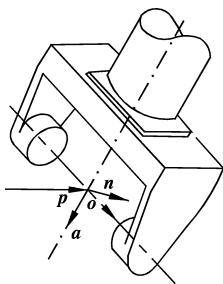


图 3.1 矢量 o, a 和 p

六连杆机械手的 T 矩阵(T_6)可由其指定的 16 个元素的数值决定。在这 16 个元素中,只有 12 个元素具有实际含义。底行由三个 0 和一个 1 组成。左列矢量 n 是第二列矢量 o 和第三列矢量 a 的叉乘。当对 p 值不存在任何约束时,只要机械手能够到达期望位置,那么矢量 o 和 a 两者都是正交单位矢量,并且互相垂直,即有: $o \cdot o = 1, a \cdot a = 1, o \cdot a = 0$ 。这些对矢量 o 和 a 的约束,使对其分量的指定较为困难,除非是末端执行装置与坐标系处于平行这种简单情况。

除了上述 T 矩阵的表示外,也可以应用第 2 章讨论过的通用旋转矩阵,把机械手端部

的方向规定为绕某轴 f 旋转 θ 角, 即 $\text{Rot}(f, \theta)$ 。遗憾的是, 要达到某些期望方向, 这一转轴没有明显的直观感觉。

2. 用欧拉变换表示运动姿态

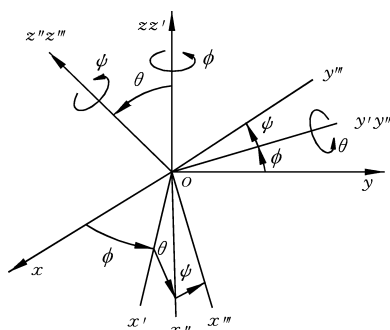


图 3.2 欧拉角的定义

机械手的运动姿态往往由一个绕轴 x , y 和 z 的旋转序列来规定。这种转角的序列称为“欧拉角”(Euler angle)。欧拉角以绕 z 轴旋转 ϕ , 再绕新的 y 轴 (y') 旋转 θ , 最后绕新的 z 轴 (z'') 旋转 ψ 的形式来描述任何可能的姿态, 如图 3.2 所示。

在任何旋转序列下, 旋转次序都是十分重要的。这一旋转序列可由基系中相反的旋转次序来解释: 先绕 z 轴旋转 ψ , 再绕 y 轴旋转 θ , 最后绕 z 轴旋转 ϕ 。

欧拉变换 $\text{Euler}(\phi, \theta, \psi)$ 可由连乘 3 个旋转矩阵求得, 即

$$\begin{aligned} \text{Euler}(\phi, \theta, \psi) &= \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(z, \psi) \\ &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3. 用 RPY 组合变换表示运动姿态

另一种常用的旋转集合是横滚(roll)、俯仰(pitch)和偏转(yaw)。

如果想象有只船沿着 z 轴方向航行, 见图 3.3(a), 那么这时, 横滚对应于绕 z 轴旋转 ϕ , 俯仰对应于绕 y 轴旋转 θ , 而偏转则对应于绕 x 轴旋转 ψ 。适用于机械手端部执行装置的这些旋转, 示于图 3.3(b)。

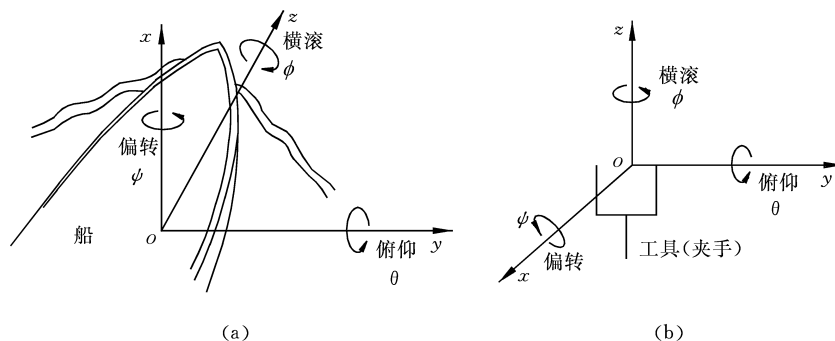


图 3.3 用横滚、俯仰和偏转表示机械手运动姿态

对于旋转次序,可作如下规定:

$$\text{RPY}(\phi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi) \quad (3.3)$$

式中,RPY 表示横滚、俯仰和偏转三旋转的组合变换。也就是说,式(3.3)表示先绕 x 轴旋转 ψ ,再绕 y 轴旋转 θ ,最后绕 z 轴旋 ϕ 。此旋转变换计算如下:

$$\begin{aligned} \text{RPY}(\phi, \theta, \psi) &= \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi & 0 \\ 0 & s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & 0 \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4) \end{aligned}$$

3.1.2 平移变换的不同坐标系表示

一旦机械手的运动姿态由某个姿态变换规定之后,它在基系中的位置就能够由左乘一个对应于矢量 $\mathbf{p}$ 的平移变换来确定:

$$\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{某姿态变换}] \quad (3.5)$$

这一平移变换可用不同的坐标来表示。

除了应用已经讨论过的笛卡儿坐标外,还可以采用柱面坐标和球面坐标来表示这一平移。

1. 用柱面坐标表示运动位置

首先用柱面坐标来表示机械手臂的位置,即表示其平移变换。这对应于沿 x 轴平移 r ,再绕 z 轴旋转 α ,最后沿 z 轴平移 z ,如图 3.4(a)所示。

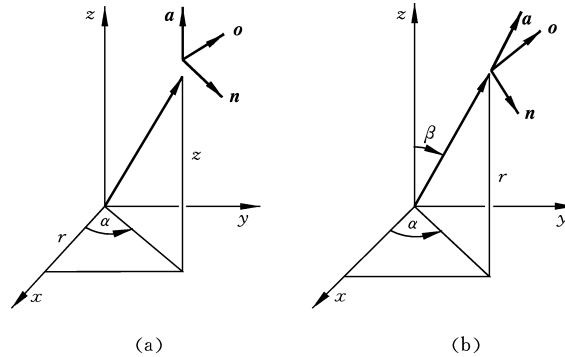


图 3.4 用柱面坐标和球面坐标表示位置

即有

$$\text{Cyl}(z, \alpha, r) = \text{Trans}(0, 0, z) \text{Rot}(z, \alpha) \text{Trans}(r, 0, 0) \quad (3.6)$$

式中, Cyl 表示柱面坐标组合变换。计算上式并化简得

$$\begin{aligned} \text{Cyl}(z, \alpha, r) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & rc\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & rsa \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

若用某个如式(3.5)所示的姿态变换右乘上述变换式,则手臂将相对于基系绕 z 轴旋转 α 。要是需要变换后机器人末端相对基系的姿态不变,就应对式(3.6)绕 z 轴旋转 $-\alpha$ 。实际可理解为圆柱坐标机器人末端坐标系是这样从基坐标系变换来的:开始末端系与基系重合,然后末端系相对基系的 x, z 和 z 各轴,依次平移 r 、旋转 α 与平移 z ,最后再绕变换后的末端坐标系 z 轴自转 $-\alpha$,即有

$$\begin{aligned} \text{Cyl}(z, \alpha, r) &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & rc\alpha \\ s\alpha & c\alpha & 0 & rsa \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(-\alpha) & -s(-\alpha) & 0 & 0 \\ s(-\alpha) & c(-\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & rc\alpha \\ 0 & 1 & 0 & rsa \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

这就是用以解释柱面坐标 $\text{Cyl}(z, \alpha, r)$ 的形式。

2. 用球面坐标表示运动位置

现在讨论用球面坐标表示手臂运动位置矢量的方法。这个方法对应于沿 z 轴平移 r , 再绕 y 轴旋转 β , 最后绕 z 轴旋转 α , 如图 3.4(b) 所示, 即

$$\text{Sph}(\alpha, \beta, r) = \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Trans}(0, 0, r) \quad (3.9)$$

式中, Sph 表示球面坐标组合变换。对式(3.9)进行计算:

$$\begin{aligned} \text{Sph}(\alpha, \beta, r) &= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cac\beta & -sa & cas\beta & rcas\beta \\ sac\beta & ca & sas\beta & rsas\beta \\ -s\beta & 0 & c\beta & rc\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

如果希望变换后的机器人末端坐标系相对于基系的姿态不变,就必须用 $\text{Rot}(y, -\beta)$ 和 $\text{Rot}(z, -\alpha)$ 右乘式(3.10)。实际可理解为球坐标机器人末端坐标系是这样从基坐标系变换来的:开始末端系与基系重合,然后末端系相对基系的 z, y 和 z 各轴,依次平移 r 、旋转 β 与平移 α ,最后再绕变换后的末端坐标系的 y 轴和 z 轴自转 $-\beta, -\alpha$,即

$$\begin{aligned} \text{Sph}(\alpha, \beta, r) &= \text{Rot}(z, \alpha) \text{Rot}(y, \beta) \text{Trans}(0, 0, r) \text{Rot}(y, -\beta) \text{Rot}(z, -\alpha) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \cos \beta \\ 0 & 1 & 0 & r \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

这就是用于解释球面坐标的形式。

3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

本节将为机器人的每一连杆建立一个坐标系,并用齐次变换来描述这些坐标系间的相对位置和姿态。可以通过递归方式获得末端执行器相对于基坐标系的齐次变换矩阵,即求得了机器人的运动方程。

1. 广义连杆

相邻坐标系间及其相应连杆可以用齐次变换矩阵来表示。求解操作手(机械手)所需要的变换矩阵,需要对每个连杆进行广义连杆描述。在求得相应的广义变换矩阵之后,可对其加以修正,以适合每个具体的连杆。

从机器人的固定基座开始为连杆进行编号,一般称固定基座为“连杆 0”,称第一个可动连杆为“连杆 1”,依此类推,机器人最末端的连杆为“连杆 n ”。为了使末端执行器能够在三维空间中达到任意的位置和姿态,机器人至少需要 6 个关节(对应 6 个自由度,3 个位置和 3 个方位)。

机械手是由一系列连接在一起的连杆(杆件)构成的。可以将连杆各种机械结构抽象成两个几何要素及其参数,即公共法线及距离 a_i 和垂直于 a_i 所在平面内两轴的夹角 α_i ;另外相邻杆件之间的连接关系也被抽象成两个量,即二连杆的相对位置 d_i 和二连杆公垂线的夹角 θ_i ,如图 3.5 所示。

克雷格参考坐标系建立约定也如图 3.5 所示,其特点是每一杆件的坐标系 z 轴和原点固连在该杆件的前一个轴线上。除第一个和最后一个连杆外,每个连杆两端的轴线各有一条法线,分别为前、后相邻连杆的公共法线。两法线间的距离即 d_i 。我们称 a_i 为“连杆长度”, α_i 为“连杆扭角”, d_i 为“二连杆距离”, θ_i 为“二连杆夹角”。

机器人机械手连杆连接关节的类型有两种——转动关节和棱柱联轴节。对于转动关节, θ_i 为关节变量;对于移动关节,距离 d_i 为联轴节(关节)变量。连杆 i 的坐标系原点位于轴 $i-1$ 和 i 的公共法线与关节 i 轴线的交点上。如果两相邻连杆的轴线相交于一点,那么原点就在这一交点上。如果两轴线互相平行,那么就选择原点使对下一连杆(其坐标原点已确定)的距离 d_{i+1} 为 0。连杆 i 的 z_i 与 i 的轴线在一直线上,而 x_i 则在轴 i 和 $i+1$ 的公共法线上,其方向从 i 指向 $i+1$ 。当两关节轴线相交时, x_{i-1} 的方向与两矢量的叉积 $z_{i-1} \times z_i$ 同轴、同向或反向, x_{i-1} 的方向总是沿着公共法线从轴 $i-1$ 指向 i 。当两轴 x_{i-1} 和 x_i 平行

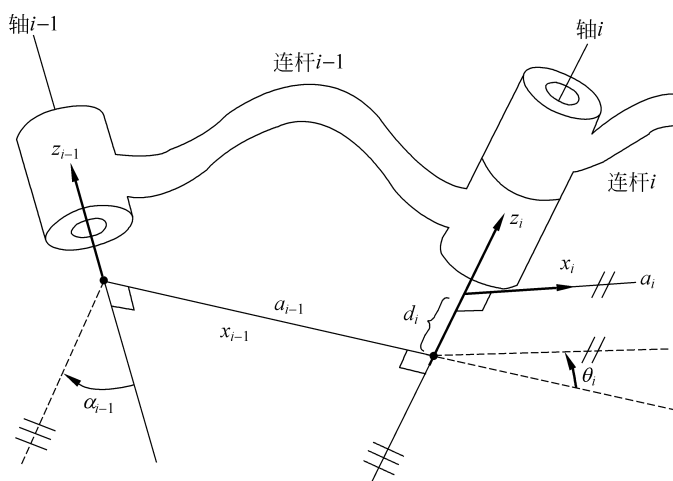


图 3.5 克雷格约定的连杆四参数和坐标系建立示意图

[资料来源: Craig J J 2018]

且同向时,第 i 个转动关节的 θ_i 为 0。

在建立机器人杆件坐标系时,首先在每一杆件 i 的关节轴 i 上建立坐标轴 z_i , z_i 正向在 2 个方向中选一个方向即可,但所有 z 轴应尽量一致。 a_i, α_i, θ_i 和 d_i 4 个参数,除了 $a_i \geq 0$ 外,其他 3 个值皆有正负,因为 α_i, θ_i 分别是围绕 x_i, z_i 轴旋转定义的,它们的正负就根据判定旋转矢量方向的右手法则来确定。 d_i 为沿 z_i 轴,由 x_{i-1} 垂足到 x_i 垂足的距离,当该距离的移动方向与 z_i 正向一致时,其符号取为正。

2. 广义变换矩阵

在对全部连杆规定坐标系之后,就能够按照下列顺序由两个旋转和两个平移来建立相邻二连杆坐标系 $i-1$ 与 i 之间的相对关系,如图 3.6 所示。

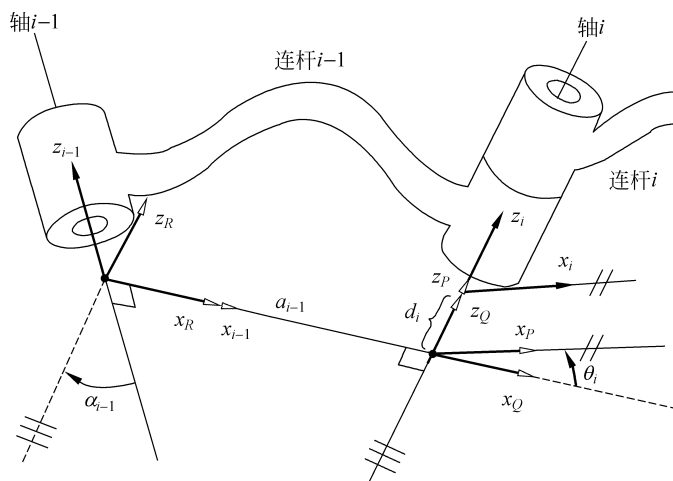


图 3.6 连杆两端相邻坐标系变换示意图

[资料来源: Craig J J 2018]

(1) 绕 x_{i-1} 轴旋转 α_{i-1} , 使 z_{i-1} 转到 z_R , 同 z_i 方向一致, 使坐标系 $\{i-1\}$ 过渡到 $\{R\}$ 。
 (2) 坐标系 $\{R\}$ 沿 x_{i-1} 或 x_R 轴平移一距离 a_{i-1} , 把坐标系移到 i 轴上, 使坐标系 $\{R\}$ 过渡到 $\{Q\}$ 。

(3) 坐标系 $\{Q\}$ 绕 z_Q 或 z_i 轴转动 θ_i , 使 $\{Q\}$ 过渡到 $\{P\}$ 。

(4) 坐标系 $\{P\}$ 再沿 z_i 轴平移一距离 d_i , 使 $\{P\}$ 过渡到和 i 杆的坐标系 $\{i\}$ 重合。

这种关系可由表示连杆 i 对连杆 $i-1$ 相对位置的 4 个齐次变换描述。根据坐标系变换的链式法则, 坐标系 $\{i-1\}$ 到坐标系 $\{i\}$ 的变换矩阵可以写成

$${}^{i-1}_i \mathbf{T} = {}^{i-1}_R \mathbf{T}_R^Q \mathbf{T}_Q^P \mathbf{T}_P^i \mathbf{T} \quad (3.12)$$

式(3.12)中的每一个变换都仅有一个连杆参数的基础变换(旋转或平移变换), 根据各中间坐标系的设置, 式(3.12)可以写成

$${}^{i-1}_i \mathbf{T} = \text{Rot}(x, \alpha_{i-1}) \text{Trans}(a_{i-1}, 0, 0) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(0, 0, d_i) \quad (3.13)$$

由 4 矩阵连乘可以计算出式(3.13), 即 ${}^{i-1}_i \mathbf{T}$ 的变换通式为

$${}^{i-1}_i \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

机械手端部对基座的关系 ${}^0_6 \mathbf{T}$ 为

$${}^0_6 \mathbf{T} = {}^0_1 \mathbf{T}_1^2 \mathbf{T}_2^3 \mathbf{T}_3^4 \mathbf{T}_4^5 \mathbf{T}_5^6 \mathbf{T}$$

如果机器人 6 个关节中的变量分别是: $\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$, 则末端相对基座的齐次矩阵也应该是包含这 6 个变量的 4×4 矩阵, 即

$${}^0_6 \mathbf{T}(\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^0_1 \mathbf{T}(\theta_1) {}^1_2 \mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3 \mathbf{T}(d_3) {}^3_4 \mathbf{T}(\theta_4) {}^4_5 \mathbf{T}(\theta_5) {}^5_6 \mathbf{T}(\theta_6) \quad (3.15)$$

式(3.15)就是机器人正向运动学表达式, 即已知机器人各关节值, 计算出末端相对于基座的位姿。

若机器人基座相对工件参照系有一个固定变换 $\mathbf{Z}$, 则机器人工具末端相对手腕端部坐标系 $\{6\}$ 也有一个固定变换 $\mathbf{E}$, 则机器人工具末端相对工件参照系的变换 $\mathbf{X}$ 为

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} {}^0_6 \mathbf{T} \mathbf{E}$$

3.1.4 建立连杆坐标系的步骤和举例

1. 建立连杆坐标系的步骤归纳

在按照上述规定对每根连杆建立坐标系时, 相应的连杆参数可以归纳如下:

a_i = 沿 x_i 轴, 从 z_i 移动到 z_{i+1} 的距离;

α_i = 绕 x_i 轴, 从 z_i 旋转到 z_{i+1} 的角度;

d_i = 沿 z_i 轴, 从 x_{i-1} 移动到 x_i 的距离;

θ_i = 绕 z_i 轴, 从 x_{i-1} 旋转到 x_i 的角度。

克雷格法则实现了关节参数的下标与关节轴的对应, 唯一不完美处是在计算相邻两坐标系间的齐次变换矩阵 ${}^{i-1}_i \mathbf{T}$ 时, 参数由下标为 $i-1$ 的连杆参数 a_{i-1}, α_{i-1} 和下标为 i 的关节参数 d_i, θ_i 构成, 没有完全统一。

对于一个机器人,可以按照如下步骤依次建立所有连杆的坐标系:

(1) 找出各关节轴,并画出这些轴线的延长线。在步骤(2)至步骤(5)中,仅考虑两条相邻的轴线(关节轴 i 和关节轴 $i+1$)。

(2) 找出关节轴 i 和关节轴 $i+1$ 之间的公垂线,以该公垂线与关节轴 i 的交点作为连杆坐标系 $\{i\}$ 的原点(当关节轴 i 和关节轴 $i+1$ 相交时,以该交点作为坐标系 $\{i\}$ 的原点)。

(3) 规定 z_i 轴沿关节轴 i 的方向。

(4) 规定 x_i 轴沿公垂线 a_i 的方向,由关节轴 i 指向关节轴 $i+1$ 。如果关节轴 i 和关节轴 $i+1$ 相交,则规定 x_i 轴垂直于这两条关节轴所在的平面。

(5) 按照右手法则确定 y_i 轴。

(6) 当第一个关节的变量为 0 时,规定坐标系 $\{0\}$ 与坐标系 $\{1\}$ 重合。对于坐标系 $\{n\}$,其原点和 x_n 轴的方向可以任意选取。但在选取时,通常尽量使连杆参数为 0。

值得说明的是,按照上述方法建立的连杆坐标系并不是唯一的。首先,当选取 z_i 轴与关节轴 i 重合时, z_i 轴的指向可以有两种选择。此外,在关节轴相交的情况下(此时 $a_i = 0$),由于 x_i 轴垂直于 z_i 轴与 z_{i+1} 轴所在的平面, x_i 轴的指向也有两种选择。当关节轴 i 与关节轴 $i+1$ 平行时,坐标系 $\{i\}$ 的原点位置可以任意选取(通常选取该原点使之满足 $d_i = 0$)。另外,当关节为平动关节时,坐标系的选取也有一定的任意性。

基座为 0 系,末端为 n 系,按照前述坐标系的建立规则,0 系、 n 系的 x 轴确定方案有无数种,一般的选择原则是让更多系数为 0 和方便观察。中间坐标系的 z 轴确定一般有 2 种,且 z 轴相交时, x 轴也有 2 种。但只要 0 系、 n 系的定义是固定的,不论中间定义如何多样,机器人最终的运动方程也应是一样的。

2. 建立连杆坐标系举例

例 3.1 如图 3.7 所示为一个平面三连杆机器人。因为三个关节均为转动关节,故有时称该机器人为“RRR(或 3R)”机构。为此机器人建立连杆坐标系并写出其德纳维特-哈滕伯格参数。

解: 首先定义参考坐标系 $\{0\}$,该坐标系固定在基座上。当第一个关节的变量值(θ_1)为 0 时,坐标系 $\{0\}$ 与坐标系 $\{1\}$ 重合。

由于该机器人位于一个平面上,其所有关节轴线都与其所在的平面垂直(图中所有的 z 轴均垂直纸面向外,简便起见,均未画出)。

根据之前的规定, x_i 轴沿公垂线方向,由 z_i 轴指向 z_{i+1} 轴。

根据右手法则可以确定所有的 y 轴。各坐标系如图 3.8 所示。

下面求取相应的连杆参数。

因为所有关节都是旋转关节,所以关节变量分别为 θ_1, θ_2 和 θ_3 。图 3.5 中所有的 z 轴均垂直纸面向外,相互平行,按之前的归纳,连杆扭角 α_i 代表相邻 z 轴之间的角度,因此所有的 α_i 均为 0。

由于所有的 x 轴均在一个平面内,而连杆偏距 d_i 代表相邻公垂线之间的距离,故所有的 d_i 均为 0。

按照规定, a_i 代表沿 x_i 轴,从 z_i 移动到 z_{i+1} 的距离。由于 z_0 轴和 z_1 轴重合,因此 $a_0 = 0$ 。 a_1 代表 z_1 轴和 z_2 轴之间的距离,由图 3.4 可知, $a_1 = L_1$ 。同理可得 $a_2 = L_2$ 。

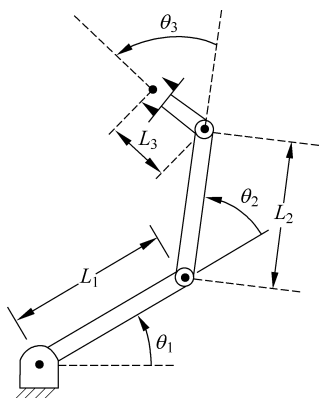


图 3.7 一个三连杆平面机器人

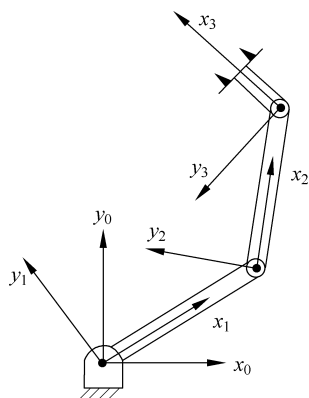


图 3.8 三连杆机器人连杆坐标系的设置

因此,该平面三连杆机器人对应的德纳维特-哈滕伯格参数如表 3.1 所示。

表 3.1 三连杆机器人对应的德纳维特-哈滕伯格参数表

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

3.2 机器人运动方程的求解

3.1 节讨论了机器人的正向运动学问题,本节将研究难度更大的逆向运动学问题,即机器人运动方程的求解问题:已知工具坐标系相对于工作台坐标系的期望位置和姿态,求机器人能够达到预期位姿的关节变量。

大多数机械手的程序设计语言是用某个笛卡儿坐标系来指定机械手末端位置的。这一指定可用于求解机械手最后一个连杆的姿态 T_6 。不过,在机械手能够被驱动至这个姿态之前,必须知道与这个位置有关的所有关节的位置。

3.2.1 逆运动学求解的一般问题

1. 解的存在性

逆运动学的解是否存在取决于期望位姿是否在机器人的工作空间内。简单地说,工作空间是机器人末端执行器能够达到的范围。若解存在,则被指定的目标点必须在工作空间内。如果末端执行器的期望位姿在机器人的工作空间内,那么至少存在一组逆运动学的解。

现在讨论如图 3.9 所示的二连杆机器人的工作空间。如果 $L_1 = L_2$,则可达工作空间是一个半径为 $2L_1$ 的圆。如果 $L_1 \neq L_2$,则可达工作空间是一个外径为 $L_1 + L_2$ 、内径为 $|L_1 - L_2|$ 的圆环。在可达工作空间的内部,达到目标点的机器人关节有两组可能的解;在

工作空间的边界上则只有一种可能的解。

这里讨论的工作空间是假设所有关节能够旋转 360° ，但这在实际机构中是很少见的。当关节旋转不能达到 360° 时，工作空间的范围或可能的姿态的数目会相应减少。

当一台机器人少于 6 个自由度时，它在三维空间内不能达到全部位姿。显然，如图 3.9

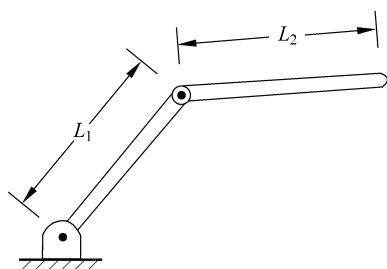


图 3.9 连杆长度为 L_1 和 L_2 的二连杆机器人

所示的平面机器人不能伸出平面，因此凡是 z 坐标不为 0 的目标点均不可达。在很多实际情况中，具有 4 个或 5 个自由度的机器人能够超出平面操作，但显然这样的机器人是不能达到三维空间内的全部位姿的。

2. 多解性问题

在求解逆运动学方程时可能遇到的另一个问题就是多解性问题。图 3.10 为一个带有末端执行器的三连杆平面机器人。如果机器人的末端执

行器需达到图 3.10 的位姿，则图中的连杆位形为一组可能的逆运动学解。注意，当机器人的前 2 节连杆处于图中的虚线位形时，末端执行器的位姿与第一个位形完全相同。即对该平面三连杆机器人而言，其逆运动学存在两组不同的解。

机器人系统在执行操控时只能选择一组解，对于不同的应用，其解的选择标准是不同的，其中一种比较合理的选择方法是“最短行程解”，就是使机器人的移动距离最短。例如在图 3.11 中，如果一开始机器人的末端执行器处于点 A，希望它移动到点 B，此时有上下虚线所示的两组可能的位形。在没有障碍物的情况下，按照最短行程解的选择标准，即选择使每一个运动关节的移动量最小的位形，可以选择图 3.11 中上部虚线所示的位形；但当环境中存在障碍物时，“最短行程解”可能存在冲突，这时可能需要选择“较长行程解”，即需要按照图 3.11 中下部虚线所示的位形才能到达 B 点。因此，为了使机器人能够顺利地到达指定位姿，在求解逆运动学时通常希望能够计算全部可能的解。

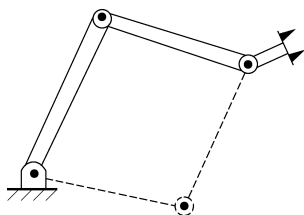


图 3.10 三连杆机器人，虚线代表第二个解

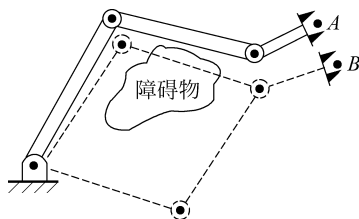


图 3.11 环境中有障碍物时的多解选择

逆运动学解的个数取决于机器人的关节数量，也与连杆参数和关节运动范围有关。一般来说，机器人的关节数量越多，连杆的非零参数越多，达到某一特定定位姿的方式也越多，即逆运动学的解的数量越多。

3. 逆运动学的求解方法

上文已经介绍过，机器人的逆运动学求解通常是非线性方程组的求解。与线性方程组

的求解不同,非线性方程组没有通用的求解算法。

把逆运动学的全部求解方法分成两大类:封闭解法和数值解法。由于数值解法的迭代性质,其求解速度一般比相应的封闭解法慢很多。对逆运动学方程的数值迭代解法本身已构成一个完整的研究领域,感兴趣的读者可以参阅相关参考文献。

下面主要讨论封闭解法。在本书中,“封闭解法”指基于解析形式的解法。封闭解的求解方法又可分为两类:代数法和几何法。有时它们的区别并不明显:任何几何方法中都引入了代数描述。因此这两种方法是相似的,它们的区别仅是求解过程的不同。

如果一种算法可以求出达到所需位姿的全部关节变量,则该机器人是可解的。在逆运动学方面的一项新的研究成果是,所有包含转动关节和平动关节的串联型 6 自由度机器人均是可解的。但是这种解一般都是数值解,对于 6 自由度机器人来说,只有在特殊情况下才有解析解。这种存在解析解(封闭解)的机器人具有如下特性:存在几个正交关节轴或有多个 α_i 为 0° 或 $\pm 90^\circ$ 。研究表明,具有 6 个旋转关节的机器人存在封闭解的充分条件是相邻的三个关节轴线相交于一点。当今设计的 6 自由度机器人几乎都满足这个条件,例如 PUMA 560 机器人的第 4、5、6 轴相交,因此大多是可以求解的。

3.2.2 逆运动学的解析解法

为了介绍机器人逆运动学方程的求解方法,本节首先通过两种不同的方法对一个简单的平面三连杆机器人进行求解。然后采用欧拉变换解法、RPY 变换解法和球面变换解法等变换解法进行求解。

1. 代数解法

以 3.1.4 节介绍的平面三连杆机器人(如图 3.7)为例,它的坐标系设定如图 3.8 所示,连杆参数如表 3.1 所示。

按照 3.1 节介绍的方法,应用这些连杆参数很容易求得这个机器人的正向运动学方程为

$${}^B_w\mathbf{T} = {}^0_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

式中, c_{123} 是 $\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ 的简写, s_{123} 是 $\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ 的简写,下文同此用法^①。

为了集中讨论逆运动学问题,假设目标点的位姿已经确定,即已知腕部坐标系相对于基坐标系的变换 ${}^B_w\mathbf{T}$ 。可以通过 3 个变量 x, y 和 ϕ 来确定目标点的位姿,其中 x, y 是目标点在基坐标系下的笛卡儿坐标, ϕ 是连杆 3 在平面内的方位角(相对于基坐标系 x 轴正方向),则目标点关于基坐标系的变换矩阵如下:

^① 机器人运动学中会出现大量三角函数的表达形式,根据表达式占用空间的大小,下列 3 种表示: $\sin\theta_1, s\theta_1, s_1$ 都是可以的。

$${}^B_W\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

式中, c_ϕ 是 $\cos\phi$ 的简写, s_ϕ 是 $\sin\phi$ 的简写。令式(3.16)和式(3.17)相等, 即对应位置的元素相等, 可以得到 4 个非线性方程, 进而求出 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 :

$$c_\phi = c_{123} \quad (3.18)$$

$$s_\phi = s_{123} \quad (3.19)$$

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} \quad (3.20)$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} \quad (3.21)$$

现在用代数方法求解式(3.18)~式(3.21)。将式(3.20)和式(3.21)同时平方, 然后相加, 得到

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 c_2 \quad (3.22)$$

由式(3.22)可以求解 c_2 :

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \quad (3.23)$$

式(3.23)有解的条件是其右边的值必须在 -1 和 1 之间。在本解法中, 该约束条件可用来检查解是否存在。如果不满足约束条件, 则表明目标点超出了机器人的可达工作空间, 机器人无法达到该目标点, 其逆运动学无解。

假设目标点在机器人的工作空间内, 则 s_2 的表达式为

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (3.24)$$

根据式(3.23)和式(3.24), 应用双变量反正切函数计算 θ_2 , 可得

$$\theta_2 = \arctan2(s_2, c_2) \quad (3.25)$$

式(3.25)有“正”、“负”两组解, 对应了该例中逆运动学的两组不同的解。

求出了 θ_2 后, 可以根据式(3.20)和式(3.21)求出 θ_1 。将式(3.20)和式(3.21)写成如下形式:

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1 \quad (3.26)$$

$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1 \quad (3.27)$$

式中,

$$\begin{cases} k_1 = L_1 + L_2 c_2 \\ k_2 = L_2 s_2 \end{cases} \quad (3.28)$$

为了求解这种形式的方程, 可进行如下的变量代换, 令

$$r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (3.29)$$

并且

$$\gamma = \arctan2(k_2, k_1) \quad (3.30)$$

则

$$\begin{cases} k_1 = r \cos\gamma \\ k_2 = r \sin\gamma \end{cases} \quad (3.31)$$

式(3.26)和式(3.27)可以写成

$$\frac{x}{r} = \cos\gamma \cos\theta_1 - \sin\gamma \sin\theta_1 \quad (3.32)$$

$$\frac{y}{r} = \cos\gamma \sin\theta_1 + \sin\gamma \cos\theta_1 \quad (3.33)$$

即有

$$\cos(\gamma + \theta_1) = \frac{x}{r} \quad (3.34)$$

$$\sin(\gamma + \theta_1) = \frac{y}{r} \quad (3.35)$$

利用双变量反正切函数,可得

$$\gamma + \theta_1 = \arctan2\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \arctan2(y, x) \quad (3.36)$$

从而

$$\theta_1 = \arctan2(y, x) - \arctan2(k_2, k_1) \quad (3.37)$$

注意, θ_2 符号的选取将导致 k_2 符号的变化, 因此会影响 θ_1 的结果。应用式(3.29)~式(3.31)进行变换求解的方法经常出现在求解逆运动学的问题中, 即式(3.26)或式(3.27)类型方程的求解方法。如果这里 $x=y=0$, 则式(3.37)的值不能确定, 此时 θ_1 可取任何值。

最后, 根据式(3.18)和式(3.19)能够求出 θ_1, θ_2 以及 θ_3 的和:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \arctan2(s_\phi, c_\phi) = \phi \quad (3.38)$$

由于已经求得 θ_1 和 θ_2 , 从而可以解出 θ_3 :

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (3.39)$$

至此, 通过代数方法完成了平面三连杆机器人的逆运动学求解。对平面三连杆机器人, 共有两组可能的逆运动学的解, 分别对应于式(3.30)的两种取值。

代数方法是求解逆运动学的基本方法之一, 在求解方程时, 解的形式已经确定。可以看出, 对于许多常见的代数问题, 经常会出现几种固定形式的超越方程, 在之前的章节里已经遇到其中的两种。

2. 几何解法

在几何方法中, 为求出机器人的解, 需将机器人的空间几何参数分解成平面几何参数。几何方法对于少自由度机器人, 或当连杆参数满足一些特定取值时(如当 $\alpha_1=0$ 或 $\pm 90^\circ$ 时), 求解其逆运动学是相当容易的。对于如图 3.7 所示的平面三连杆机器人, 如不考虑最后一根连杆代表的末端执行器, 则机器人可以简化为如图 3.12 所示的平面二连杆机器人。只要前两根连杆能够到达指定的位置 P , 末端执行器即能达到所需的位姿。可以通过平面几何关系来直接求解 θ_1 和 θ_2 。

在图 3.10 中, L_1, L_2 以及连接坐标系 $\{0\}$ 原点和坐标系 $\{3\}$ 原点的连线, 组成了一个三角形。图中连线 OP 与 L_1, L_2 位置对称的一组点画线表示该三角形的另一种可能的位形, 该组位形同样可以达到坐标系 $\{3\}$ 的位置。

对于实线表示的三角形(图 3.12 中下部的机器人位形), 根据余弦定理可以得到

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\alpha \quad (3.40)$$

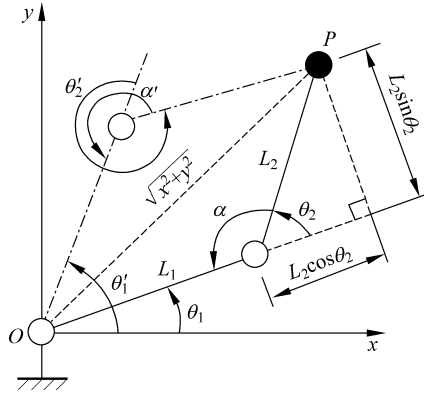


图 3.12 平面二连杆机器人的逆运动学求解

即有

$$\alpha = \arccos\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1L_2}\right) \quad (3.41)$$

为使该三角形成立,到目标点的距离 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 必须小于或等于二连杆的长度之和 $L_1 + L_2$ 。可对上述条件进行计算以校核该解是否存在。当目标点超出机器人的工作空间时,不满足该条件,此时逆运动学无解。

求得连杆 L_1 和 L_2 之间的夹角 α 后,即可通过平面几何关系求出 θ_1 和 θ_2 :

$$\theta_2 = \pi - \alpha \quad (3.42)$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{L_2 \sin\theta_2}{L_1 + L_2 \cos\theta_2}\right) \quad (3.43)$$

如图 3.12 所示,当 $\alpha' = -\alpha$ 时,机器人有另外一组对称的解:

$$\theta'_2 = \pi + \alpha \quad (3.44)$$

$$\theta'_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \arctan\left(\frac{L_2 \sin\theta_2}{L_1 + L_2 \cos\theta_2}\right) \quad (3.45)$$

平面内的角度可以直接相加,因此三根连杆的角度之和即为最后一根连杆的方位角:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi \quad (3.46)$$

由式(3.46)可以解出 θ_3 :

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2 \quad (3.47)$$

至此,用几何解法得到了这个机器人逆运动学的全部解。

3. 欧拉变换解法

(1) 基本隐式方程的解

首先令

$$\text{Euler}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{T} \quad (3.48)$$

式中,

$$\text{Euler}(\phi, \theta, \psi) = \text{Rot}(z, \phi) \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(z, \psi)$$

已知任一变换 $\mathbf{T}$,求解 ϕ, θ 和 ψ 。也就是说,如果已知 $\mathbf{T}$ 矩阵各元的数值,那么其所对应的

ϕ, θ 和 ψ 值是什么?

由式(3.2)和式(3.48),可有以下式

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

令矩阵方程两边各对应元素一一相等,可得 16 个方程式,其中有 12 个为隐式方程。我们将从这些隐式方程求得所需解答。在式(3.49)中,只有 9 个隐式方程,因为其平移坐标也是明显解。这些隐式方程如下:

$$n_x = c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi \quad (3.50)$$

$$n_y = s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi \quad (3.51)$$

$$n_z = -s\theta c\psi \quad (3.52)$$

$$o_x = -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi \quad (3.53)$$

$$o_y = -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi \quad (3.54)$$

$$o_z = s\theta s\psi \quad (3.55)$$

$$a_x = c\phi s\theta \quad (3.56)$$

$$a_y = s\phi s\theta \quad (3.57)$$

$$a_z = c\theta \quad (3.58)$$

(2) 用双变量反正切函数确定角度

可以试探地对 ϕ, θ 和 ψ 进行如下求解。据式(3.58)得

$$\theta = \arccos(a_z) \quad (3.59)$$

据式(3.56)和式(3.59)有:

$$\phi = \arccos(a_x / s\theta) \quad (3.60)$$

又据式(3.52)和式(3.59)有:

$$\psi = \arccos(-n_z / s\theta) \quad (3.61)$$

但是,这些解答是无用的,因为:

① 当由余弦函数求角度时,不仅此角度的符号是不确定的,而且所求角度的准确程度也与该角度本身有关,即 $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ 以及 $d\cos(\theta)/d\theta|_{0,180^\circ} = 0$ 。

② 在求解 ϕ 和 ψ 时,见式(3.50)和式(3.51),会再次用到反余弦函数,而且除式的分母为 $\sin\theta$ 。这样,当 $\sin\theta$ 接近 0 时,总会产生不准确。

③ 当 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pm 180^\circ$ 时,式(3.60)和式(3.61)没有定义。

因此,在求解时,总是采用双变量反正切函数 $\arctan2$ 来确定角度。 $\arctan2$ 提供两个自变量,即纵坐标 y 和横坐标 x ,见图 3.13。当 $-\pi \leq \theta \leq \pi$,由 $\arctan2$ 反求角度时,同时检查 y 和 x 的符号来确定其所在象限。这一函数也能检验什么时候 x 或 y 为 0,并反求出正确的角度。 $\arctan2$ 的精确程度对其整个定义域都是一样的。

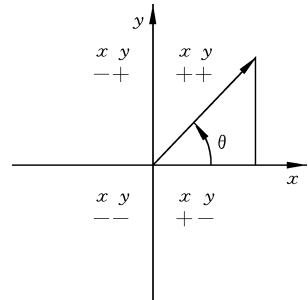


图 3.13 反正切函数 $\arctan2$

(3) 用显式方程求各角度

要求得方程式的解,采用另一种通常能够导致显式解答的方法。用未知逆变换依次左乘已知方程,对于欧拉变换有

$$\text{Rot}(z, \phi)^{-1} \mathbf{T} = \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(z, \psi) \quad (3.62)$$

$$\text{Rot}(y, \theta)^{-1} \text{Rot}(z, \phi)^{-1} \mathbf{T} = \text{Rot}(z, \psi) \quad (3.63)$$

式(3.62)的左式为已知变换 $\mathbf{T}$ 和 ϕ 的函数,而右式各元素或者为 0,或者为常数。令方程式的两边对应元素相等,对于式(3.62)即有

$$\begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 & 0 \\ -s\phi & c\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi & s\theta & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

在计算此方程左式之前,用下列形式来表示乘积:

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $f_{11} = c\phi x + s\phi y$, $f_{12} = -s\phi x + c\phi y$, $f_{13} = z$, 而 x, y 和 z 为 f_{11} , f_{12} 和 f_{13} 的各相应分量,例如:

$$\begin{cases} f_{12}(\mathbf{a}) = -s\phi a_x + c\phi a_y \\ f_{11}(\mathbf{p}) = c\phi p_x + s\phi p_y \end{cases}$$

于是,可把式(3.64)重写为

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & -c\theta s\psi & s\theta & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

检查式(3.65)的右式可见, p_x, p_y 和 p_z 均为 0。这是我们所期望的,因为欧拉变换不产生任何平移。此外,位于第二行第三列的元素也为 0。所以可得 $f_{12}(\mathbf{a}) = 0$, 即

$$-s\phi a_x + c\phi a_y = 0 \quad (3.66)$$

式(3.66)两边分别加上 $s\phi a_x$, 再除以 $c\phi a_x$ 可得

$$\tan\phi = \frac{s\phi}{c\phi} = \frac{a_y}{a_x}$$

这样,即可以从反正切函数 $\arctan 2$ 得到

$$\phi = \arctan 2(a_y, a_x) \quad (3.67)$$

对式(3.66)两边分别加上 $-c\phi a_y$, 然后除以 $-c\phi a_x$, 可得

$$\tan\phi = \frac{s\phi}{c\phi} = \frac{-a_y}{-a_x}$$

这时可得式(3.66)的另一个解为

$$\phi = \arctan 2(-a_y, -a_x) \quad (3.68)$$

式(3.68)与式(3.67)两解相差 180° 。

除非出现 a_y 和 a_x 同时为 0 的情况, 总能得到式(3.66)的两个相差 180° 的解。当 a_y 和 a_x 均为 0 时, 角度 ϕ 没有定义。这种情况是在机械手臂垂直向上或向下, 且 ϕ 和 ψ 两角又对应于同一旋转时出现的, 参阅图 3.3(b)。这种情况称为“退化”(degeneracy)。这时, 我们任取 $\phi=0$ 。

在求得 ϕ 值之后, 式(3.65)左式的所有元素也随之确定。令左式元素与右式对应元素相等, 可得: $s\theta=f_{11}(\mathbf{a}), c\theta=f_{13}(\mathbf{a})$, 或 $s\theta=c\phi a_x+s\phi a_y, c\theta=a_z$ 。于是有

$$\theta = \arctan2(c\phi a_x + s\phi a_y, a_z) \quad (3.69)$$

当正弦和余弦都确定时, 角度 θ 总是唯一确定的, 而且不会出现前述角度 ϕ 那种退化问题。

最后求解角度 ψ 。由式(3.65)有

$$s\psi=f_{12}(\mathbf{n}), c\psi=f_{12}(\mathbf{o}), \quad \text{或} \quad s\psi=-s\phi n_x+c\phi n_y, c\psi=-s\phi o_x+c\phi o_y$$

从而得到

$$\psi = \arctan2(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \quad (3.70)$$

概括地说, 如果已知一个表示任意旋转的齐次变换, 那么就能够确定其等价欧拉角

$$\begin{cases} \phi = \arctan2(a_y, a_x), & \phi = \phi + 180^\circ \\ \theta = \arctan2(c\phi a_x + s\phi a_y, a_z) \\ \psi = \arctan2(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \end{cases} \quad (3.71)$$

4. RPY 变换解法

在分析欧拉变换时, 已知只有用显式方程才能求得确定的解。所以在这里直接从显式方程来求解用滚动、俯仰和偏转表示的变换方程。从式(3.4)得

$$\text{Rot}(z, \phi)^{-1} \mathbf{T} = \text{Rot}(y, \theta) \text{Rot}(x, \psi)$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & s\theta s\psi & s\theta c\psi & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi & 0 \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

式中, f_{11}, f_{12} 和 f_{13} 的定义同前。令 $f_{12}(\mathbf{n})$ 与式(3.72)右式的对应元素相等, 可得

$$-s\phi n_x + c\phi n_y = 0$$

从而得

$$\phi = \arctan2(n_y, n_x) \quad (3.73)$$

$$\phi = \phi + 180^\circ \quad (3.74)$$

又令式(3.72)左右式中的(3,1)及(1,1)元素分别相等, 有: $-s\theta=n_z, c\theta=c\phi n_x+s\phi n_y$, 于是得

$$\theta = \arctan2(-n_z, c\phi n_x + s\phi n_y) \quad (3.75)$$

最后令第(2,3)和(2,2)对应元素分别相等, 有 $-s\psi=-s\phi a_x+c\phi a_y, c\psi=-s\phi o_x+c\phi o_y$, 据此可得

$$\psi = \arctan2(s\phi a_x - c\phi a_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \quad (3.76)$$

综合上述分析可得 RPY 变换各角如下:

$$\begin{cases} \phi = \arctan2(n_y, n_x) \\ \phi = \phi + 180^\circ \\ \theta = \arctan2(-n_z, c\phi n_x + s\phi n_y) \\ \psi = \arctan2(s\phi a_x - c\phi a_y, -s\phi o_x + c\phi o_y) \end{cases} \quad (3.77)$$

5. 球面变换解法

也可以把上述求解技术用于球面坐标表示的运动方程,这些方程如式(3.10)和式(3.11)所示。由式(3.10)可得:

$$\text{Rot}(z, \alpha)^{-1} \mathbf{T} = \text{Rot}(y, \beta) \text{Trans}(0, 0, r) \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & rs\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & rc\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\mathbf{n}) & f_{11}(\mathbf{o}) & f_{11}(\mathbf{a}) & f_{11}(\mathbf{p}) \\ f_{12}(\mathbf{n}) & f_{12}(\mathbf{o}) & f_{12}(\mathbf{a}) & f_{12}(\mathbf{p}) \\ f_{13}(\mathbf{n}) & f_{13}(\mathbf{o}) & f_{13}(\mathbf{a}) & f_{13}(\mathbf{p}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & rs\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & rc\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令式(3.78)两边的右列相等,即有

$$\begin{bmatrix} c\alpha p_x + s\alpha p_y \\ -s\alpha p_x + c\alpha p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rs\beta \\ 0 \\ rc\beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此可得: $-s\alpha p_x + c\alpha p_y$, 即

$$\alpha = \arctan2(p_y, p_x) \quad (3.79)$$

$$\alpha = \alpha + 180^\circ \quad (3.80)$$

以及 $c\alpha p_x + s\alpha p_y = rs\beta$, $p_z = rc\beta$ 。当 $r > 0$ 时,

$$\beta = \arctan2(c\alpha p_x + s\alpha p_y, p_z) \quad (3.81)$$

要求解 r , 必须用 $\text{Rot}(y, \beta)^{-1}$ 左乘式(3.78)的两边,

$$\text{Rot}(y, \beta)^{-1} \text{Rot}(z, \alpha)^{-1} \mathbf{T} = \text{Trans}(0, 0, r)$$

计算上式(请读者自己推算)后,让其右列相等

$$\begin{bmatrix} c\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) - s\beta p_z \\ -s\alpha p_x + c\alpha p_y \\ s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而可得

$$r = s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z \quad (3.82)$$

综合上述讨论可得球面变换的解为

$$\begin{cases} \alpha = \arctan2(p_y, p_x), & \alpha = \alpha + 180^\circ \\ \beta = \arctan2(c\alpha p_x + s\alpha p_y, p_z) \\ r = s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z \end{cases} \quad (3.83)$$

3.2.3 逆运动学的数值解法

机器人逆向运动学解与机器人结构有很大关系,需要根据不同的机器人结构选择合适的逆运动学算法。根据 Pieper 准则,如果机器人的 3 个相邻关节轴交于一点或三轴线平行,便可以使用代数法求解。但是如果机器人的结构不满足这一准则,则无法求得解析解,此时只能使用数值解法来获取逆运动学解。此外,冗余机器人(关节空间自由度大于任务空间需要的自由度)的逆运动学存在无穷多解,通常也只能通过数值解法求解其逆运动学问题。

逆运动学的数值解法种类较多,本节主要介绍 3 种应用较多的数值解法,其他解法可以参阅相关参考文献。

1. 循环坐标下降解法

循环坐标下降法(cyclic-coordinate descent, CCD)是一种启发式的直接搜索算法。这种方法每一次迭代包含 n 个步骤,分别对应着第 n 个关节到第 1 个关节。在第 i 个步骤中,只有第 i 个关节可以改变,其他关节都固定不动。通过最小化目标函数,在每一个步骤中,计算出最佳的关节变动数值,从而使整个机器人从末端执行器到第 1 个关节逐渐地迭代优化,直至末端执行器的位姿到达期望位姿或者小于一定的误差。

设机器人末端执行器的目标位置和姿态分别是 $\mathbf{P}_d$ 和 $\mathbf{R}_d = [\mathbf{f}_1 | \mathbf{f}_2 | \mathbf{f}_3]$, 其中 $\mathbf{f}_j (j=1,2,3)$ 分别是 x, y, z 坐标轴的单位轴向矢量。机器人末端执行器当前位置和姿态分别为 $\mathbf{P}_h(\mathbf{q})$ 和 $\mathbf{R}_h = [\mathbf{h}_1(\mathbf{q}) | \mathbf{h}_2(\mathbf{q}) | \mathbf{h}_3(\mathbf{q})]$, 其中, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 是 $n \times 1$ 维的关节变量。系统相关误差定义如下:

位置误差定义为

$$\delta \mathbf{P}(\mathbf{q}) = (\mathbf{P}_d - \mathbf{P}_h(\mathbf{q})) \cdot (\mathbf{P}_d - \mathbf{P}_h(\mathbf{q})) \quad (3.84)$$

即当前机器人末端执行器位置与目标位置之间的欧氏距离。

姿态误差定义为

$$\delta \mathbf{O}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^3 w_j (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{h}_j(\mathbf{q}) - 1)^2 \quad (3.85)$$

其中, w_j 是 x, y, z 坐标轴的姿态误差的权重。由旋转矩阵的正交条件可知,当机器人末端执行器的当前姿态与目标姿态一致时, $\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{h}_j(\mathbf{q}) = 1$, 即对应方向的姿态误差为 0。

因此,总的误差定义为

$$e(\mathbf{q}) = w_p \cdot \delta \mathbf{P}(\mathbf{q}) + w_o \cdot \delta \mathbf{O}(\mathbf{q}) \quad (3.86)$$

其中, w_p 和 w_o 分别是位置误差和朝向误差的权重,取值为任意的正实数。通过对机器人末端执行器位姿误差定义,逆运动学问题转化为找到一组解: $\mathbf{q}^* = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, 使系统总误差: $e(\mathbf{q}) < \epsilon, (\epsilon \rightarrow 0)$ 。将上述末端执行器的位姿误差定义和罗德里格旋转方程(Rodrigues' rotation formula)结合,第 i 个旋转关节的优化目标函数可以写为

$$g(\varphi_i) = k_1(1 - \cos\varphi_i) + k_2\cos\varphi_i + k_3\sin\varphi_i \quad (3.87)$$

式中, φ_i 为关节参数变化量, 其取值应使上式取得最大值时, 总误差最小。其中,

$$\begin{cases} k_1 = \mathbf{w}_p(\mathbf{P}_{id}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z}_i)(\mathbf{P}_{ih}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z}_i) + \mathbf{w}_o \sum_{j=1}^3 (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{z}_i)(\mathbf{h}_j(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{z}_i) \\ k_2 = \mathbf{w}_p(\mathbf{P}_{id}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{P}_{ih}(\mathbf{q})) + \mathbf{w}_o \sum_{j=1}^3 (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{h}_j(\mathbf{q})) \\ k_3 = \mathbf{z}_i \cdot [\mathbf{w}_p(\mathbf{P}_{id}(\mathbf{q}) \times \mathbf{P}_{ih}(\mathbf{q}))] + \mathbf{w}_o \sum_{j=1}^3 (\mathbf{h}_j(\mathbf{q}) \times \mathbf{f}_j) \end{cases}$$

式中, $\mathbf{z}_i$ 为第 i 个关节旋转轴的单位轴向矢量; $\mathbf{P}_{id}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_d - \mathbf{P}_i(\mathbf{q})$, $\mathbf{P}_{ih}(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_h - \mathbf{P}_i(\mathbf{q})$, $\mathbf{P}_i(\mathbf{q})$ 为第 i 个坐标系原点的位置矢量。式(3.87)是关于第 i 个关节旋转量的一元一次函数, 显然, 该式取极大值的条件是:

$$\begin{cases} \frac{dg(\varphi_i)}{d\varphi_i} = (k_1 - k_2)\sin\varphi_i + k_3\cos\varphi_i = 0 \\ \frac{d^2g(\varphi_i)}{d\varphi_i^2} = (k_1 - k_2)\cos\varphi_i - k_3\sin\varphi_i < 0 \end{cases}$$

求解可得

$$\begin{cases} \tan\varphi_i > \frac{k_1 - k_2}{k_3} \\ \varphi_i = \arctan\left(\frac{k_3}{k_1 - k_2}\right) \end{cases} \quad (3.88)$$

对于平移关节, 有

$$\varphi_i = (\mathbf{P}_{id}(\mathbf{q}) - \mathbf{P}_{ih}(\mathbf{q})) \cdot \mathbf{z}_i \quad (3.89)$$

根据关节的具体类型, 在每次迭代过程中由公式(3.88)或式(3.89)计算出迭代过程中第 i 个关节变量的最优调整值。

使用循环坐标下降法来迭代求解逆运动学问题的过程总结如下:

(1) 输入机器人正向运动学模型、关节限制、末端执行器的期望位姿和末端最大误差 ϵ , 并给机器人关节初始值;

(2) 使用正向运动学模型计算各个关节的位置和朝向, 并基于公式(3.86)计算当前末端执行器位姿的总误差, 如果总误差数值小于 ϵ 则停止迭代, 否则进入下一步;

(3) 从机器人最后一个关节至第 1 个关节, 根据关节的具体类型, 如果当前关节为旋转关节则根据式(3.88)旋转对应大小, 若为平移关节, 则根据式(3.89)平移对应大小转入(2)。

2. 前向后向到达解法

前向后向到达逆运动学算法(forward and backward reaching inverse kinematics, FABRIK)也是一种启发式的逆运动学算法。与循环坐标下降法仅仅从末端执行器往基坐标迭代不同, FABRIK 将从末端执行器至基坐标迭代一次, 此后再从基坐标向末端执行器迭代。因此, FABRIK 克服了循环坐标下降法靠近末端执行器的关节权重偏大的问题。

与上文一致, 用 $\mathbf{P}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示第 i 个关节的位置, $\mathbf{P}_1$ 为第 1 个关节的位置, $\mathbf{P}_n$ 为第 n 个关节的位置, 同时也认为是末端执行器的位置。考虑机器人是具有单一末端执行

器的串联机器人, P_d 为目标位置, FABRIK 算法的具体执行过程如下:

首先计算当前机器人各个关节之间的欧氏距离, $d_i = |P_{i+1} - P_i| (i=1, 2, \dots, n)$ 。此后, 计算关节 1 的位置 P_1 与目标位置 P_d 之间的距离 dist 。若 $\text{dist} < \sum_{i=1}^{n-1} d_i$, 则目标点是处于可达范围内的; 否则, 目标点是不可达的。图 3.14 是一个 4 自由度机器人使用 FABRIK 算法进行逆运动学迭代求解的过程, 下面结合此图来讲解算法的运行过程。

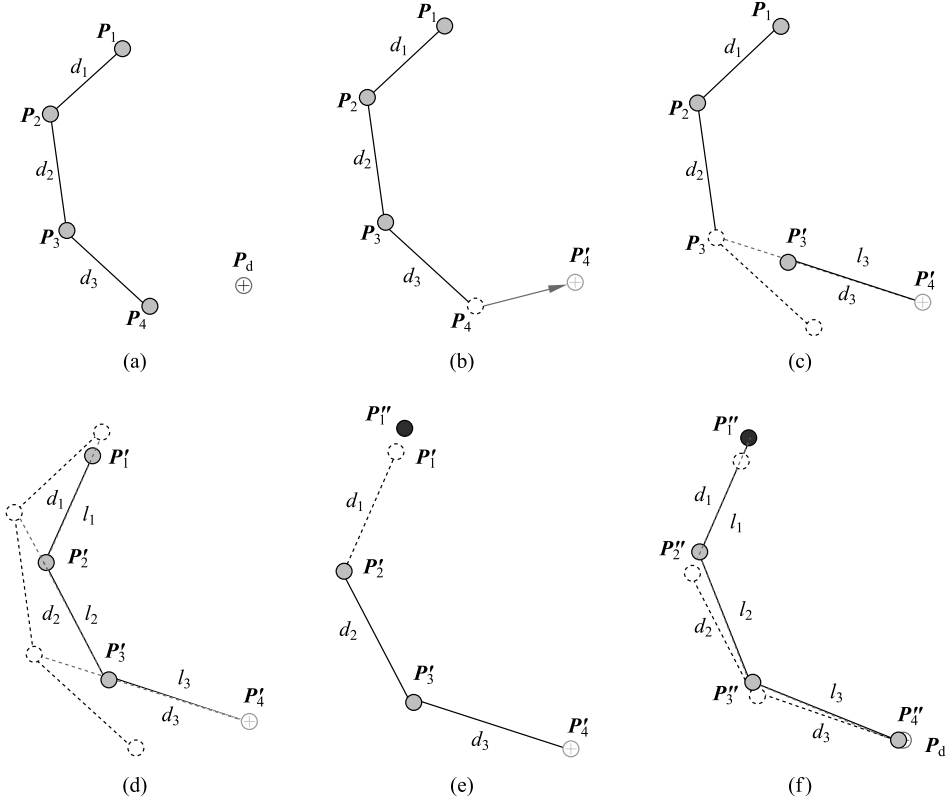


图 3.14 FABRIK 算法迭代示例

对于目标点是可达的情况, 一次迭代过程包含两个阶段。机器人的初始状态如图 3.14(a) 所示。在第一个阶段, 算法从末端执行器往前的逐步估计各个关节的位置。首先, 令末端执行器 P_n 的新位置为目标位置, 并标记为 P'_n , 如图 3.14(b) 所示。此后, 如图 3.14(c) 所示, 令 l_{n-1} 为 P'_n 和 P_{n-1} 的连线, 连线上距离 P'_n 的距离为 d_{n-1} 的位置是新的第 $n-1$ 个关节的位置, 记为 P'_{n-1} 。此后, 按照同样的方法, 依次确定新的关节的位置, 直至设置关节 1 的位置 P'_1 。由图 3.14(d) 可以看出, 迭代后的关节 1 的位置已经发生了变更, 不在原始的位置。因为关节 1 通常也是坐标系的位置, 其位置不会改变, 因此在第二个阶段, 如图 3.14(e) 所示, 设置关节 1 的新位置 P''_1 与 P_1 重合, 此后依次按照同样的方法设置关节之间的连线并根据关节之间的距离设置新的关节位置, 直到计算出新的末端执行器的位置 P''_n , 完成了一次迭代计算过程。

对于目标不可达的情况, 同样采用目标可达的迭代流程, 但是由于末端执行器无法到达目标位置, 需要设置一定的误差范围作为停止迭代的条件或者设置最大迭代次数保证算法中止。

上文讨论的是 FABRIK 算法应用的单一末端执行器并且无约束的情形,通常机器人的末端执行器还需要满足目标朝向。FABRIK 算法中将目标朝向看作一个姿态约束,并将其增加到迭代的过程中,使机器人的每一个关节都可以满足关节限制和朝向的要求。此外,FABRIK 算法还可以应用于多末端执行器机器人的情况,具体的内容可以查阅相关参考文献。

3. 遗传算法优化解法

在代数解不存在或机器人为冗余机器人的情况下,可以基于优化的方法求解机器人的逆向运动学问题,将机器人的正向运动学模型与遗传算法、粒子群算法、萤火虫算法等优化算法结合,通过逐次的迭代优化逼近最优解。

下面基于遗传算法给出基于优化的方法求解逆运动学问题的基本思路:

- (1) 以机器人各个关节为变量,进行编码;
- (2) 在整个机器人关节空间中初始化种群;
- (3) 将个体解码,计算关节变量并代入机器人正向运动学模型,计算个体末端矩阵;
- (4) 将个体的解和个体末端矩阵代入适应度函数中进行计算,获得个体的适应度函数值;
- (5) 检查是否满足停止进化的条件,满足停止条件则停止运行;
- (6) 依据个体的适应度函数值进行选择、变异、交叉操作,生成下一代种群,转到(3);

通过使用遗传算法,将逆向运动学问题转化为优化机器人关节配置求最佳位姿的优化问题,这种方法具有一定的通用性,简单易用,通过设置合适的适应度函数可以引导机器人结构的优化方向。

接下来主要讨论将遗传算法应用到逆向运动学问题时需要注意的具体细节:

(1) 编码方式。遗传算法的编码方式包括二进制编码、格雷码编码、实数编码方式等,在使用遗传算法求解机器人的逆向运动学问题时通常采用二进制编码,因为二进制编码更容易更改参数空间的大小。具体地,对机器人的第 j 个关节变量 q_j 可以使用一个 m 位的二进制数串进行编码, m 值越大即二进制数长度越长,该关节参数的分辨率越高。将所有关节变量的编码串联起来便构成了基因码链,表示一个染色体;对于具有 n 个自由度的机器人,一个染色体的编码长度为: $L = m \times n$ 。每个染色体仅是关节变量的参数串,因此需要使用解码算子将二进制的关节变量转换为实数,具体公式为

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^m 2^{q_{ji}}}{2^m - 1} (q_{jh} - q_{jl}) + q_{jl} \quad (3.90)$$

其中, $q_j \in [q_{jl}, q_{jh}]$ 是第 j 个关节解码后的数值, q_{jl} 和 q_{jh} 分别是关节的上下限,通过更改关节上下限可以更改算法的搜索范围。

(2) 适应度函数。由于逆向运动学的多解性,同一末端矩阵可能存在多个姿态的解。通过设置合理的适应度函数便可以调整算法的选解规则或偏好。使用遗传算法求机器人逆向运动学时通常要考虑末端执行器的位置和朝向误差、运动连续性、避免达到关节极限和避开障碍物等,末端执行器的位置和姿态误差可以设置为式(3.86)的形式,其他适应度函数可以设置为

$$\text{disC} = \frac{1}{1 - e^{-\left(\frac{q_j - q_{jc}}{\text{disC}}\right)^2}} \quad (3.91)$$

$$\text{dis}L = \frac{1}{1 + e^{\frac{q_j - q_{j1}}{\text{fia}L}}} + \frac{1}{1 + e^{\frac{q_j - q_{jh}}{\text{fia}L}}} \quad (3.92)$$

$$\text{dis}D = \begin{cases} 0, & \text{当 } d - d_{\min} > 0 \\ \frac{1}{d_{\min} - d}, & \text{其他} \end{cases} \quad (3.93)$$

式中, $\text{dis}C$ 函数用于计算当前解的连续性。 q_{jc} 是上一个目标点的解中第 j 个关节的数值, $\text{fia}C$ 是常数, 用于控制曲线的变化速率, $\text{dis}C$ 数值越小代表当前解与上一个解的关节姿态越接近, 运动连续性越好。 $\text{dis}L$ 函数用于计算当前解距离关节极限的程度, 式中, $\text{fia}L$ 同样是常数, 用于控制曲线的变化速率。 在机器人的真实应用中, 通常让机器人姿态尽量远离关节极限, 避免出现运动姿态的突然改变。 $\text{dis}D$ 函数使算法尽量选择远离障碍物的解。 $d_{\min}$ 是距离障碍物的最小距离, d 是机器人末端执行器或者机身某一位置距离障碍物的距离。 这里使用的适应度函数数值越小代表当前解越好。

分别令 $q_{jc}, \text{fia}C, q_{j1}, q_{jh}, \text{fia}L$ 和 $d_{\min}$ 为 $0, 2, -8, 8, 0.05, 5$, 可得 $\text{dis}C, \text{dis}L$ 和 $\text{dis}D$ 函数的曲线如图 3.15 所示, $\text{dis}C$ 函数在 0 附近的数值最小, 远离 0 以后逐渐增大, 最大值为 1。 $\text{dis}L$ 函数在 -8 和 8 附近开始增加, 最大值为 2。 $\text{dis}D$ 则在距离小于 5 时迅速增大。 在使用这些适应度函数时, 应当根据具体的需要选择不同的适应度函数, 合理设置参数和权重, 并进行归一化处理。

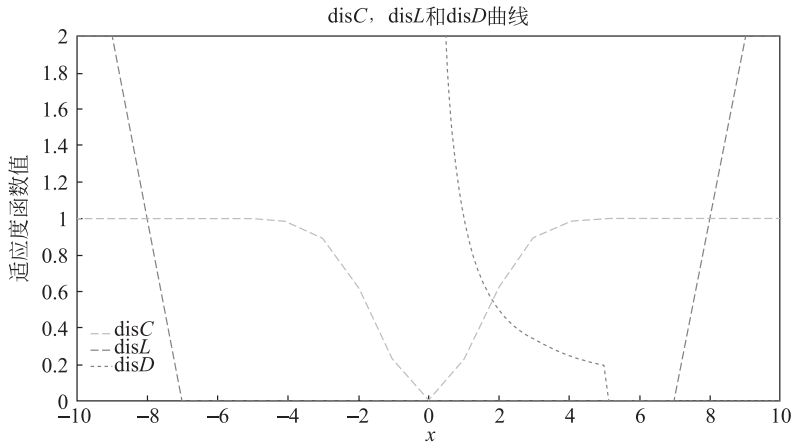


图 3.15 $\text{dis}C, \text{dis}L$ 和 $\text{dis}D$ 曲线图

(3) 终止条件。通常, 终止条件可以设置为迭代到一定的代数或者适应度函数值小于一定的数值。在逆向运动学算法需要满足多个约束时, 也可以设置多个适应度函数, 当最优解满足多个条件时再退出迭代。

(4) 选择, 变异与交叉。选择、变异与交叉操作在算法中用于生成下一代种群。通常使用精英策略与轮盘赌相结合的方法进行选择操作, 即将上一代种群中的最优个体留下, 直接进入下一种群, 其他个体按照其适应度函数的大小转化为对应的选择概率。通常, 适应度函数值小的有更大概率被选择进入下一种群。进行变异与交叉操作前先设置变异与交叉算子, 即单个个体的变异与交叉概率。对每一个个体生成随机数, 小于变异或交叉算子的, 则进行单点交叉或变异操作。单点交叉是指随机选择当前个体的染色体的某一位基因, 以此

为分界线,将下一个个体以后的基因与当前个体该位以后的基因进行互换。而单点变异则是随机选择当前个体的染色体的某一位基因,若该基因为 1,则设置为 0;若为 0,则设置为 1。

目前,遗传算法在机器人逆向运动学问题的应用上已经有了许多改进,主要是在编码、适应度函数以及下一代种群的产生方式上。可以使用多次编码的方式,在算法的不同收敛阶段设置不同的搜索范围,从而加速算法的收敛。此外,还可以通过预采样的方法,先在搜索空间中进行解的姿态的搜索,锁定搜索范围后再进行迭代。

至此,已介绍了 3 种机器人逆运动学的数值解法。这 3 种数值解法各有优劣,循环坐标下降算法和 FABRIK 算法的计算复杂度较低,运行速度快,但是添加约束较为复杂;优化求解法则便于对机器人加入新的硬约束和软约束,使机器人可以执行多任务,但是其搜索空间较大。后续也出现了许多对这 3 种算法的改进,比如将遗传算法求解法和参数化关节法相结合,从而降低搜索空间等,都进一步提升了算法的性能。除上述方法外,基于雅可比矩阵求解逆运动学算法也是数值求解逆运动学的一大类方法,涉及该方面讲解的书籍较多,感兴趣的读者可以查阅相关文献。总的来说,逆运动学算法多种多样,在具体使用时,要结合具体机型和任务要求,合理地选择适合的求解算法。

3.3 机器人运动的分析与综合举例

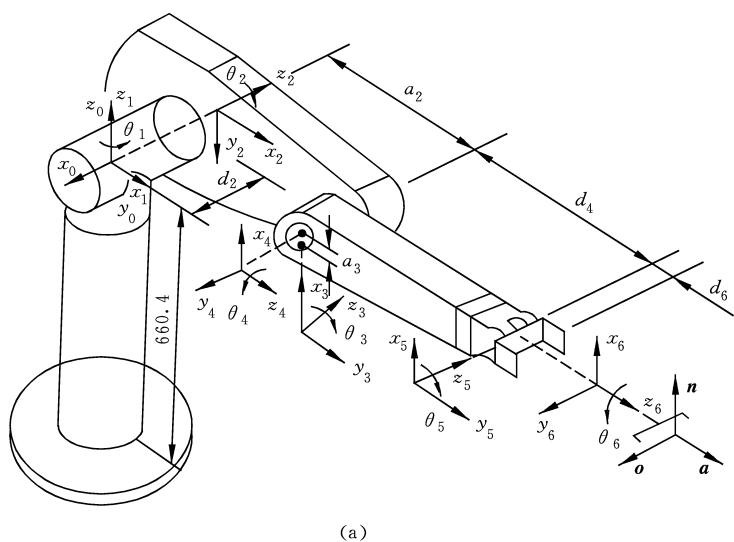
我们能够由式(3.14)等来求解用笛卡儿坐标表示的运动方程。这些矩阵右式的元素,或者为零,或者为常数,或者为第 n 个~第 6 个关节变量的函数。矩阵相等表明其对应元素分别相等,并可从每一矩阵方程得到 12 个方程式,每个方程式对应于 4 个矢量($\mathbf{n}$, $\mathbf{o}$, $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$)的每一个分量。下面将以 PUMA 560 机器人为例来求解以关节角度为变量的运动学方程。

3.3.1 机器人正向运动学举例

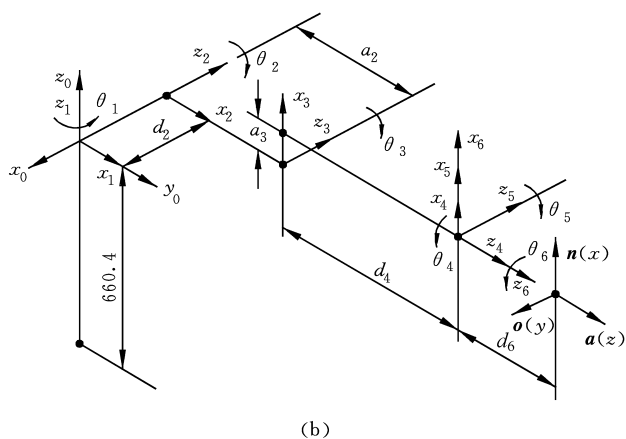
PUMA 560 是一个关节式机器人,其 6 个关节都是转动关节。前 3 个关节确定手腕参考点的位置,后 3 个关节确定手腕的方位。和大多数工业机器人一样,后 3 个关节轴线交于一点。该点被选为手腕的参考点,也被选为连杆坐标系 $\{4\}$, $\{5\}$ 和 $\{6\}$ 的原点。关节 1 的轴线为铅直方向,关节 2 和关节 3 的轴线为水平方向,且平行,距离为 a_2 。关节 1 和关节 2 的轴线垂直相交,关节 3 和关节 4 的轴线垂直交错,距离为 a_3 。各连杆坐标系如图 3.16 所示,相应的连杆参数列于表 3.2。其中, $a_2=431.8\text{mm}$, $a_3=20.32\text{mm}$, $d_2=149.09\text{mm}$, $d_4=433.07\text{mm}$ 。

表 3.2 PUMA 560 机器人的连杆参数

连杆 i	变量 θ_i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	变量范围
1	$\theta_1 (90^\circ)$	0°	0	0	$-160^\circ \sim 160^\circ$
2	$\theta_2 (0^\circ)$	-90°	0	d_2	$-225^\circ \sim 45^\circ$
3	$\theta_3 (-90^\circ)$	0°	a_2	0	$-45^\circ \sim 225^\circ$
4	$\theta_4 (0^\circ)$	-90°	a_3	d_4	$-110^\circ \sim 170^\circ$
5	$\theta_5 (0^\circ)$	90°	0	0	$-100^\circ \sim 100^\circ$
6	$\theta_6 (0^\circ)$	-90°	0	0	$-266^\circ \sim 266^\circ$



(a)



(b)

图 3.16 PUMA 560 机器人的连杆坐标系

根据式(3.14)和表 3.2 所示的连杆参数,可求得各连杆变换矩阵如下:

$$\begin{aligned}
 {}^0T_1 &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^1T_2 &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2T_3 &= \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^3T_4 &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4T_5 &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^5T_6 &= \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

将各连杆变换矩阵相乘,可以得到 PUMA 560 的运动学方程:

$${}^0_6\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}(\theta_1){}_2^1\mathbf{T}(\theta_2){}_3^2\mathbf{T}(\theta_3){}_4^3\mathbf{T}(\theta_4){}_5^4\mathbf{T}(\theta_5){}_6^5\mathbf{T}(\theta_6) \quad (3.94)$$

该方程即关节变量 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ 的函数。要求解此运动方程,需先计算某些中间结果(这些中间结果有助于求解 3.3.2 节中的逆向运动学问题):

$${}^4_6\mathbf{T} = {}^4_5\mathbf{T}{}_6^5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_5 c_6 & -c_5 s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$${}^3_6\mathbf{T} = {}^3_4\mathbf{T}{}_6^4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 & a_3 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 & s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 & s_4 s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

由于 PUMA 560 的关节 2 和关节 3 相互平行,把 ${}^1_2\mathbf{T}(\theta_2)$ 和 ${}^2_3\mathbf{T}(\theta_3)$ 相乘可得

$${}^1_3\mathbf{T} = {}^1_2\mathbf{T}{}_3^2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

式中, $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3) = c_2 c_3 - s_2 s_3$; $s_{23} = \sin(\theta_2 + \theta_3) = c_2 s_3 + s_2 c_3$ 。可见,当两旋转关节平行时,利用角度之和的公式,可以得到比较简单的表达式。

再将式(3.97)与式(3.96)相乘,可得

$${}^1_6\mathbf{T} = {}^1_3\mathbf{T}{}_6^3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^1n_x & {}^1o_x & {}^1a_x & {}^1p_x \\ {}^1n_y & {}^1o_y & {}^1a_y & {}^1p_y \\ {}^1n_z & {}^1o_z & {}^1a_z & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,

$$\begin{cases} {}^1n_x = c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6 \\ {}^1n_y = -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\ {}^1n_z = -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \\ {}^1o_x = -c_{23}(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6 \\ {}^1o_y = s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\ {}^1o_z = s_{23}(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 \\ {}^1a_x = -c_{23} c_4 s_5 - s_{23} c_5 \\ {}^1a_y = s_4 s_5 \\ {}^1a_z = s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\ {}^1p_x = a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23} \\ {}^1p_y = d_2 \\ {}^1p_z = -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23} \end{cases} \quad (3.98)$$

最后,可求得 6 个连杆坐标变换矩阵的乘积,即 PUMA 560 型机器人的正向运动学方程为

$${}^0_6\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中,

$$\begin{cases} n_x = c_1 [c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6] + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ n_y = s_1 [c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6] - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ n_z = -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \\ o_x = c_1 [c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6] + s_1 (c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6) \\ o_y = s_1 [c_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6] - c_1 (c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6) \\ o_z = -s_{23}(-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 \\ a_x = -c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ a_y = -s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ a_z = s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \\ p_x = c_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] - d_2 s_1 \\ p_y = s_1 [a_2 c_2 + a_3 c_{23} - d_4 s_{23}] + d_2 c_1 \\ p_z = -a_3 s_{23} - a_2 s_2 - d_4 c_{23} \end{cases} \quad (3.99)$$

式(3.99)表示的 PUMA 560 机器人的手臂变换矩阵 ${}^0_6\mathbf{T}$,描述了末端连杆坐标系 $\{6\}$ 相对于基坐标系 $\{0\}$ 的位姿,是 PUMA 560 全部运动学分析的基本方程。

为校核所得 ${}^0_6\mathbf{T}$ 的正确性,计算 $\theta_1 = 90^\circ, \theta_2 = 0^\circ, \theta_3 = -90^\circ, \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$ 时手臂变换矩阵 ${}^0_6\mathbf{T}$ 的值。计算结果为

$${}^0_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 + d_4 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与图 3.14 所示的情况完全一致。

3.3.2 机器人逆向运动学举例

机器人运动方程的求解方法很多,3.2 节已介绍了几种,能够求解由笛卡儿坐标表示的运动方程,其矩阵右式的元素,或者为零,或者为常数,或者为第 i 个至第 6 个关节变量的函数。矩阵相等表明其对应元素分别相等,并可从每一矩阵方程得到 12 个方程式,每个方程式对应于 4 个矢量(n, o, a 和 p)的每一分量。

机器人逆向运动学求解可描述为:已知 ${}^0_n\mathbf{T}$ 的数值,求出 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ 的所有可能解。这通常是一个非线性问题。对 PUMA 560 机器人来说,考虑式(3.99)给出的方程,其逆向运动学求解的确切描述如下:已知 ${}^0_6\mathbf{T}$ 的 16 个数值(其中 4 个无意义),求解式(3.99)中的 6

个关节角 $\theta_1 \sim \theta_6$ 。

作为一个适用于 6 自由度机器人的代数解法的例子,对上面推导过的 PUMA 560 型机器人的运动学方程进行求解。值得注意的是,下面的解法并非适用于所有机器人的逆向运动学求解,但是对于大多数通用机器人来说,这样的解法是最常用的。

将 PUMA 560 的运动方程(3.99)写为

$${}^0_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0_1\mathbf{T}(\theta_1) {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) {}^3_4\mathbf{T}(\theta_4) {}^4_5\mathbf{T}(\theta_5) {}^5_6\mathbf{T}(\theta_6) \quad (3.100)$$

若末端连杆的位姿已经给定,即 $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 为已知,则求关节变量 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ 的值被称为“运动反解”。用未知的连杆逆变换同时左乘方程(3.100)的两边,可以把关节变量分离出来,从而进行求解。具体步骤如下:

1. 求 θ_1

用逆变换 ${}^0_1\mathbf{T}^{-1}(\theta_1)$ 左乘方程(3.100)两边,

$${}^0_1\mathbf{T}^{-1}(\theta_1) {}^0_6\mathbf{T} = {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) {}^3_4\mathbf{T}(\theta_4) {}^4_5\mathbf{T}(\theta_5) {}^5_6\mathbf{T}(\theta_6) \quad (3.101)$$

即有

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^1_6\mathbf{T} \quad (3.102)$$

令矩阵方程(3.102)两端的元素(2,4)对应相等,可得

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = d_2 \quad (3.103)$$

利用三角代换:

$$p_x = \rho \cos \phi; \quad p_y = \rho \sin \phi \quad (3.104)$$

式中, $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$; $\phi = \arctan 2(p_y, p_x)$ 。把代换式(3.104)代入式(3.103),得到 θ_1 的解:

$$\begin{cases} \sin(\phi - \theta_1) = d_2/\rho; & \cos(\phi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - (d_2/\rho)^2} \\ \phi - \theta_1 = \arctan 2 \left[\frac{d_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{\rho} \right)^2} \right] \\ \theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) - \arctan 2(d_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}) \end{cases} \quad (3.105)$$

式中,“ $\pm$ ”对应于 θ_1 的两个可能解。

2. 求 θ_3

在选定 θ_1 的一个解之后,再令矩阵方程(3.102)两端的元素(1,4)和(3,4)分别对应相等,即得

$$\begin{cases} c_1 p_x + s_1 p_y = a_3 c_{23} - d_4 s_{23} + a_2 c_2 \\ -p_z = a_3 s_{23} + d_4 c_{23} + a_2 s_2 \end{cases} \quad (3.106)$$

式(3.103)与式(3.106)的平方和为

$$a_3 c_3 - d_4 s_3 = k \quad (3.107)$$

$$\text{式中, } k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_2^2 - d_4^2}{2a_2}$$

方程(3.97)中已经消去 θ_2 , 且方程(3.107)与方程(3.103)具有相同形式, 因而可由三角代换求解 θ_3 :

$$\theta_3 = \arctan 2(a_3, d_4) - \arctan 2(k, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2}) \quad (3.108)$$

式中, “ $\pm$ ”对应 θ_3 的两种可能解。

3. 求 θ_2

为求解 θ_2 , 在矩阵方程(3.100)两边左乘逆变换 ${}^0_3\mathbf{T}^{-1}$,

$${}^0_3\mathbf{T}^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3){}_6^0\mathbf{T} = {}^3_4\mathbf{T}(\theta_4){}_5^4\mathbf{T}(\theta_5){}_6^5\mathbf{T}(\theta_6) \quad (3.109)$$

即有

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} & s_1 c_{23} & -s_{23} & -a_2 c_3 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3_6\mathbf{T} \quad (3.110)$$

式中, 变换 ${}^3_6\mathbf{T}$ 由式(3.96)给出。令矩阵方程(3.110)两边的元素(1,4)和(2,4)分别对应相等, 可得

$$\begin{cases} c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 = a_3 \\ -c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 = d_4 \end{cases} \quad (3.111)$$

联立求解得 s_{23} 和 c_{23} :

$$\begin{cases} s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 c_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \\ c_{23} = \frac{(-d_4 + a_2 s_3) p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(-a_2 c_3 - a_3)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2} \end{cases} \quad (3.112)$$

s_{23} 和 c_{23} 表达式的分母相等, 且为正。于是

$$\begin{aligned} \theta_{23} = \theta_2 + \theta_3 = \arctan 2[& -(a_3 + a_2 c_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4), \\ & (-d_4 + a_2 s_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 c_3 + a_3)] \end{aligned} \quad (3.113)$$

根据 θ_1 和 θ_3 解的 4 种可能组合, 由式(3.113)可以得到相应的 4 种可能值 θ_{23} , 于是可以得到 θ_2 的 4 种可能解:

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \quad (3.114)$$

4. 求 θ_4

因为式(3.110)的左边均为已知, 令两边元素(1,3)和(3,3)分别对应相等, 则可得

$$\begin{cases} a_x c_1 c_{23} + a_y s_1 c_{23} - a_z s_{23} = -c_4 s_5 \\ -a_x s_1 + a_y c_1 = s_4 s_5 \end{cases} \quad (3.115)$$

只要 $s_5 \neq 0$, 便可求出 θ_4 :

$$\theta_4 = \arctan 2(-a_x s_1 + a_y c_1, -a_x c_1 c_{23} - a_y s_1 c_{23} + a_z s_{23}) \quad (3.116)$$

当 $s_5=0$ 时,机器人处于奇异位形。此时,关节轴 4 和 6 重合,只能解出 θ_4 与 θ_6 的和或差。奇异位形可以由式(3.116)中 $\arctan 2$ 的两个变量是否都接近 0 来判别。若都接近 0,则为奇异位形。在奇异位形时,可任意选取 θ_4 的值,再计算相应的 θ_6 值。

5. 求 θ_5

根据 θ_4 进而解出 θ_5 ,将式(3.100)两端同时左乘逆变换 ${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$,有

$${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) {}^0T = {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \quad (3.117)$$

因式(3.117)的左边 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 和 θ_4 均已解出,逆变换 ${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ 为

$$\begin{bmatrix} c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4 & s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4 & -s_{23} c_4 & -a_2 c_3 c_4 + d_2 s_4 - a_3 c_4 \\ -c_1 c_{23} s_4 + s_1 c_4 & -s_1 c_{23} s_4 - c_1 c_4 & s_{23} s_4 & a_2 c_3 s_4 + d_2 c_4 + a_3 s_4 \\ -c_1 s_{23} & -s_1 s_{23} & -c_{23} & a_2 s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程式(3.117)的右边 ${}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) = {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6)$,由式(3.85)给出。令式(3.117)两边元素(1,3)和(3,3)分别对应相等,可得

$$\begin{cases} a_x(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) + a_y(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4) - a_z(s_{23} c_4) = -s_5 \\ a_x(-c_1 s_{23}) + a_y(-s_1 s_{23}) + a_z(-c_{23}) = c_5 \end{cases} \quad (3.118)$$

由此得到 θ_5 的封闭解:

$$\theta_5 = \arctan 2(s_5, c_5) \quad (3.119)$$

6. 求 θ_6

将式(3.100)两端同时左乘逆变换 ${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)$,可得

$${}^0T^{-1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5) {}^0T = {}^5_6T(\theta_6) \quad (3.120)$$

让矩阵方程(3.120)两边元素(1,1)和(3,1)分别对应相等可得

$$\begin{cases} -n_x(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) - n_y(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + n_z(s_{23} s_4) = s_6 \\ n_x[(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4)c_5 - c_1 s_{23} s_5] + n_y[(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4)c_5 - s_1 s_{23} s_5] \\ -n_z(s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5) = c_6 \end{cases} \quad (3.121)$$

从而可以求出 θ_6 的封闭解:

$$\theta_6 = \arctan 2(s_6, c_6) \quad (3.122)$$

由于在式(3.105)和式(3.108)中出现了“ $\pm$ ”,因此这些方程可能有 4 组解。图 3.17,给出了 PUMA 560 型机器人达到同一目标点位姿的 4 组可能解,它们对于手部来说具有完全相同的位姿。对于图 3.17 中所示的每一组解,通过机器人臂腕关节“翻转”可以得到对称的另外 4 组解,这 4 组解可由下面的翻转公式求得

$$\begin{cases} \theta'_4 = \theta_4 + 180^\circ \\ \theta'_5 = -\theta_5 \\ \theta'_6 = \theta_6 + 180^\circ \end{cases} \quad (3.123)$$

PUMA 560 型机器人的逆向运动解可能存在 8 种。所以,PUMA 560 型机器人到达一个确定的目标位姿共有 8 组不同的解。但是,由于结构的限制,例如各关节变量不能在全部 360° 范围内运动,有些解不能实现。在机器人存在多种解的情况下,应选取其中最满意的一组解,以满足机器人的工作要求。

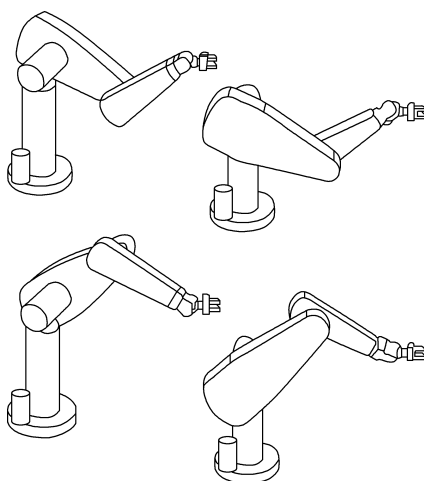


图 3.17 PUMA 560 的 4 组解

3.4 机器人的雅可比公式

在对机器人进行操作与控制时,常常涉及机器人位置和姿态的微小变化。这些变化可由描述机器人位置的齐次变换矩阵的微小变化来表示。在数学上,这种微小变化可用微分变化来表达。机器人运动过程中的微分关系是很重要的。例如,当用摄像机来观察机器人的末端执行装置时,需要把对于一个坐标系的微分变化变换为对于另一坐标系的微分变化。比如说,把摄像机的坐标系建立在 T_6 上。应用微分变化的另一情况是当已知对 T_6 的微分变化时,要求出各关节坐标的相应变化。微分变化对于研究机器人的动力学问题也是十分重要的。

3.4.1 机器人的微分运动

已知一个变换,其元素为某个变量的函数,那么对这个变量的微分变换就是这样的变换,使其元素为原变换元素的导数。研究出一种方法,使对坐标系 $\{T\}$ 的微分变换等价于对基系的变换。这种方法可推广至任何两个坐标系,使它们的微分运动相等。

机器人的变换包括平移变换、旋转变换、比例变换和投影变换等。在此,把讨论限于平移变换和旋转变换。这样,就可以将导数项表示为微分平移和微分旋转。

1. 微分平移和微分旋转

既可以用给定坐标系也可用基坐标系来表示微分平移和旋转。

已知坐标系 $\{T\}$,可表示 $T+dT$ 为

$$T+dT = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(f, d\theta) T \quad (3.124)$$

式中, $\text{Trans}(d_x, d_y, d_z)$ 表示基系中微分平移 d_x, d_y, d_z 的变换; $\text{Rot}(f, d\theta)$ 表示基系中绕矢量 f 的微分旋转 $d\theta$ 的变换。由式(3.124)可得 dT 的表达式:

$$d\mathbf{T} = (\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta) - \mathbf{I})\mathbf{T} \quad (3.125)$$

同样地,也可用于给定坐标系 $\mathbf{T}$ 的微分平移和旋转来表示微分变化:

$$\mathbf{T} + d\mathbf{T} = \mathbf{T} \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta)$$

式中, $\text{Trans}(d_x, d_y, d_z)$ 表示对于坐标系 $\mathbf{T}$ 的微分平移变换; $\text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta)$ 表示对坐标系 $\mathbf{T}$ 中绕矢量 $\mathbf{f}$ 的微分旋转 $d\theta$ 。这时有

$$d\mathbf{T} = \mathbf{T} (\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta) - \mathbf{I}) \quad (3.126)$$

式(3.125)和式(3.126)中有一共同的项 $\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta) - \mathbf{I}$ 。当微分运动对基系进行时,我们规定它为 $\mathbf{\Delta}$;而当运动对坐标系 $\{\mathbf{T}\}$ 进行时,记为 ${}^T\mathbf{\Delta}$ 。于是,当对基系进行微分变化时: $d\mathbf{T} = \mathbf{\Delta}\mathbf{T}$;而当对坐标系 $\{\mathbf{T}\}$ 进行微分变化时, $d\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\mathbf{\Delta}$ 。

表示微分平移的齐次变换为

$$\text{Trans}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这时, Trans 的变量是由微分变化 $d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$ 表示的微分矢量 $\mathbf{d}$ 。在第2章讨论通用旋转变换时,有下式:

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers}\theta + c\theta & f_y f_x \text{vers}\theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers}\theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers}\theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers}\theta + c\theta & f_z f_y \text{vers}\theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers}\theta - f_y s\theta & f_y f_z \text{vers}\theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers}\theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

见式(2.46)。对于微分变化 $d\theta$,其相应的正弦函数、余弦函数和正交函数为

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin\theta = d\theta, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos\theta = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \text{vers}\theta = 0$$

把它们代入式(2.46),可把微分旋转齐次变换表示为

$$\text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -f_z d\theta & f_y d\theta & 0 \\ f_z d\theta & 1 & -f_x d\theta & 0 \\ -f_y d\theta & f_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

代入 $\mathbf{\Delta} = \text{Trans}(d_x, d_y, d_z) \text{Rot}(\mathbf{f}, d\theta) - \mathbf{I}$,可得

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -f_z d\theta & f_y d\theta & 0 \\ f_z d\theta & 1 & -f_x d\theta & 0 \\ -f_y d\theta & f_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

化简得

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -f_z d\theta & f_y d\theta & d_x \\ f_z d\theta & 0 & -f_x d\theta & d_y \\ -f_y d\theta & f_x d\theta & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

绕矢量 $\mathbf{f}$ 的微分旋转 $d\theta$ 等价于分别绕三个轴 x, y 和 z 的微分旋转 δ_x, δ_y 和 δ_z ,即

$f_x d\theta = \delta_x, f_y d\theta = \delta_y, f_z d\theta = \delta_z$ 。代入式(3.80)可得

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

类似地可得 ${}^T\mathbf{\Delta}$ 的表达式为

$${}^T\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -{}^T\delta_z & {}^T\delta_y & {}^Td_x \\ {}^T\delta_z & 0 & -{}^T\delta_x & {}^Td_y \\ -{}^T\delta_y & {}^T\delta_x & 0 & {}^Td_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

于是,可把微分平移和旋转变换 $\mathbf{\Delta}$ 看作由微分平移矢量 $\mathbf{d}$ 和微分旋转矢量 $\boldsymbol{\delta}$ 构成,分别为: $\mathbf{d} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}, \boldsymbol{\delta} = \delta_x \mathbf{i} + \delta_y \mathbf{j} + \delta_z \mathbf{k}$ 。我们用列矢量 $\mathbf{D}$ 来包含上述两矢量,并将其称为刚体或坐标系的“微分运动矢量”:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

同理,有下列各式:

$$\begin{aligned} {}^Td &= {}^Td_x \mathbf{i} + {}^Td_y \mathbf{j} + {}^Td_z \mathbf{k} \\ {}^T\boldsymbol{\delta} &= {}^T\delta_x \mathbf{i} + {}^T\delta_y \mathbf{j} + {}^T\delta_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

$${}^T\mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}^Td_x \\ {}^Td_y \\ {}^Td_z \\ {}^T\delta_x \\ {}^T\delta_y \\ {}^T\delta_z \end{bmatrix}, \quad \text{或} \quad {}^T\mathbf{D} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{d} \\ {}^T\boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

例 3.2 已知坐标系 $\{\mathbf{A}\}$ 及其对基系的微分平移与微分旋转为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\delta} = 0\mathbf{i} + 0.1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

试求微分变换 $d\mathbf{A}$ 。

解：首先据式(3.128)可得

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再按照 $dT = \Delta T$, 有: $dA = \Delta A$, 即

$$dA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

坐标系 $\{A\}$ 的这一微分变化如图 3.18 所示。

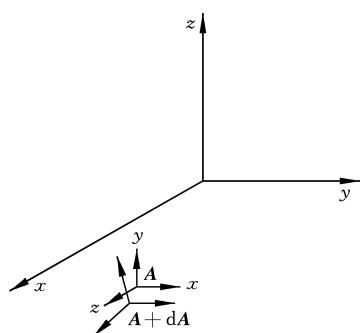


图 3.18 坐标系 $\{A\}$ 的微分变化

2. 微分运动的等价变换

要求得机器人的雅可比矩阵(Jacobian matrix),就需要把一个坐标系内的位置和姿态的小变化变换为另一坐标系内的等效表达式。

据 $dT = \Delta T$ 和 $dT = T^T \Delta$, 当两坐标系等价时, $\Delta T = T^T \Delta$, 变换后得

$$T^{-1} \Delta T = {}^T \Delta \quad (3.132)$$

由式 (3.128) 有:

$$\Delta T = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_z & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta T = \begin{bmatrix} -\delta_z n_y + \delta_y n_z & -\delta_z o_y + \delta_y o_z & -\delta_z a_y + \delta_y a_z & -\delta_z p_y + \delta_y p_z + d_x \\ \delta_z n_x + \delta_x n_z & \delta_z o_x - \delta_x o_z & \delta_z a_x - \delta_x a_z & \delta_z p_x - \delta_x p_z + d_y \\ -\delta_y n_x + \delta_x n_y & -\delta_y o_x + \delta_x o_y & -\delta_y a_x + \delta_x a_y & -\delta_y p_x + \delta_x p_y + d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

它与下式等价:

$$\Delta T = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d})_x \\ (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d})_y \\ (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n})_z & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o})_z & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a})_z & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d})_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

用 T^{-1} 左乘上式得

$$T^{-1}\Delta T = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n} \\ o_x & o_y & o_z & -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{o} \\ a_x & a_y & a_z & -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d})_x \\ (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d})_y \\ (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n})_z & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o})_z & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a})_z & (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d})_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\Delta T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n}) & \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o}) & \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a}) & \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{o} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n}) & \boldsymbol{o} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o}) & \boldsymbol{o} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a}) & \boldsymbol{o} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}) \\ \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{n}) & \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{o}) & \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{a}) & \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{d}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

应用三矢量相乘的两个性质 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ 和 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = 0$, 并据式(3.132)可把上式变换为

$${}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{o}) & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}) & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{o}) & 0 & -\boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{a}) & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{o}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}) & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{a}) & 0 & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化简得

$${}^T\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{a} & \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{o} & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{a} & 0 & -\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n} & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{o}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{o} \\ -\boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{o} & \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n} & 0 & \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

由于 ${}^T\Delta$ 已被式(3.129)所定义, 所以令式(3.129)与式(3.134)各元分别相等, 可以求得

$$\begin{cases} {}^T d_x = \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{n} \\ {}^T d_y = \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{o}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{o} \\ {}^T d_z = \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{a} \end{cases} \quad (3.135)$$

$${}^T \delta_x = \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{n}, \quad {}^T \delta_y = \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{o}, \quad {}^T \delta_z = \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{a} \quad (3.136)$$

式中, $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 分别为微分坐标变换 $\{\boldsymbol{T}\}$ 的列矢量。从上列两式可得微分运动 ${}^T\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的关系如下:

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n})_x & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n})_y & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{o})_x & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{o})_y & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})_x & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})_y & (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

应用三矢量相乘的性质 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, 我们可进一步将式(3.135)和式(3.136)

写为

$$\begin{cases} {}^T d_x = \mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}) \\ {}^T d_y = \mathbf{o} \cdot ((\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}) \\ {}^T d_z = \mathbf{a} \cdot ((\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p}) + \mathbf{d}) \end{cases} \quad (3.138)$$

$$\begin{cases} {}^T \delta_x = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta} \\ {}^T \delta_y = \mathbf{o} \cdot \boldsymbol{\delta} \\ {}^T \delta_z = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\delta} \end{cases} \quad (3.139)$$

应用上述两式,能够十分方便地把对基坐标系的微分变化变换为对坐标系 $\{\mathbf{T}\}$ 的微分变化。式(3.127)可简写为

$$\begin{bmatrix} {}^T d \\ {}^T \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{S}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

式中, $\mathbf{R}$ 是旋转矩阵,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

对于任何三维矢量 $\mathbf{p} = [p_x, p_y, p_z]^T$, 其反对称矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{p})$ 定义为

$$\mathbf{S}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_x & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

例 3.3 已知坐标系 $\{\mathbf{A}\}$ 及其对基坐标系的微分平移 $\mathbf{d}$ 和微分旋转 $\boldsymbol{\delta}$,同例 3.2。试求对坐标系 $\{\mathbf{A}\}$ 的等价微分平移和微分旋转。

解: 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{o} &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \mathbf{p} &= 10\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned}$$

以及

$$\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$ 。加上 $\mathbf{d}$ 后有: $\boldsymbol{\delta} \times \mathbf{p} + \mathbf{d} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}$ 。

又据式(3.138)和式(3.139)可求得等价微分平移和微分旋转为

$${}^A \mathbf{d} = 0\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j} + 1\mathbf{k}, \quad {}^A \boldsymbol{\delta} = 0.1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

根据式 $d\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Delta}$ 计算 $d\mathbf{A} = \mathbf{A}^A \boldsymbol{\Delta}$, 以检验所得微分运动是否正确。据式(3.129)有:

$${}^A \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$d\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所得结果与例 3.2 一致。可见所求得的对 $\{\mathbf{A}\}$ 的微分平移和微分旋转是正确无误的。

3. 变换式中的微分关系

式(3.137)至式(3.139)可用于变换任何两个坐标系间的微分运动。其中,由式(3.138)和式(3.139),可根据微分坐标变换 $\mathbf{T}$ 和微分旋转变换 Δ 决定 ${}^T\Delta$ 的各元。如果要从 ${}^T\Delta$ 的各微分矢量来求微分矢量 Δ ,可从式(3.132)左乘 $\mathbf{T}$ 和右乘 $\mathbf{T}^{-1}$,以求得下列变换表达式:

$$\Delta = \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{T}^{-1}$$

或者变换为

$$\Delta = (\mathbf{T}^{-1})^{-1} {}^T\Delta (\mathbf{T}^{-1}) \quad (3.143)$$

设有两个坐标系 $\{\mathbf{A}\}$ 和 $\{\mathbf{B}\}$,后者相对于 $\{\mathbf{A}\}$ 而定义。那么,既可以用坐标系 $\{\mathbf{A}\}$,也可以用坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 来表示微分运动。图 3.19 的微分变换图表示出了这一情况。

由图 3.19 可知, $\Delta \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B}^B \Delta$, 对 Δ 求解得

$$\Delta = \mathbf{A} \mathbf{B}^B \Delta \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

或变换为

$$\Delta = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^{-1})^{-1} {}^B\Delta (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) \quad (3.144)$$

式(3.144)表示坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 内的微分运动与基坐标系内的微分运动的关系,它具有式(3.143)的一般形式;而 $(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1})$ 则对应式(3.143)中的 $\mathbf{T}$ 。

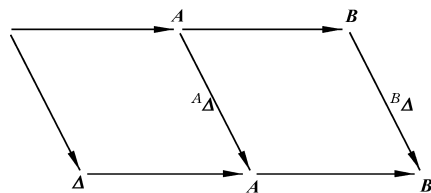


图 3.19 两坐标系间的微分变换图

同样地,据图 3.19 还可得: ${}^A\Delta \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{B}^B \Delta$, 或 ${}^A\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}^B \Delta$ 。对 ${}^A\Delta$ 求解得 ${}^A\Delta = \mathbf{B}^B \Delta \mathbf{B}^{-1}$, 即

$${}^A\Delta = (\mathbf{B}^{-1})^{-1} {}^B\Delta (\mathbf{B}^{-1}) \quad (3.145)$$

式(3.145)表示坐标系 $\{\mathbf{A}\}$ 内的微分运动与坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 内微分运动的关系。其中, $\mathbf{B}^{-1}$ 对应式(3.138)和式(3.139)中的 $\mathbf{T}$ 。在此, $\mathbf{T}$ 已不是坐标系矩阵,而是微分坐标变换矩阵。它可以从图 3.19 直接求得,即从已知的微分变化变换的箭头起,回溯到待求的等价微分变化止所经过的路径。对于上述第一种情况,从 ${}^B\Delta$ 之箭头至 Δ 之箭头间所经路径即为 $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$;而对于第二种情况,从 ${}^B\Delta \sim {}^A\Delta$, 所经路径为 $\mathbf{B}^{-1}$ 。

例 3.4 有一摄像机,装设在机器人的连杆 5 上。这一连接由下式确定:

$${}^r\mathbf{CAM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

机器人的最后一个连杆所处当前位置由下式描述：

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

被观察的目标物体为 ${}^{\text{CAM}}\mathbf{O}$ 。要把机器人的末端引向目标物体, 需要知道坐标系 $\{\text{CAM}\}$ 内的微分变化为: ${}^{\text{CAM}}\mathbf{d} = -1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, ${}^{\text{CAM}}\boldsymbol{\delta} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0.1\mathbf{k}$, 试求坐标系 T_6 内所需要的微分变化。

解: 上述情况可由图 3.20(a)及下列方程描述

$$\mathbf{T}_5 \mathbf{A}_6 \mathbf{E} \mathbf{X} = \mathbf{T}_5 \mathbf{CAM} \mathbf{O}$$

式中, $\mathbf{T}_5$ 描述连杆 5 与基坐标系的关系; $\mathbf{A}_6$ 以连杆 5 的坐标系描述连杆 6; $\mathbf{E}$ 为一描述物体对末端的未知变换; $\mathbf{O}$ 用摄像机坐标系描述物体。

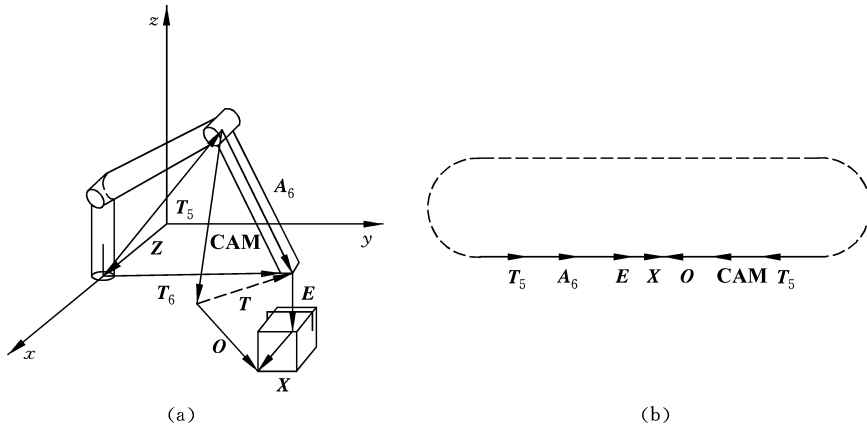


图 3.20 例 3.5 的姿态和微分变换图

变换图见图 3.20(b)。从图可得相对 ${}^{T_6}\Delta \sim {}^{\text{CAM}}\Delta$ 的微分坐标变换 $\mathbf{T}$ 为

$$\mathbf{T} = \mathbf{CAM}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}_5 \mathbf{A}_6 = \mathbf{CAM}^{-1} \mathbf{A}_6$$

因为

$$\mathbf{CAM}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是可得此微分坐标变换：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又因为

$$\delta \times p = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 0i + 0.2j + 0k$$

最后,据式(3.135)和式(3.136)可得坐标系 T_6 内的微分变化如下:

$${}^{T_6}d = -0.2i + 0j + 1k$$

$${}^{T_6}\delta = 0i + 0.1j + 0k$$

3.4.2 雅可比矩阵的定义与求解

上文分析了机器人的微分运动。在此基础上,我们继续研究机器人操作空间速度与关节空间速度间的线性映射关系,即雅可比矩阵。

1. 雅可比矩阵的定义

机器人的操作速度与关节速度的线性变换定义为机器人的雅可比矩阵,可视它为从关节空间向操作空间运动速度的传动比。

令机器人的运动方程

$$x = x(q) \quad (3.146)$$

代表操作空间 x 与关节空间 q 之间的位移关系。将式(3.146)两边对时间 t 求导,即得出 q 与 x 之间的微分关系

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (3.147)$$

式中, $\dot{x}$ 称为末端在操作空间的广义速度,简称“操作速度”; $\dot{q}$ 为关节速度; $J(q)$ 是 $6 \times n$ 阶的偏导数矩阵,称为“机器人的雅可比矩阵”。它的第 i 行第 j 列元素为

$$J_{ij}(q) = \frac{\partial x_i(q)}{\partial q_j}, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.148)$$

从式(3.137)可以看出,对于给定的 $q \in R^n$,雅可比 $J(q)$ 是从关节空间速度 $\dot{q}$ 向操作空间速度 $\dot{x}$ 映射的线性变换。

刚体或坐标系的广义速度 $\dot{x}$ 是由线速度 V 和角速度 ω 组成的 6 维列矢量:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} V \\ \omega \end{bmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

据式(3.147)可得

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (3.150)$$

由式(3.149)有:

$$D = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \dot{x} \Delta t$$

把式(3.150)代入上式可得

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} J(q)\dot{q} \Delta t$$

即

$$D = J(q)dq \quad (3.151)$$

含有 n 个关节的机器人,其雅可比 $J(q)$ 是 $6 \times n$ 阶矩阵,前 3 行代表夹手线速度 v 的

传递比,后 3 行代表夹手的角速度 ω 的传递比,而每一列代表相应的关节速度 $\dot{q}_i$ 对于夹手线速度和角速度的传递比。这样,可把雅可比 $J(q)$ 分块为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{l1} & J_{l2} & \cdots & J_{ln} \\ J_{a1} & J_{a2} & \cdots & J_{an} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

因此,可把夹手的线速度 $\mathbf{v}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 表示为各关节速度 $\dot{\mathbf{q}}$ 的线性函数:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = J_{l1}\dot{q}_1 + J_{l2}\dot{q}_2 + \cdots + J_{ln}\dot{q}_n \\ \boldsymbol{\omega} = J_{a1}\dot{q}_1 + J_{a2}\dot{q}_2 + \cdots + J_{an}\dot{q}_n \end{cases} \quad (3.153)$$

式中, J_{li} 和 J_{ai} 分别表示关节 i 的单位关节速度引起夹手的线速度和角速度。

2. 雅可比矩阵的求法

由前文讨论所得的式(3.130)、式(3.131)、式(3.137)、式(3.140)、式(3.150)和式(3.151)等,是计算雅可比矩阵的基本公式,可用这些公式进行计算。下面介绍两种直接构造雅可比矩阵的方法。

(1) 矢量积法

求解机器人雅可比矩阵的矢量积方法是建立在运动坐标系概念基础上的,由 Whitney 提出。图 3.21 表示关节速度的传递情况,末端夹手的线速度 $\mathbf{v}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与关节速度 $\dot{\mathbf{q}}_i$ 有关。

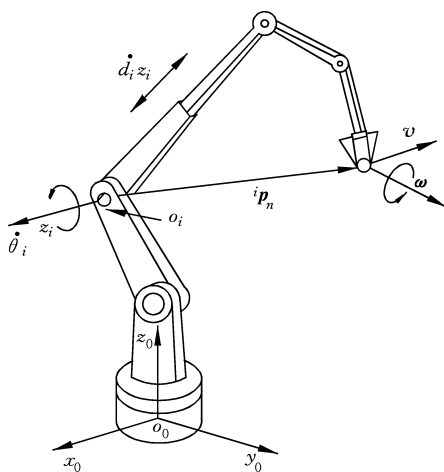


图 3.21 关节速度的传递

对于平动关节 i , 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, \quad J_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

对于转动关节 i , 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i \mathbf{p}_n^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \dot{q}_i, \quad J_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i \mathbf{p}_n^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times ({}^0 \mathbf{R}^i \mathbf{p}_n) \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

式中, ${}^i p_n^0$ 表示夹手坐标原点相对坐标系 $\{i\}$ 的位置矢量在基坐标系 $\{o\}$ 中的表示, 即

$${}^i p_n^0 = {}^0 R^i p_n \quad (3.156)$$

而 z_i 是坐标系 $\{i\}$ 的 z 轴单位向量在基坐标系 $\{o\}$ 中的表示。

(2) 微分变换法

对于转动关节 i , 连杆 i 相对连杆 $i-1$ 绕坐标系 $\{i\}$ 的 z_i 轴所作微分转动 $d\theta_i$, 其微分运动矢量为

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\theta_i \quad (3.157)$$

利用式(3.138)得出夹手相应的微分运动矢量为

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p \times n)_z \\ (p \times o)_z \\ (p \times a)_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} d\theta_i \quad (3.158)$$

对于平动关节, 连杆 i 沿 z_i 轴相对于连杆 $i-1$ 作微分移动 dd_i , 其微分运动矢量为

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dd_i, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

而夹手的微分运动矢量为

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dd_i \quad (3.160)$$

于是, 可得雅可比矩阵 $J(q)$ 的第 i 列如下:

对于转动关节 i 有

$${}^T J_{li} = \begin{bmatrix} (p \times n)_z \\ (p \times o)_z \\ (p \times a)_z \end{bmatrix}, \quad {}^T J_{ai} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

对于平动关节 i 有

$${}^T J_{li} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix}, \quad {}^T J_{ai} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

式中, n, o, a 和 p 是 ${}^i_n T$ 的 4 个列向量。

上述求雅可比矩阵 ${}^T\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的方法是构造性的,只要知道各连杆变换 ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$,就可自动生成雅可比矩阵,而不需求解方程等步骤。其自动生成的步骤如下:

① 计算各连杆变换 ${}^0\mathbf{T}_1, {}^1\mathbf{T}_2, \dots, {}^{n-1}\mathbf{T}_n$ 。

② 计算各连杆至末端连杆的变换(见图 3.22, 参阅图 3.7):

$${}^{n-1}_n\mathbf{T} = {}^{n-1}_n\mathbf{T}, {}^{n-2}_n\mathbf{T} = {}^{n-2}_{n-1}\mathbf{T} {}^{n-1}_n\mathbf{T}, \dots,$$

$${}^{i-1}_n\mathbf{T} = {}^{i-1}_i\mathbf{T} {}^i_n\mathbf{T}, \dots, {}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_n\mathbf{T}$$

③ 计算 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的各列元素,第 i 列 ${}^T\mathbf{J}_i$ 由 ${}^i_n\mathbf{T}$ 决定。

根据公式(3.159)和式(3.160)计算 ${}^T\mathbf{J}_{li}$ 和 ${}^T\mathbf{J}_{ai}$ 。 ${}^T\mathbf{J}_i$ 和 ${}^i_n\mathbf{T}$ 之间的关系如图 3.22 所示。

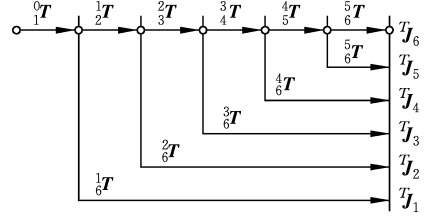


图 3.22 ${}^T\mathbf{J}_i$ 和 ${}^i_n\mathbf{T}$ 之间的关系

3.4.3 机器人雅可比矩阵计算举例

下面仍然以 PUMA 560 型机器人为例,说明计算具体机器人微分运动和雅可比矩阵的方法。

PUMA 560 的 6 个关节都是转动关节,其雅可比矩阵含有 6 列。根据式(3.161)可以计算各列元素。现分别用两种方法计算。

(1) 微分变换法求 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$

${}^T\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 第 1 列 ${}^T\mathbf{J}_1(\mathbf{q})$ 对应的变换矩阵为 ${}^1_6\mathbf{T}$,式(3.98)列出了 ${}^1_6\mathbf{T}$ 的各元素,由式(3.161)得

$${}^T\mathbf{J}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^TJ_{1x} \\ {}^TJ_{1y} \\ {}^TJ_{1z} \\ -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6 \\ s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6 \\ s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

式中,

$${}^TJ_{1x} = -d_2[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(s_4c_5c_6 + c_4s_6),$$

$${}^TJ_{1y} = -d_2[-c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(s_4c_5s_6 - c_4c_6),$$

$${}^TJ_{1z} = d_2(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + (a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23})(s_4s_5)$$

同理,利用变换矩阵 ${}^2_6\mathbf{T}$ 得出 ${}^T\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的第 2 列:

$${}^T\mathbf{J}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^TJ_{2x} \\ {}^TJ_{2y} \\ {}^TJ_{2z} \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 \\ s_4c_5s_6 - c_4c_6 \\ s_4s_5 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

式中,

$${}^TJ_{2x} = a_3s_5c_6 - d_4(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + a_2[s_3(c_4c_5c_6 - s_4s_6) + c_3s_5c_6]$$

$${}^T J_{2y} = -a_3 s_5 s_6 - d_4 (-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + a_2 [s_3 (-c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6) + c_3 s_5 s_6]$$

$${}^T J_{2z} = a_3 c_6 + d_4 c_4 s_5 + a_2 (-s_3 c_4 s_5 + c_3 c_6)$$

同样可得,

$${}^T J_3(q) = \begin{bmatrix} -d_4(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + a_3(s_5 c_6) \\ d_4(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - a_3(s_5 s_6) \\ d_4 c_4 s_5 + a_3 c_6 \\ -s_4 c_5 c_6 - c_4 s_6 \\ s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6 \\ s_4 s_5 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$${}^T J_4(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_5 c_6 \\ -s_5 s_6 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$${}^T J_5(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -s_6 \\ -c_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

$${}^T J_6(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

(2) 矢量积法求 $J(q)$

PUMA 560 的 6 个关节都是转动关节, 因而其雅可比矩阵具有下列形式:

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_1 \times^1 p_6^0 & z_2 \times^2 p_6^0 & \cdots & z_6 \times^6 p_6^0 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_6 \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

由图 3.14 及所列出的各连杆变换矩阵 ${}^0 T_1, {}^1 T_2, \dots, {}^5 T_6$ (参见 3.3.1 节), 可以计算出各中间项, 然后求出 $J(q)$ 的各列, 即 $J_1(q), J_2(q), \dots, J_6(q)$, 从而求得 $J(q)$ 。具体计算过程在此从略。

3.5 本章小结

本章研究的机器人的运动学涉及机器人运动方程的表示、求解与实例, 以及机器人的雅可比矩阵分析和计算等。这些内容是研究机器人动力学和控制的重要基础。

3.1 节研究了机器人运动方程的表示,通过齐次变换矩阵描述机器人末端执行器所在的坐标系相对于基坐标系的位置关系。在第 2 章坐标系布局和连杆参数定义的基础上,推导出相邻连杆之间坐标系变换的一般形式,然后将这些独立的变换联系起来求出连杆 n 相对于连杆 0 的位置和姿态。用变换矩阵表示机械手的运动方向,用转角(欧拉角)变换序列表示运动姿态,或用横滚、俯仰和偏转角表示机械手的运动姿态。一旦机械手的运动姿态由某个姿态变换矩阵确定之后,它在基坐标系中的位置就能够由左乘一个对应于矢量 $\mathbf{p}$ 的平移变换确定。这一平移变换可由笛卡儿坐标、柱面坐标或球面坐标表示。为了进一步讨论机器人运动方程,还给出并分析了广义连杆(包括转动关节连杆和棱柱关节连杆)的变换矩阵,得到了通用连杆变换矩阵和机械手的有向变换图。

3.2 节研究了机器人运动方程的求解,首先分析了逆向运动学的可解性、多解性,继而以一个平面三连杆机器人为例,介绍了逆运动学的两种主要求解方法:解析解法和数值解法,其中解析解法包括代数解法、几何解法、欧拉变换解法、滚-仰-偏变换解法和球面变换解法,得出各关节位置的求解公式;数值解法涉及循环坐标下降解法、前向后向到达解法和遗传算法优化解法,求取各关节的方位。

3.3 节举例介绍了机器人运动方程的表示(分析)和求解(综合)。根据 3.1 节和 3.2 节得到的方程式,结合 PUMA 560 机器人的实际连杆参数,求得各连杆的变换矩阵和机械手的变换矩阵,即机器人的运动方程式。在求解机器人的运动方程时,根据机器人末端执行器的位姿和机器人的连杆参数,逐一求得其全部关节变量,完成 PUMA 560 机器人运动方程的求解。

3.4 节研究了机器人位置和姿态的微小变化问题。首先讨论了机器人的微分运动(包括微分平移运动和微分旋转运动),得到刚体(或坐标系)的微分运动矢量 $\mathbf{D}$ 和 ${}^T\mathbf{D}$ 。接着讨论了机器人微分运动的等价变换问题,为机器人雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 的求导打下基础。此外,还分析了等价变换式中的微分关系。3.4 节还给出 3 个例题,有助于对微分运动及其等价变换的理解。在上述分析研究的基础上,研究了机器人操作空间速度与关节空间速度间的线性映射问题,即雅可比矩阵问题。这部分研究涉及雅可比矩阵的定义和求解方法,并以 PUMA 560 机器人为例,说明具体机器人的微分运动和雅可比矩阵的求导方法。

习 题 3

3.1 图 3.23 和表 3.3 表示 PUMA 560 的某些机构参数和指定坐标轴。今另有一台工业机器人,除关节 3 为棱柱型关节外,其他关节情况同 PUMA 560。设关节 3 沿着 x_1 的方向滑动,其位移为 d_3 。可提出任何必要的附加假设。试求其运动方程式。

表 3.3 PUMA 560 的连杆参数

连杆	α	a	d	θ
1	0°	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0°	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

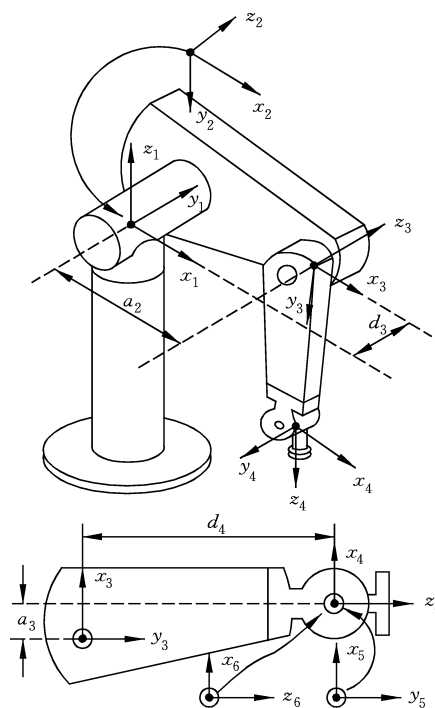


图 3.23 PUMA 560 的结构参数与坐标系配置

3.2 图 3.24 给出了 3 自由度机器人的机构。轴 1 与轴 2 垂直。试求其运动方程式。

3.3 如图 3.25 所示的 3 自由度机器人,其关节 1 与关节 2 相交,而关节 2 与关节 3 平行。图中所有关节均处于零位。各关节转角的正向均由箭头示出。指定本机器人各连杆的坐标系,然后求各变换矩阵 ${}^0_1T, {}^1_2T$ 和 2_3T 。

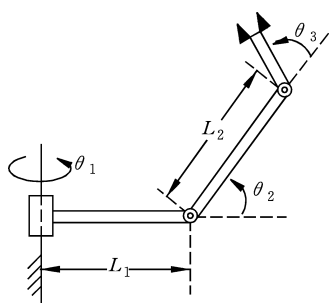


图 3.24 三连杆非平面机器人

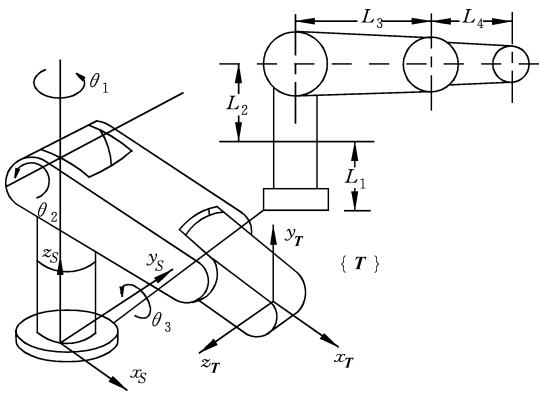


图 3.25 三连杆机器人的两个视图

3.4 图 3.26 和表 3.4 表示 PUMA 250 机器人的几何结构和连杆参数。

- (1) 求各连杆的变换矩阵。
- (2) 求末端执行器的变换矩阵。

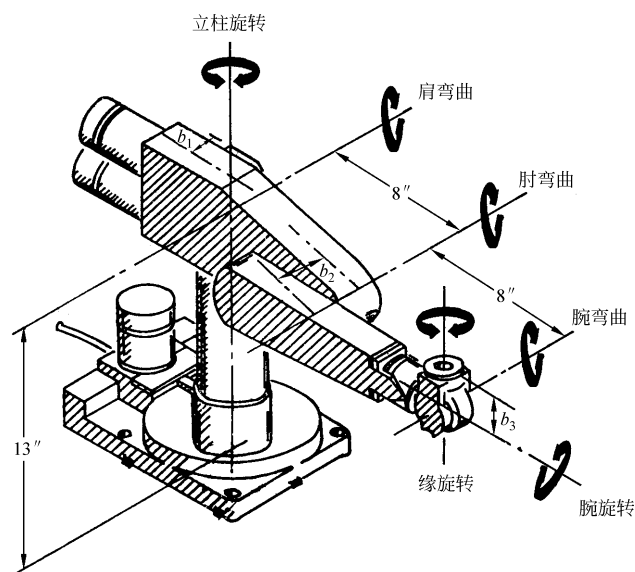


图 3.26 PUMA 250 工业机器人结构

表 3.4 PUMA 250 的连杆参数

连杆	关节变量	θ 变化范围	α	a	d
1	θ_1	315°	90°	0	0
2	θ_2	320°	0°	8	$b_1 + b_2$
3	θ_3	285°	90°	0	0
4	θ_4	240°	-90°	0	8
5	θ_5	535°	-90°	0	0
6	θ_6	575°	0°	0	b_3

3.5 如图 3.27 所示的机器人视觉系统的坐标配置。令 $\{\text{BASE}\}$ 表示机器人机座坐标系, 简记为 $\{B_1\}$; $\{\text{BOX}\}$ 表示被移动箱子的坐标系, 简记为 $\{B_2\}$; $\{\text{TABLE}\}$ 表示工作台的坐标系, 简记为 $\{T\}$; $\{\text{GRIP}\}$ 表示夹手的坐标系, 简记为 $\{G\}$; $\{\text{CAM}\}$ 表示摄像机的坐标系, 简记为 $\{C\}$ 。

已知下列变换:

$$\begin{aligned}
 {}^C_T \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^{B_2}_C \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^G_C \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & {}^{B_1}_T \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(1) 画出有向变换图。

3.7 试求 PUMA 250 各关节变量的解 $\theta_i, i=1,2,\dots,6$ 。

3.8 已知 $\mathbf{T}=\text{Trans}(5,10,0)\text{Rot}(x,-90^\circ)\text{Rot}(z,-90^\circ)$

$$\mathbf{\Delta}=\text{Trans}(0,1,0)\text{Rot}(r,0.1,\text{rad})-\mathbf{I}$$

式中, $\mathbf{r}=[1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1]^\text{T}$

(1) 用 4×4 矩阵表示 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{\Delta}$ 。

(2) 据下式确定 ${}^T\mathbf{\Delta}$ 。

$${}^T\mathbf{\Delta}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{\Delta}\mathbf{T}$$

式中, $\mathbf{T}^{-1}$ 可由式(2.35)和式(2.36)计算。

(3) 据方程式(3.125)计算 ${}^T\mathbf{d}$ 和 ${}^T\boldsymbol{\delta}$ 。

3.9 已知坐标系 $\{\mathbf{C}\}$ 对基坐标系的变换为

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而且对于基坐标系的微分平移分量分别为沿 x 轴移动 0.5, 沿 y 轴移动为 0, 沿 z 轴移动 1; 微分旋转分量分别为 0.1, 0.2 和 0。

(1) 求相应的微分变换。

(2) 求对应于坐标系 $\{\mathbf{C}\}$ 的等效微分平移与旋转。

3.10 已知关节坐标系的微分变化引起基坐标系的变化如下:

$$d_x=1.0, \quad d_y=0.5, \quad \delta_x=0.1(\text{绕 } x \text{ 轴旋转弧度数})$$

设 $\sin\delta_x=0.1, \cos\delta_x=1.0$ 。如果机器人原来处于

$$\mathbf{T}_6=\begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 0.6 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ -0.6 & 0 & -0.8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

那么 $\mathbf{T}_6$ 的新值为何?

3.11 试求如图 3.24 所示的 3 自由度机器人的雅可比矩阵, 所用坐标系位于夹手末端上, 其姿态与第 3 个关节的姿态一样。

3.12 已知

$${}^A\mathbf{T}_B=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 0.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 5.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果在坐标系 $\{\mathbf{A}\}$ 原点的速度矢量为

$${}^A\mathbf{u}=[0, 2, -3, 1.414, 1.414, 0]^\text{T}$$

试求参考点在坐标系 $\{\mathbf{B}\}$ 原点的 6×1 速度矢量。

第 4 章 机器人动力学

操作机器人是一种主动机械装置,原则上它的每个自由度都可以单独传动。从控制学的观点来看,机械手系统代表冗余的、多变量的和本质非线性的自动控制系统,是个复杂的动力学耦合系统。每个控制任务本身就是一个动力学任务。因此,研究机器人机械手的动力学问题,就是为了进一步讨论控制问题。

分析机器人操作的动态数学模型,主要采用下列两种理论:

- (1) 动力学基本理论,包括牛顿-欧拉方程(Newton-Euler equations)。
- (2) 拉格朗日力学,特别是二阶拉格朗日方程(Lagrange's equations)。

此外,还有应用高斯定理(Gauss'law)和阿佩尔方程(Appel equation)以及旋量对偶数法和凯恩法(Kane method)等来分析动力学问题的。

第一种理论即力的动态平衡法。当用此法时,需从运动学出发求得加速度,并消去各内作用力。对于较复杂的系统,此种分析方法十分麻烦。因此,本章只讨论一些比较简单的例子。第二种理论即拉格朗日功能平衡法,它只需要速度而不必求内作用力。因此,这是一种直截了当的方法。在本书中,我们主要采用这一方法来分析和求解机械手的动力学问题。我们特别感兴趣的是求得动力学问题的符号解答,因为它有助于对机器人控制问题的深入理解。

研究动力学有两个相反的问题:其一是已知机械手各关节的作用力或力矩,求各关节的位移、速度和加速度,求得运动轨迹。其二是已知机械手的运动轨迹,即各关节的位移、速度和加速度,求各关节所需要的驱动力或力矩。称前者为“动力学正问题”,称后者为“动力学逆问题”。一般的操作机器人的动态方程由 6 个非线性微分联立方程表示。实际上,除了一些比较简单的情况外,这些方程式是不可能求得一般解答的。我们将以矩阵形式求得动态方程,并简化它们,以获得控制所需要的信息。在实际控制时,往往需要对动态方程做出某些假设,进行简化处理。

机器人的动态特性是本章要讨论的另一个问题,包括精度、重复能力、稳定性和空间分辨率等。这些特性是由工具及其功能、机械手几何结构、单独点伺服传动的精度以及执行运动运算的计算机程序的质量决定的。

4.1 刚体的动力学方程

拉格朗日函数 L 被定义为系统的动能 K 和位能 P 之差,即

$$L = K - P \quad (4.1)$$

其中, K 和 P 可以用任何方便的坐标系来表示。

系统动力学方程式,即拉格朗日方程如下:

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

式中, q_i 为表示动能和位能的坐标, $\dot{q}_i$ 为相应的速度, 而 F_i 为作用在第 i 个坐标上的力或力矩。 F_i 是力或力矩, 是由 q_i 为直线坐标或角坐标决定的。这些力、力矩和坐标被称为“广义力”、“广义力矩”和“广义坐标”, n 为连杆数目。

4.1.1 刚体的动能与位能

在理论力学或物理学力学部分, 曾对如图 4.1 所示的一般物体平动时所具有的动能和位能进行过计算, 如下:

$$K = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_0 \dot{x}_0^2$$

$$P = \frac{1}{2} k (x_1 - x_0)^2 - M_1 g x_1 - M_0 g x_0$$

$$D = \frac{1}{2} c (\dot{x}_1 - \dot{x}_0)^2$$

$$W = F x_1 - F x_0$$

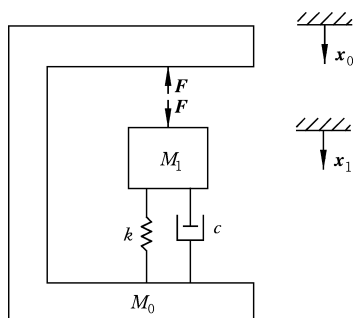


图 4.1 一般物体的动能与位能

式中, K, P, D 和 W 分别表示物体所具有的动能、位能, 所消耗的能量和外力所做的功; M_0 和 M_1 为支架和运动

物体的质量; x_0 和 x_1 为运动坐标; g 为重力加速度; k 为弹簧虎克系数; c 为摩擦系数; F 为外施作用力。

对于这一问题, 存在两种情况:

(1) $x=0, x_1$ 为广义坐标

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1}$$

其中, 左式第一项为动能随速度(或角速度)和时间的变化; 左式第二项为动能随位置(或角度)的变化; 左式第三项为能耗随速度变化; 左式第四项为位能随位置的变化。右式为实际外加力或力矩。代入相应各项的表达式, 并化简可得

$$\frac{d}{dt} (M_1 \dot{x}_1) - 0 + c_1 \dot{x}_1 + k x_1 - M_1 g = F$$

表示为一般形式为

$$M_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + d x_1 = F + M_1 g$$

即所求 $x_0=0$ 时的动力学方程式。其中, 左式三项分别表示物体的加速度、阻力和弹力, 而右式两项分别表示外加作用力和重力。

(2) $x_0=0, x_0$ 和 x_1 均为广义坐标, 这时有下式:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k(x_1 - x_0) - M_1 g = F \\ M_0 \ddot{x}_0 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) - k(x_1 - x_0) - M_0 g = -F \end{cases}$$

或用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix}$$

下面考虑二连杆机械手(图 4.2)的动能和位能。这种运动机构具有开式运动链,与复摆运动有许多相似之处。图中, m_1 和 m_2 为连杆 1 和连杆 2 的质量,且以连杆末端的点质量表示; d_1 和 d_2 分别为二连杆的长度, θ_1 和 θ_2 为广义坐标, g 为重力加速度。

先计算连杆 1 的动能 K_1 和位能 P_1 。因为

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, v_1 = d_1 \dot{\theta}_1, P_1 = m_1 g h_1, h_1 = -d_1 \cos \theta_1, \text{ 所以}$$

以有

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$P_1 = -m_1 g d_1 \cos \theta_1$$

再求连杆 2 的动能 K_2 和位能 P_2 。

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad P_2 = m_2 g y_2$$

式中,

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

$$x_2 = d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = -d_1 \cos \theta_1 - d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\dot{x}_2 = d_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

$$\dot{y}_2 = d_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)$$

于是可求得

$$v_2^2 = d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + 2d_1 d_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

以及

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$$

$$P_2 = -m_2 g d_1 \cos \theta_1 - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

这样,二连杆机械手系统的总动能和总位能分别为

$$K = K_1 + K_2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \quad (4.3)$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$= -(m_1 + m_2) g d_1 \cos \theta_1 - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.4)$$

4.1.2 拉格朗日方程和牛顿-欧拉方程

1. 拉格朗日功能平衡法

二连杆机械手系统的拉格朗日函数 L 可据式(4.1)、式(4.3)和式(4.4)求得

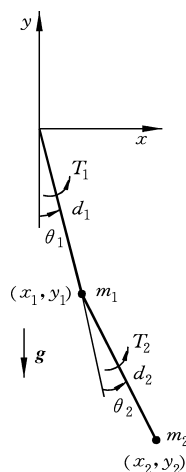


图 4.2 二连杆机器人手(1)

$$\begin{aligned}
L &= K - P \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + \\
&\quad m_2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2)gd_1\cos\theta_1 + m_2gd_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

对 L 求偏导数和导数:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -(m_1 + m_2)gd_1\sin\theta_1 - m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2d_1d_2\sin\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) - m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2\dot{\theta}_2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2\dot{\theta}_1 + m_2d_1d_2\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2d_2^2\dot{\theta}_1 + m_2d_2^2\dot{\theta}_2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2\dot{\theta}_1
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= [(m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + \\
&\quad (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 - 2m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2d_2^2\ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_1 - m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

把相应各导数和偏导数代入式(4.2),即可求得力矩 T_1 和 T_2 的动力学方程式:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\
&= [(m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2]\ddot{\theta}_1 + (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 - \\
&\quad 2m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 + \\
&\quad (m_1 + m_2)gd_1\sin\theta_1 + m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\
&= (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2\ddot{\theta}_2 + \\
&\quad m_2d_1d_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.7)
\end{aligned}$$

式(4.6)和式(4.7)的一般形式和矩阵形式如下:

$$T_1 = D_{11}\ddot{\theta}_1 + D_{12}\ddot{\theta}_2 + D_{111}\dot{\theta}_1^2 + D_{122}\dot{\theta}_2^2 + D_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{121}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_1 \quad (4.8)$$

$$T_2 = D_{21}\ddot{\theta}_1 + D_{22}\ddot{\theta}_2 + D_{211}\dot{\theta}_1^2 + D_{222}\dot{\theta}_2^2 + D_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + D_{221}\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 + D_2 \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

式中, D_{ii} 为关节 i 的有效惯量, 因为关节 i 的加速度 $\ddot{\theta}_i$ 将在关节 i 上产生一个等于 $D_{ii} \ddot{\theta}_i$ 的惯性力; D_{ij} 为关节 i 和 j 间耦合惯量, 因为关节 i 和 j 的加速度 $\ddot{\theta}_i$ 和 $\ddot{\theta}_j$ 将在关节 j 或 i 上分别产生一个等于 $D_{ij} \ddot{\theta}_i$ 或 $D_{ij} \ddot{\theta}_j$ 的惯性力; $D_{ijk} \dot{\theta}_1^2$ 项为由关节 j 的速度 $\dot{\theta}_j$ 在关节 i 上产生的向心力; $(D_{ijk} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + D_{ikj} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j)$ 项为由关节 j 和 k 的速度 $\dot{\theta}_j$ 和 $\dot{\theta}_k$ 引起的作用于关节 i 的科里奥利力(简称“科氏力”); D_i 表示关节 i 处的重力。

比较式(4.6)、式(4.7)与式(4.8)、式(4.9), 可得本系统的各系数如下。

有效惯量:

$$\begin{aligned} D_{11} &= (m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2\cos\theta_2 \\ D_{22} &= m_2d_2^2 \end{aligned}$$

耦合惯量:

$$D_{12} = m_2d_2^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2 = m_2(d_2^2 + d_1d_2\cos\theta_2)$$

向心加速度系数:

$$\begin{aligned} D_{111} &= 0 \\ D_{122} &= -m_2d_1d_2\sin\theta_2 \\ D_{211} &= m_2d_1d_2\sin\theta_2 \\ D_{222} &= 0 \end{aligned}$$

科氏加速度系数:

$$\begin{aligned} D_{112} &= D_{121} = -m_2d_1d_2\sin\theta_2 \\ D_{212} &= D_{221} = 0 \end{aligned}$$

重力项:

$$\begin{aligned} D_1 &= (m_1 + m_2)gd_1\sin\theta_1 + m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ D_2 &= m_2gd_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

对上例指定一些数字, 估计此二连杆机械手在静止和固定重力负荷下的 T_1 和 T_2 值。计算条件如下:

- (1) 关节 2 锁定, 维持恒速($\ddot{\theta}_2 = 0$), 即 $\dot{\theta}_2$ 为恒值;
- (2) 关节 2 是不受约束的, 即 $T_2 = 0$ 。

在条件(1)下, 式(4.8)和式(4.9)简化为: $T_1 = D_{11} \ddot{\theta}_1 = I_1 \ddot{\theta}_1$, $T_2 = D_{12} \ddot{\theta}_1$ 。在条件(2)下, $T_2 = D_{12} \ddot{\theta}_1 + D_{22} \ddot{\theta}_2 = 0$, $T_1 = D_{11} \ddot{\theta}_1 + D_{12} \ddot{\theta}_2$ 。解之得

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 &= -\frac{D_{12}}{D_{22}} \ddot{\theta}_1 \\ T_1 &= (D_{11} - \frac{D_{12}^2}{D_{22}}) \ddot{\theta}_1 = I_i \ddot{\theta}_1 \end{aligned}$$

取 $d_1 = d_2 = 1$, $m_1 = 2$, 计算 $m_2 = 1, 4$ 和 100 (分别表示机械手在空载、负载和在外层空间负载的 3 种不同情况; 对于外层空间负载, 由于失重而允许有大的负载) 3 个不同数值时的各系数值。表 4.1 给出了这些系数值及其与位置 θ_2 的关系。其中, 对于空载, $m_1 = m_2 = 1$; 对于地面满载, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$; 对于外空间负载, $m_1 = 2$, $m_2 = 100$ 。

表 4.1 二连杆机械手不同负荷下的系数值

负 载	θ_2	$\cos\theta_2$	D_{11}	D_{12}	D_{22}	I_1	I_f
地面空载	0°	1	6	2	1	6	2
	90°	0	4	1	1	4	3
	180°	-1	2	0	1	2	2
	270°	0	4	1	1	4	3
地面满载	0°	1	18	8	4	18	2
	90°	0	10	4	4	10	6
	180°	-1	2	0	4	2	2
	270°	0	10	4	4	10	6
外空间负载	0°	1	402	200	100	402	2
	90°	0	202	100	100	202	102
	180°	-1	2	0	100	2	2
	270°	0	202	100	100	202	102

表 4.1 中最右两列为关节 1 上的有效惯量。在空载下,当 θ_2 变化时,关节 1 的有效惯量值在 3 : 1(关节 2 锁定时)或 3 : 2(关节 2 自由时)范围内变动。由表 4.1 还可以看出,在地面负载下,关节 1 的有效惯量随 θ_2 在 9 : 1 范围内变化,此有效惯量值比空载时提高了 3 倍。在外层空间负载为 100 的情况下,有效惯量变化范围更大,可达 201 : 1。这些惯量的变化将对机械手的控制产生显著影响。

2. 牛顿-欧拉动态平衡法

为了与拉格朗日法进行比较,看看哪种方法比较简便,用牛顿-欧拉动态平衡法对上述同一个二连杆系统的动力学方程进行求解,其一般形式为

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

式中, W, K, D, P 和 q_i 等的含义与拉格朗日法一样; i 为连杆代号, n 为连杆数目。

质量 m_1 和 m_2 的位置矢量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ (图 4.3) 为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 + (d_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} + (d_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} \\ &= (d_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} + (d_1 \sin \theta_1) \mathbf{j} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + [d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{i} + [d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{j} \\ &= [d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{i} + [d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

速度矢量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = [-\dot{\theta}_1 d_1 \sin \theta_1] \mathbf{i} + [\dot{\theta}_1 d_1 \cos \theta_1] \mathbf{j} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = [-\dot{\theta}_1 d_1 \sin \theta_1 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{i} + \\ &\quad [\dot{\theta}_1 d_1 \cos \theta_1 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

再求速度的平方,计算结果得

$$\mathbf{v}_1^2 = d_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

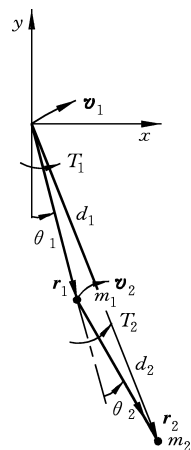


图 4.3 二连杆机械手(2)

$$\mathbf{v}_2^2 = d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + 2d_1 d_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2$$

于是可得系统动能:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + m_2 d_1 d_2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \end{aligned}$$

系统的位能随 $\mathbf{r}$ 的增大(位置下降)而减少。以坐标原点为参考点进行计算:

$$\begin{aligned} P &= -m_1 \mathbf{g} \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{r}_2 \\ &= -(m_1 + m_2) g d_1 \cos \theta_1 - m_2 g d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

系统能耗:

$$D = \frac{1}{2} C_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{\theta}_2^2$$

外力矩所做的功:

$$W = T_1 \theta_1 + T_2 \theta_2$$

至此,求得关于 K, P, D 和 W 的 4 个标量方程式。有了这 4 个方程式,就能够按式(4.11)求出系统的动力学方程式。为此,先求有关导数和偏导数。

当 $q_i = \theta_1$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) d_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 (\theta_1 + \theta_2) + m_2 d_1 d_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2) d_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 d_1 d_2 (2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - \\ &\quad m_2 d_1 d_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\partial K}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} &= C_1 \dot{\theta}_1 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta_1} &= (m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 + m_2 d_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{\partial W}{\partial \theta_1} &= T_1 \end{aligned}$$

把所求得的上列各导数代入式(4.11),经合并整理可得

$$\begin{aligned} T_1 &= [(m_1 + m_2) d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 + \\ &\quad [m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_2 + c_1 \dot{\theta}_1 - (2m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \\ &\quad (m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + [(m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 + m_2 d_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

当 $q_i = \theta_2$ 时,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + m_2 d_1 d_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 d_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 d_1 d_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - m_2 d_1 d_2 \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_2} = -m_2 d_2^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \sin \theta_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = C_2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta_2} = T_2$$

把上列各式代入式(4.11),并化简得

$$T_2 = (m_2 d_2^2 + m_2 d_1 d_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + c_2 \dot{\theta}_2 + m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (4.13)$$

也可以把式(4.12)和式(4.13)写成如式(4.8)和式(4.9)的一般形式。

比较式(4.6)、式(4.7)与式(4.12)、式(4.13)可见,如果不考虑摩擦损耗(取 $c_1 = c_2 = 0$),那么式(4.6)与式(4.12)完全一致,式(4.7)与式(4.13)完全一致。在式(4.6)和式(4.7)中,没有考虑摩擦所消耗的能量,而式(4.12)和式(4.13)则考虑了这一损耗。因此,所求的两种结果出现了这一差别。

4.2 机械手动力学方程的计算与简化

在分析简单的二连杆机械手系统的基础上,我们进而分析由一组 A 变换描述的任何机械手,求出其动力学方程。推导过程分 5 步进行:

- (1) 计算任一连杆上任一点的速度;
- (2) 计算各连杆的动能和机械手的总动能;
- (3) 计算各连杆的位能和机械手的总位能;
- (4) 建立机械手系统的拉格朗日函数;
- (5) 对拉格朗日函数求导,以得到动力学方程式。

图 4.4 表示一个四连杆机械手的结构。我们先从这个例子出发,求得此机械手某个连

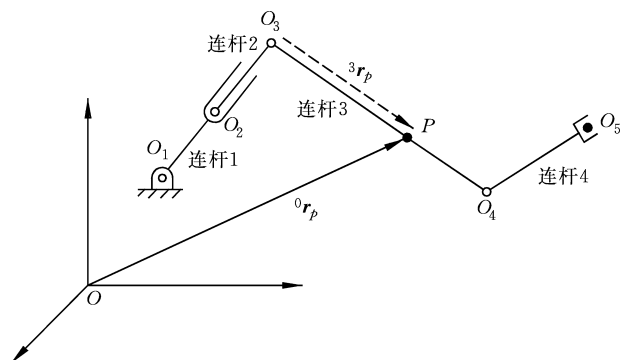


图 4.4 四连杆机械手

杆(例如连杆 3)上某一点(如点 P)的速度、质点和机械手的动能与位能、拉格朗日算子,再求系统的动力学方程式。然后,由特殊到一般,推导出适用于任何机械手的速度、动能、位能和动力学方程的一般表达式。

4.2.1 质点速度的计算

图 4.4 中连杆 3 上点 P 的位置为

$${}^0\mathbf{r}_p = \mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{r}_p$$

式中, ${}^0\mathbf{r}_p$ 为总(基)坐标系中的位置矢量; ${}^3\mathbf{r}_p$ 为局部(相对关节 O_3)坐标系中的位置矢量; $\mathbf{T}_3$ 为变换矩阵,包括旋转变换和平移变换。

对于任一连杆 i 上的一点,其位置为

$${}^0\mathbf{r} = \mathbf{T}_i {}^i\mathbf{r} \quad (4.14)$$

点 P 的速度为

$${}^0\mathbf{v}_p = \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{r}_p) = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_3 {}^3\mathbf{r}_p) = \dot{\mathbf{T}}_3 {}^3\mathbf{r}_p$$

式中, $\dot{\mathbf{T}}_3 = \frac{d\mathbf{T}_3}{dt} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \dot{q}_j$, 所以有

$${}^0\mathbf{v}_p = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) ({}^3\mathbf{r}_p)$$

对于连杆 i 上任一点的速度为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^i\mathbf{r} \quad (4.15)$$

P 点的加速度:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_p &= \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{v}_p) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{T}}_3 {}^3\mathbf{r}_p) = \ddot{\mathbf{T}}_3 {}^3\mathbf{r}_p = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) ({}^3\mathbf{r}_p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \dot{q}_j \right) ({}^3\mathbf{r}_p) + \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{T}_3}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j \right) ({}^3\mathbf{r}_p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right) ({}^3\mathbf{r}_p) + \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{T}_3}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j \right) ({}^3\mathbf{r}_p) \end{aligned}$$

速度的平方:

$$\begin{aligned} ({}^0\mathbf{v}_p)^2 &= ({}^0\mathbf{v}_p) \cdot ({}^0\mathbf{v}_p) = \text{Trace}[({}^0\mathbf{v}_p) \cdot ({}^0\mathbf{v}_p)^T] \\ &= \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \dot{q}_j ({}^3\mathbf{r}_p) \cdot \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) ({}^3\mathbf{r}_p)^T \right] \\ &= \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} ({}^3\mathbf{r}_p) ({}^3\mathbf{r}_p)^T \frac{\partial \mathbf{T}_3^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \end{aligned}$$

对于任一机械手上一点的速度平方为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j {}^i\mathbf{r} \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k {}^i\mathbf{r} \right)^T \right] \\ &= \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} {}^i\mathbf{r} {}^i\mathbf{r}^T \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_k \dot{q}_j \right] \quad (4.16) \end{aligned}$$

式中, Trace 表示矩阵的迹。对于 n 阶方阵来说, 其迹即它的主对角线上各元素之和。

4.2.2 质点动能和位能的计算

令连杆 3 上任一质点 P 的质量为 dm , 则其动能为

$$\begin{aligned} dK_3 &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_p^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \mathbf{r}_p ({}^3\mathbf{r}_p)^T \left(\frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} ({}^3\mathbf{r}_p dm {}^3\mathbf{r}_p^T)^T \left(\frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \end{aligned}$$

任一机械手连杆 i 上位置矢量 ${}^i\mathbf{r}$ 的质点, 其动能为

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} {}^i\mathbf{r} {}^i\mathbf{r}^T \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} ({}^i\mathbf{r} dm {}^i\mathbf{r}^T)^T \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \end{aligned}$$

对连杆 3 积分 dK_3 , 可得连杆 3 的动能为

$$K_3 = \int_{\text{连杆3}} dK_3 = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} \left(\int_{\text{连杆3}} {}^3\mathbf{r}_p {}^3\mathbf{r}_p^T dm \right) \left(\frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

式中, 积分 $\int {}^3\mathbf{r}_p {}^3\mathbf{r}_p^T dm$ 被称为连杆的“伪惯量矩阵”, 并记为

$$J_3 = \int_{\text{连杆3}} {}^3\mathbf{r}_p {}^3\mathbf{r}_p^T dm$$

这样,

$$K_3 = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_j} J_3 \left(\frac{\partial \mathbf{T}_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

任何机械手上的任一连杆 i 动能为

$$\begin{aligned} K_i &= \int_{\text{连杆}i} dK_i \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{I}_i \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

式中, $\mathbf{I}_i$ 为伪惯量矩阵, 其一般表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_i &= \int_{\text{连杆}i} {}^i\mathbf{r} {}^i\mathbf{r}^T dm = \int_i {}^i\mathbf{r} {}^i\mathbf{r}^T dm \\ &= \begin{bmatrix} \int_i x^2 dm & \int_i x^i y dm & \int_i x^i z dm & \int_i x dm \\ \int_i x^i y dm & \int_i y^2 dm & \int_i y^i z dm & \int_i y dm \\ \int_i x^i z dm & \int_i y^i z dm & \int_i z^2 dm & \int_i z dm \\ \int_i x dm & \int_i y dm & \int_i z dm & \int_i dm \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据理论力学或物理学可知,物体的转动惯量、矢量积以及一阶矩量为

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm, \quad I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm; \\ I_{xy} &= I_{yx} = \int xy dm, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int xz dm, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int yz dm; \\ mx &= \int x dm, \quad my = \int y dm, \quad mz = \int z dm \end{aligned}$$

如果令

$$\begin{aligned} \int x^2 dm &= -\frac{1}{2} \int (y^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \int (x^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm \\ &= (-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})/2 \\ \int y^2 dm &= +\frac{1}{2} \int (y^2 + z^2) dm - \frac{1}{2} \int (x^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm \\ &= (+I_{xx} - I_{yy} + I_{zz})/2 \\ \int z^2 dm &= +\frac{1}{2} \int (y^2 + z^2) dm + \frac{1}{2} \int (x^2 + z^2) dm - \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm \\ &= (+I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})/2 \end{aligned}$$

则可把 $\mathbf{I}_i$ 表示为:

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{ixx} + I_{iyy} + I_{izz}}{2} & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{ixy} & \frac{I_{ixx} - I_{iyy} + I_{izz}}{2} & I_{iyz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \frac{I_{ixx} + I_{iyy} - I_{izz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

具有 n 个连杆的机械手总的功能为

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_k \right] \quad (4.19)$$

此外,连杆 i 的传动装置动能为

$$K_{ai} = \frac{1}{2} I_{ai} \dot{\mathbf{q}}_i^2$$

式中, I_{ai} 为传动装置的等效转动惯量,对于平动关节, I_a 为等效质量; $\dot{\mathbf{q}}_i$ 为关节 i 的速度。

所有关节的传动装置总动能为

$$K_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{ai} \dot{\mathbf{q}}_i^2$$

于是得到机械手系统(包括传动装置)的总动能为

$$\begin{aligned} K_t &= K + K_a \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial \mathbf{q}_k} \right) \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 I_{ai} \dot{\mathbf{q}}_i^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

下面再来计算机械手的位能。众所周知,一个在高度 h 处质量为 m 的物体,其位能为

$$P = mgh$$

连杆 i 上位置 ${}^i r$ 处的质点 dm ,其位能为

$$dP_i = -dm \mathbf{g}^{\mathrm{T}_0} \mathbf{r} = -\mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i {}^i \mathbf{r} dm$$

式中, $\mathbf{g}^{\mathrm{T}} = [g_x, g_y, g_z, 1]$ 。

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{\text{连杆 } i} dP_i = - \int_{\text{连杆 } i} \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i {}^i \mathbf{r} dm = -\mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i \int_{\text{连杆 } i} {}^i \mathbf{r} dm \\ &= -\mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i m_i {}^i \mathbf{r}_i = -m_i \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i {}^i \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

式中, m_i 为连杆 i 的质量; ${}^i \mathbf{r}_i$ 为连杆 i 相对于其前端关节坐标系的重心位置。

由于传动装置的重力作用 P_{ai} 一般是很小的,可以略之不计,所以,机械手系统的总位能为

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n (P_i - P_{ai}) \approx \sum_{i=1}^n P_i \\ &= - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i {}^i \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

据式(4.1)求拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L &= K_i - P \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_i} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{ai} \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^{\mathrm{T}} \mathbf{T}_i {}^i \mathbf{r}_i, \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (4.22)$$

再据式(4.2)求动力学方程。先求导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_p} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_i} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p} \right) \dot{q}_j + I_{ap} \dot{q}_p, \quad p=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

据式(4.18)知, $\mathbf{I}_i$ 为对称矩阵,即 $\mathbf{I}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}_i$,所以下式成立:

$$\begin{aligned} \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_j} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_k} \right) &= \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_j} \right) = \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_j} \right) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p} \right) \dot{q}_k + I_{ap} \dot{q}_p \end{aligned}$$

当 $p > i$ 时,后面连杆变量 q_p 对前面各连杆不产生影响,即 $\partial T_i / \partial q_p = 0, p > i$ 。这样可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^{\mathrm{T}}}{\partial q_p} \right) \dot{q}_k + I_{ap} \dot{q}_p$$

因为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_k$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) \ddot{q}_k + I_{ap} \ddot{q}_p + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_p \partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) \ddot{q}_k + I_{ap} \ddot{q}_p + \\ &\quad 2 \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned}$$

再求 $\partial L / \partial q_p$ 项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=p}^n \sum_{i=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_k \partial q_p} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=p}^n m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_{i_i}}{\partial q_p} \mathbf{r}_i \\ &= \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_p \partial q_j} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=p}^n m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_{i_i}}{\partial q_p} \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

在上列两式的运算中,交换第二项和式的哑元 j 和 k ,然后与第一项和式合并,获得化简式。把上述两式代入式(4.2)的右式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial L}{\partial q_p} &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_i}{\partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) \ddot{q}_k + I_{ap} \ddot{q}_p + \\ &\quad \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_i^T}{\partial q_p} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{i=p}^n m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_{i_i}}{\partial q_p} \mathbf{r}_i \end{aligned}$$

交换上列各和式中的哑元,以 i 代替 p ,以 j 代替 i ,以 m 代替 j ,即可得到具有 n 个连杆的机械手系统动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i &= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial q_k} \mathbf{I}_j \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_k + I_{ai} \ddot{q}_i + \\ &\quad \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_i}{\partial q_k \partial q_m} \mathbf{I}_j \frac{\partial \mathbf{T}_j^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_{i_i}}{\partial q_i} \mathbf{r}_i \end{aligned} \quad (4.23)$$

这些方程式是与求和次序无关的。将式(4.23)写成下列形式:

$$\mathbf{T}_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (4.24)$$

式中,取 $n=6$,而且

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^6 \text{Trace} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_j} \mathbf{I}_p \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i} \right) \quad (4.25)$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max i,j,k}^6 \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{T}_p}{\partial q_j \partial q_k} \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{T}_p^T}{\partial q_i} \right) \quad (4.26)$$

$$D_i = \sum_{p=i}^6 -m_p \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} \mathbf{r}_p \quad (4.27)$$

上述各方程与 4.1.2 节的惯量项和重力项一样。这些项在机械手控制中特别重要,因为它们直接影响机械手系统的稳定性和定位精度。只有当机械手高速运动时,向心力和科氏力才是重要的。这时,它们所产生的误差不大。传动装置的惯量 I_{ai} 往往具有相当大的值,而且可以减少有效惯量的结构相关性和耦合惯量项的相对重要性。

4.2.4 机械手动力学方程的简化

4.2.3 节中惯量项 D_{ij} 和重力项 D_i 等的计算必须简化,才能便于实际计算。

1. 惯量项 D_{ij} 的简化

3.3.2 节中讨论雅可比矩阵时,曾得到偏导数 $\partial T_6 / \partial q_i = T_6^{T_6} \mathbf{A}_i$, 这实际上是 $p=6$ 时的特例。可以把它推广至一般形式:

$$\frac{\partial \mathbf{T}_p}{\partial q_i} = \mathbf{T}_p^{T_p} \mathbf{A}_i \quad (4.28)$$

式中, ${}^{T_p} \mathbf{A}_i = (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_p)^{-1} {}^{i-1} \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_p)$, 而微分坐标变换为

$${}^{i-1} \mathbf{T}_p = (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_p)$$

对于旋转关节,据式(3.94)可得微分平移矢量和微分旋转矢量如下:

$$\begin{cases} {}^p d_{ix} = -{}^{i-1} n_{px} {}^{j-1} p_{py} + {}^{i-1} n_{py} {}^{i-1} p_{px} \\ {}^p d_{jy} = -{}^{i-1} o_{px} {}^{i-1} p_{py} + {}^{i-1} o_{py} {}^{i-1} p_{px} \\ {}^p d_{iz} = -{}^{i-1} a_{px} {}^{i-1} p_{py} + {}^{i-1} a_{py} {}^{i-1} p_{px} \end{cases} \quad (4.29)$$

$${}^p \delta_i = {}^{i-1} n_{pz} \mathbf{i} + {}^{i-1} o_{pz} \mathbf{j} + {}^{i-1} a_{pz} \mathbf{k} \quad (4.30)$$

式(4.30)采用了下列缩写:把 ${}^{T_p} \mathbf{d}_i$ 写为 ${}^p \mathbf{d}_i$, 把 ${}^{T_{i-1}} \mathbf{n}$ 写成 ${}^{i-1} \mathbf{n}_p$, 等等。

对于棱柱(平移)关节,据式(3.94)可得各矢量为

$${}^p \mathbf{d}_i = {}^{i-1} n_{pz} \mathbf{i} + {}^{i-1} o_{pz} \mathbf{j} + {}^{i-1} a_{pz} \mathbf{k}$$

$${}^p \delta_i = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

将式(4.28)代入式(4.25)得

$$D_{ij} = \sum_{p=\max i,j}^6 \text{Trace}(\mathbf{T}_p {}^p \mathbf{A}_j \mathbf{I}_p {}^p \mathbf{A}_i^T \mathbf{T}_p^T)$$

对上式中间 3 项展开得

$$D_{ij} = \sum_{p=\max i,j}^6 \text{Trace} \left(\mathbf{T}_p \begin{bmatrix} 0 & -{}^p \delta_{jz} & {}^p \delta_{jy} & {}^p d_{jx} \\ {}^p \delta_{jz} & 0 & -{}^p \delta_{jx} & {}^p d_{jy} \\ -{}^p \delta_{jy} & {}^p \delta_{jx} & 0 & {}^p d_{jz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{xy} & \frac{-I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & {}^p\delta_{ix} & -{}^p\delta_{iy} & 0 \\ -{}^p\delta_{iz} & 0 & {}^p\delta_{ix} & 0 \\ {}^p\delta_{iy} & -{}^p\delta_{ix} & 0 & 0 \\ {}^p\delta_{ix} & {}^p\delta_{iy} & {}^p\delta_{iz} & 0 \end{bmatrix} T_p^T$$

这中间 3 项是由式(3.80)、式(4.18)和式(3.80)的转置得到的。它们相乘所得矩阵的底行和右列各元均为 0。当它们左乘 T_p 和右乘 T_p^T 时,只用到 T_p 变换的旋转部分。在这种运算下,矩阵的迹为不变式。因此,只需要上述表达式中间 3 项的迹,它的简化矢量形式为

$$D_{ij} = \sum_{p=\max i, y}^6 m_p [{}^p\delta_i^T k_p {}^p\delta_j + {}^p\mathbf{d}_i {}^p\mathbf{d}_j + {}^p\bar{\mathbf{r}}_p ({}^p\mathbf{d}_i \times {}^p\delta_j + {}^p\mathbf{d}_j \times {}^p\delta_i)] \quad (4.31)$$

式中,

$$\mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} k_{pxx}^2 & -k_{pxy}^2 & -k_{pzz}^2 \\ -k_{pxy}^2 & k_{pyy}^2 & -k_{pyz}^2 \\ -k_{pzz}^2 & -k_{pyz}^2 & k_{pzz}^2 \end{bmatrix}$$

以及

$$\begin{aligned} m_p k_{pxx}^2 &= I_{pxx}, & m_p k_{pyy}^2 &= I_{pyy}, & m_p k_{pzz}^2 &= I_{pzz}, \\ m_p k_{pxy}^2 &= I_{pxy}, & m_p k_{pyz}^2 &= I_{pyz}, & m_p k_{pzz}^2 &= I_{pzz} \end{aligned}$$

如果设定上式中非对角线各惯量项为 0,即一个正态假设,那么式(4.29)可进一步简化为

$$\begin{aligned} D_{ij} = \sum_{p=\max i, j}^6 m_p \{ [{}^p\delta_{ix} k_{pxx}^2 {}^p\delta_{jx} + {}^p\delta_{iy} k_{pyy}^2 {}^p\delta_{jy} + {}^p\delta_{iz} k_{pzz}^2 {}^p\delta_{jz}] + \\ [{}^p\mathbf{d}_i \cdot {}^p\mathbf{d}_j] + [{}^p\bar{\mathbf{r}}_p \cdot (\mathbf{d}_i \times {}^p\delta_j + {}^p\mathbf{d}_j \times {}^p\delta_i)] \} \end{aligned} \quad (4.32)$$

由式(4.32)可见, D_{ij} 和式的每一元是由三组项组成的。其第一组项 ${}^p\delta_{ix} k_{pxx}^2 \cdots$ 表示质量 m_p 在连杆 p 上的分布作用。第二组项表示连杆 p 质量的分布,记为有效力矩臂 ${}^p\mathbf{d}_i \cdot {}^p\mathbf{d}_j$ 。最后一组项是由于连杆 p 的质心不在连杆 p 的坐标系原点而产生的。当各连杆的质心相距较大时,上述第二部分的项将起主要作用,而且可以忽略去第一组项和第三组项的影响。

2. 惯量项 D_{ij} 的简化

在式(4.32)中,当 $i=j$ 时, D_{ij} 可进一步简化为 D_{ii} :

$$\begin{aligned} D_{ii} = \sum_{p=i}^6 m_p \{ [{}^p\delta_{ix}^2 k_{pxx}^2 + {}^p\delta_{iy}^2 k_{pyy}^2 + {}^p\delta_{iz}^2 k_{pzz}^2] + \\ [{}^p\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i] + [{}^2p\bar{\mathbf{r}}_p \cdot ({}^p\mathbf{d}_i \times {}^p\delta_i)] \} \end{aligned} \quad (4.33)$$

如果为旋转关节,那么把式(4.29)和式(4.30)代入式(4.33)可得

$$D_{ii} = \sum_{p=i}^6 m_p \{ [n_{px}^2 k_{pxx}^2 + o_{py}^2 k_{pyy}^2 + a_{pz}^2 k_{pzz}^2] + [\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \bar{\mathbf{p}}_p] + [2^p \bar{\mathbf{r}}_p \cdot [(\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \mathbf{n}_p)\mathbf{i} + (\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \mathbf{o}_p)\mathbf{j} + (\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \mathbf{a}_p)\mathbf{k}]] \} \quad (4.34)$$

式中, $\mathbf{n}_p, \mathbf{o}_p, \mathbf{a}_p$ 和 $\mathbf{p}_p$ 为 ${}^{(i-1)}\mathbf{T}_p$ 的矢量, 且

$$\bar{\mathbf{p}} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

可使式(4.32)和式(4.33)中的有关对应项相等:

$${}^p \delta_{ix}^2 k_{pxx}^2 + {}^p \delta_{iy}^2 k_{pyy}^2 + {}^p \delta_{iz}^2 k_{pzz}^2 = n_{px}^2 k_{pxx}^2 + o_{py}^2 k_{pyy}^2 + a_{pz}^2 k_{pzz}^2$$

$${}^p \mathbf{d}_i \cdot {}^p \mathbf{d}_i = \bar{\mathbf{p}}_p \cdot \bar{\mathbf{p}}_p$$

$${}^p \mathbf{d}_i \times {}^p \delta_i = (\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \mathbf{n}_p)\mathbf{i} + (\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \mathbf{o}_p)\mathbf{j} + (\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \mathbf{a}_p)\mathbf{k}$$

正如式(4.22)一样, D_{ii} 和式的每个元也是由三个项组成的。如果为棱柱关节, ${}^p \delta_i = 0$, ${}^p \mathbf{d}_i \cdot {}^p \mathbf{d}_i = 1$, 那么

$$D_{ii} = \sum_{p=i}^6 m_p \quad (4.35)$$

3. 重力项 D_i 的简化

将式(4.28)代入式(4.27)得

$$D_i = \sum_{p=i}^6 -m_p \mathbf{g}^T \mathbf{T}_p {}^p \Delta_i {}^p \bar{\mathbf{r}}_p$$

把 $\mathbf{T}_p$ 分离为 $\mathbf{T}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{T}_p$, 并用 ${}^{i-1}\mathbf{T}_p {}^{i-1}\mathbf{T}_p$ 后乘 ${}^p \Delta_i$, 得

$$D_i = \sum_{p=i}^6 -m_p \mathbf{g}^T \mathbf{T}_{i-1} {}^{i-1}\mathbf{T}_p {}^p \Delta_i {}^{i-1}\mathbf{T}_p {}^{i-1}\mathbf{T}_p {}^p \bar{\mathbf{r}}_p \quad (4.36)$$

当 ${}^{i-1}\Delta_i = {}^{i-1}\mathbf{T}_p {}^{i-1}\mathbf{T}_p$, ${}^i \mathbf{r}_p = {}^i \mathbf{T}_p {}^p \bar{\mathbf{r}}_p$ 时, 可进一步化简 D_i 为

$$D_i = -\mathbf{g}^T \mathbf{T}_{i-1} {}^{i-1}\Delta_i \sum_{p=i}^6 m_p {}^{i-1}\bar{\mathbf{r}}_p \quad (4.37)$$

定义 ${}^{i-1}\mathbf{g} = -\mathbf{g}^T \mathbf{T}_{i-1} {}^{i-1}\Delta_i$, 则有

$${}^{i-1}\mathbf{g} = -[g_x g_y g_z 0] \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\delta_x & \delta_y & d_x \\ \delta_z & 0 & -\delta_x & d_y \\ -\delta_y & \delta_x & 0 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应旋转关节 i , ${}^{i-1}\Delta_i$ 对应于绕 z 轴的旋转。于是, 可把上式简化为

$$\begin{aligned} {}^{i-1}\mathbf{g} &= -[g_x g_y g_z 0] \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [-\mathbf{g} \cdot \mathbf{o}, \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, 0, 0] \end{aligned} \quad (4.38)$$

对于棱柱关节, ${}^{i-1}\Delta_i$ 对应于沿 z 轴的平移, 这时有

$${}^{i-1}\mathbf{g} = -[g_x g_y g_z 0] \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0, 0, -\mathbf{g} \cdot \mathbf{a}] \quad (4.39)$$

于是, 可把 D_i 写为

$$D_i = {}^{i-1}\mathbf{g} \sum_{p=i}^6 m_p {}^{i-1}\bar{\mathbf{r}}_p \quad (4.40)$$

4.3 机械手动力学方程举例

4.3.1 二连杆机械手动力学方程

在 4.1 节讨论过二连杆机械手的动力学方程, 见图 4.2 和图 4.3 及有关各方程式。在此, 仅讨论二连杆机械手有效惯量项、耦合惯量项和重力项计算。

首先, 规定机械手的坐标系, 如图 4.5 所示, 并计算 $\mathbf{A}$ 矩阵和 $\mathbf{T}$ 矩阵。表 4.2 则表示各连杆参数。

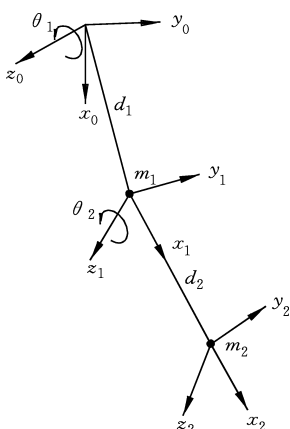


图 4.5 二连杆机械手的坐标系

表 4.2 二连杆机械手连杆参数

连杆	变量	α	a	d	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	θ_1	0°	d_1	0	1	0
2	θ_2	0°	d_2	0	1	0

$\mathbf{A}$ 矩阵和 $\mathbf{T}$ 矩阵如下:

$$\mathbf{A}_1 = {}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & d_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & d_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{A}_2 = {}^1\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & d_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ {}^0\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & d_1 c_1 + d_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & d_1 s_1 + d_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因两关节均属旋转式,所以,可据式(4.29)和式(4.30)来计算 $\mathbf{d}$ 和 $\boldsymbol{\delta}$ 。

以 ${}^0\mathbf{T}_1$ 为基础,有

$${}^1\mathbf{d}_1 = 0\mathbf{i} + d_1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad {}^1\boldsymbol{\delta}_1 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

以 ${}^1\mathbf{T}_2$ 为基础,有

$${}^2\mathbf{d}_1 = 0\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad {}^2\boldsymbol{\delta}_2 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

以 ${}^0\mathbf{T}_2$ 为基础,有

$${}^2\mathbf{d}_1 = s_2 d_1 \mathbf{i} + (c_2 d_1 + d_2) \mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad {}^2\boldsymbol{\delta}_1 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

对于这个简单机械手,其所有惯性力矩为0,就像 ${}^i\mathbf{r}_i$ 和 ${}^2\mathbf{r}_2$ 为0一样。因此,从式(4.34)可以立即得到

$$\begin{aligned} D_{11} &= \sum_{p=1}^2 m_p \{ [n_{px}^2 k_{p_{xx}}^2] + [\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \bar{\mathbf{p}}_p] \} \\ &= m_1 (p_{1x}^2 + p_{1y}^2) + m_2 (p_{2x}^2 + p_{2y}^2) \\ &= m_1 d_1^2 + m_2 (d_1^2 + d_2^2 + 2c_2 d_1 d_2) \\ &= (m_1 + m_2) d_1^2 + m_2 d_2^2 + 2m_2 d_1 d_2 c_2 \\ D_{22} &= \sum_{p=2}^2 m_p \{ [n_{px}^2 k_{p_{xx}}^2] + [\bar{\mathbf{p}}_p \cdot \bar{\mathbf{p}}_p] \} \\ &= m_2 ({}^1p_{2x}^2 + {}^1p_{2y}^2) = m_2 d_2^2 \end{aligned}$$

再据式(4.32)求 D_{12} :

$$\begin{aligned} D_{12} &= \sum_{p=\max 1,2}^2 m_p \{ [{}^p\mathbf{d}_1 \cdot {}^p\mathbf{d}_2] \} = m_2 ({}^2\mathbf{d}_1 \cdot {}^2\mathbf{d}_2) \\ &= m_2 (c_2 d_1 + d_2) d_2 = m_2 (c_2 d_1 d_2 + d_2^2) \end{aligned}$$

最后计算重力项 D_1 和 D_2 ,为此先计算 ${}^2\mathbf{g}$ 和 ${}^1\mathbf{g}$ 。

因为 ${}^{i-1}\mathbf{g} = [-\mathbf{g} \cdot \mathbf{o} \quad \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \quad 0 \quad 0]$,所以可得下列各式:

$$\mathbf{g} = [g \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$${}^0\mathbf{g} = [0 \quad g \quad 0 \quad 0]$$

$${}^1\mathbf{g} = [gs_1 \quad gc_1 \quad 0 \quad 0]$$

再求各质心矢量 ${}^i\mathbf{r}_p$

$${}^2\bar{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1\bar{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} c_2 d_2 \\ s_2 d_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\bar{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} c_1 d_1 + c_{12} d_2 \\ s_1 d_1 + s_{12} d_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} c_1 d_1 \\ s_1 d_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是可据式(4.37)求得 D_1 和 D_2 :

$$\begin{aligned} D_1 &= m_1 {}^0\mathbf{g}^0\bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 {}^0\mathbf{g}^0\bar{\mathbf{r}}_2 = m_1 g s_1 d_1 + m_2 g (s_1 d_1 + s_{12} d_2) \\ &= (m_1 + m_2) g d_1 s_1 + m_2 g d_2 s_{12} \end{aligned}$$

$$D_2 = m_2 {}^1\mathbf{g}^1\bar{\mathbf{r}}_2 = m_2 g (s_1 c_2 + c_1 s_2) = m_2 g d_2 s_{12}$$

以上所求各项,可与 4.1.2 节中的 D_{11}, D_{22}, D_1 和 D_2 加以比较,以检验计算结果的正确性。

五连杆和六连杆机械手的动力学方程计算例题,已在一些文献中介绍过,如斯坦福机械手的动力学方程,PUMA 560 工业机器人的动力学方程等。在此不予列举。

4.3.2 三连杆机械手的速度和加速度方程

在操作机器人的控制中,往往需要知道各连杆末端的速度和加速度,或者要求控制系统提供一定的驱动力矩或力,以保证机械手各连杆以确定的速度和加速度运动。因此,有必要举例说明如何建立机械手速度和加速度方程。

图 4.6 为一种三连杆机械手的结构和坐标系。下面将建立其速度和加速度方程。

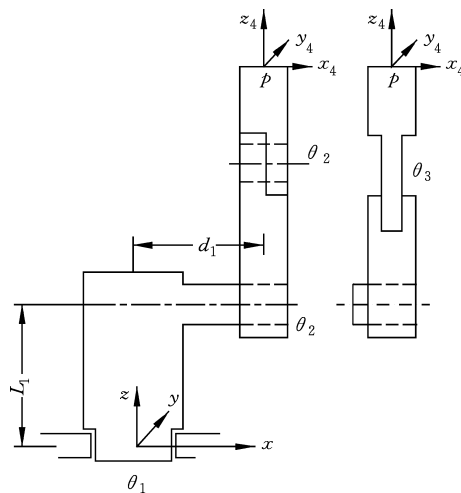


图 4.6 三连杆机械手装置

1. 位置方程

机械手装置 1 的端部对底座坐标系原点的相对位置方程为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_1 &= \text{Rot}(z_1, \theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{T}_{12} &= \text{Trans}(d_1, 0, L_1) \text{Rot}(y, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\phi}_2 &= \text{Rot}(z_2, \theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{T}_{23} &= \text{Trans}(-L_2, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\phi}_3 &= \text{Rot}(z_3, \theta_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{T}_{34} &= \text{Trans}(-L_3, 0, 0) \text{Rot}(y, 90) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 & d_1 c_1 \\ 0 & c_1 & s_1 & d_1 s_1 \\ -1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & -L_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & -L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & -c_3 & -L_3 c_3 \\ 1 & c_3 & -s_3 & -L_3 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 s_2 s_3 - s_1 c_2 c_3 & s_1 s_2 c_3 + s_1 c_2 s_3 & L_3 s_1 (s_2 c_3 + c_2 s_3) + L_2 s_1 s_2 + d_1 c_1 \\ s_1 & -c_1 s_2 s_3 + c_1 c_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 + c_1 c_2 s_3 & -L_3 c_1 (s_2 c_3 + c_2 s_3) - L_2 c_1 s_2 + d_1 s_1 \\ 0 & c_2 s_3 + s_2 c_3 & c_2 c_3 + s_2 s_3 & L_3 (c_2 c_3 - s_2 s_3) + L_2 c_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & d_1 c_1 + s_1 (L_2 s_2 + L_2 s_{23}) \\ s_1 & c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & d_1 s_1 - c_1 (L_2 s_2 + L_2 s_{23}) \\ 0 & s_{23} & -c_{23} & L_1 + L_2 c_2 + L_3 c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2. 速度方程

机械手末端(工具)对基坐标系原点的速度方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [\omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_3 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34}] \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中, ω_1, ω_2 和 ω_3 分别为轴 z_1, z_2 和 z_3 的旋转角速度; θ_1, θ_2 和 θ_3 为旋转求导运算矩阵, 且

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{aligned} \dot{T}_{31} &= \omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \\ &= \dots \\ &= \omega_1 \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & -L_2 c_2 \\ 0 & 1 & 0 & -L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & -c_3 & -L_3 c_3 \\ 0 & c_3 & -s_3 & -L_3 s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \omega_1 \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & L_3 c_1 s_{23} + L_2 c_1 s_2 - d_1 s_1 \\ c_1 & -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & L_2 s_2 s_{23} + L_2 s_1 s_2 + d_1 c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \dot{T}_{32} &= \omega_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \\ &= \dots \\ &= \omega_2 \begin{bmatrix} 0 & s_1 & c_1 & d_1 c_1 \\ 0 & -c_1 & s_1 & d_2 s_1 \\ -1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & -c_3 & -L_3 c_3 \\ 0 & c_3 & -s_3 & -L_3 s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \omega_2 \begin{bmatrix} 0 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 & L_3 (-s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3) - L_2 s_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 & c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & L_3 (c_1 c_2 c_3 - c_1 c_2 s_3) + L_2 c_1 c_2 \\ 0 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & -s_2 c_3 - c_2 s_3 & -L_3 (s_2 c_3 + c_2 s_3) - L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \omega_2 \begin{bmatrix} 0 & -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & -L_3 s_1 c_{23} - L_2 s_1 c_2 \\ 0 & c_1 s_{23} & c_1 c_{23} & L_3 c_1 c_{23} + L_2 c_1 c_2 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} & -L_3 s_{23} - L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{T}_{33} = \omega_3 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34}$$

= ...

$$= \omega_3 \begin{bmatrix} 0 & s_1 & c_1 & d_1 c_1 \\ 0 & -c_1 & s_1 & d_1 s_1 \\ -1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & -L_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & -L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & -c_3 & -L_3 c_3 \\ 0 & c_3 & -s_3 & -L_3 s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \omega_3 \begin{bmatrix} 0 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & -s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3 & L_3(-s_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3) \\ 0 & c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 & c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & L_3(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) \\ 0 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & -s_2 c_3 - c_2 s_3 & -L_3(s_2 c_3 + c_2 s_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \omega_3 \begin{bmatrix} 0 & -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & -L_3 s_1 c_{23} \\ 0 & c_1 s_{23} & c_1 c_{23} & L_3 c_1 c_{23} \\ 0 & c_{23} & -s_{23} & -L_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因而可得速度方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \omega_1 \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & L_3 c_1 s_{23} + L_2 c_1 s_2 - d_1 s_1 \\ c_1 & -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & L_3 s_1 s_{23} + L_2 s_1 s_2 + d_1 c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$\omega_2 \begin{bmatrix} 0 & -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & -L_3 s_1 c_{23} - L_2 s_1 c_2 \\ 0 & c_1 s_{23} & c_1 c_{23} & L_3 c_1 c_{23} + L_2 c_1 c_2 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} & -L_3 s_{23} - L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$\omega_3 \begin{bmatrix} 0 & -s_1 s_{23} & -s_1 c_{23} & -L_3 s_1 c_{23} \\ 0 & c_1 s_{23} & c_1 c_{23} & L_3 c_1 c_{23} \\ 0 & c_{23} & -s_{23} & -L_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 加速度方程

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [(\omega_1^2 \theta_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_1 \omega_2 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} +$$

$$\begin{aligned}
& \omega_1 \omega_3 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_1 \theta_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34}) + \\
& (\omega_2 \omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_2^2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{23} + \\
& \omega_2 \omega_3 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{12} \phi_3 T_{34}) + \\
& (\omega_3 \omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \omega_3 \omega_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \\
& \omega_3^2 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_3 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34})] T_4 \\
& = (\ddot{T}_{31} + \ddot{T}_{32} + \ddot{T}_{33}) T_4 = \ddot{T}_3 T_4
\end{aligned}$$

式中, $T_4 = [x_4 \quad y_4 \quad z_4 \quad 1]^T$, α_1, α_2 和 α_3 分别为绕轴 z_1, z_2 和 z_3 旋转的角加速度。

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_{31} &= \omega_1^2 \theta_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_1 \omega_2 \theta_1 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \\
& \omega_1 \omega_2 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_1 \theta_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \\
&= \omega_1 \theta_1 \dot{T}_{31} + \omega_1 \theta_1 \dot{T}_{32} + \omega_1 \theta_1 \dot{T}_{33} + \alpha_1 / \omega_1 \dot{T}_{31} \\
&= \omega_1 \theta_1 (\dot{T}_{31} + \dot{T}_{32} + \dot{T}_{33}) + \alpha_1 / \omega_1 \dot{T}_{31} \\
&= \dots \\
&= \begin{bmatrix} -\omega_1^2 c_1 - \alpha_1 s_1 & \omega_1^2 s_1 c_{23} - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) c_1 s_{23} - \alpha_1 c_1 c_{23} \\ -\omega_1^2 s_1 + \alpha_1 c_1 & -\omega_1^2 c_1 c_{23} - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) s_1 s_{23} - \alpha_1 s_1 c_{23} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& - \omega_1^2 s_1 s_{23} - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) c_1 c_{23} + \alpha_1 c_1 s_{23} \\
& \omega_1^2 c_1 s_{23} - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) s_1 c_{23} - \alpha_1 s_1 s_{23} \\
& 0 \\
& 0 \\
& -\omega_1^2 L_3 s_1 s_{23} - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) L_3 c_1 c_{23} - \omega_1 \omega_2 L_2 c_1 c_2 + \omega_1^2 L_2 s_1 s_2 + \alpha_1 L_3 c_1 s_{23} + \\
& \alpha_1 L_2 c_1 s_2 - \alpha_1 d_1 s_1 + d_1 \omega_1^2 c_1 \\
& \omega_2^2 L_3 c_1 s_{23} - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) L_3 s_1 c_{23} - \omega_1 \omega_2 L_2 s_1 c_2 + \omega_1^2 L_2 c_1 s_2 + \alpha_1 L_3 s_1 s_{23} + \\
& \alpha_1 L_2 s_1 s_2 + \alpha_1 d_1 c_1 + d_2 \omega_1^2 s_1 \\
& 0 \\
& 0 \end{bmatrix} \\
\ddot{T}_{32} &= \omega_2 \omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_2^2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \\
& \omega_2 \omega_3 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_2 \theta_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \\
&= \omega_1 \theta_1 \dot{T}_{32} + \alpha_2 / \omega_2 \dot{T}_{32} + \omega_2^2 [\phi_1 T_{12} \theta_2][\theta_2][\phi_2 T_{23}][\phi_3 T_{34}] + \\
& \omega_2 \omega_3 [\phi_1 T_{12} \theta_2][\phi_2 T_{23}][\theta_3][\phi_3 T_{34}] \\
&= \dots \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 \omega_2 c_1 s_{23} - \alpha_2 s_1 s_{23} - \omega_2(\omega_2 + \omega_3) s_1 c_{23} \\ 0 & -\omega_1 \omega_2 s_1 s_{23} + \alpha_2 c_1 s_{23} + \omega_2(\omega_2 + \omega_3) c_1 c_{23} \\ 0 & \alpha_2 c_{23} - \omega_2(\omega_2 + \omega_3) s_{23} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\omega_1\omega_2c_1c_{23}-\alpha_2s_1c_{23}+\omega_2(\omega_2+\omega_3)s_1s_{23} \\
& -\omega_1\omega_2s_1c_{23}+\alpha_2c_1c_{23}-\omega_2(\omega_2+\omega_3)c_1s_{23} \\
& \quad -\alpha_2s_{23}-\omega_2(\omega_2+\omega_3)c_{23} \\
& \quad 0 \\
& -\omega_1\omega_2(L_3c_1c_{23}+L_2c_1c_2)-\alpha_2(L_3s_1c_{23}+L_2s_1c_2)+\omega_2^2L_2s_1s_2+\omega_2(\omega_2+\omega_3)L_3s_1s_{23} \\
& -\omega_1\omega_2(L_3s_1c_{23}+L_2s_1c_2)+\alpha_2(L_3c_1c_{23}+L_2c_1c_2)-\omega_2^2L_2c_1s_2-\omega_2(\omega_2+\omega_3)L_3c_1s_{23} \\
& \quad -\alpha_2(L_3s_{23}+L_2s_2)-\omega_2^2L_2c_2-\omega_2(\omega_2+\omega_3)L_3c_{23} \\
& \quad 0
\end{aligned}
\Bigg]$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{T}}_{33} &= \omega_1\boldsymbol{\theta}_1\dot{\boldsymbol{T}}_{33} + \omega_3\omega_2\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{\theta}_3\boldsymbol{\phi}_3\boldsymbol{T}_{34} + \\
& \quad \omega_3^2\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{\phi}_2\boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{\theta}_3\boldsymbol{\theta}_3\boldsymbol{\phi}_3\boldsymbol{T}_{34} + \alpha_3/\omega_3\boldsymbol{T}_{33} \\
&= \dots \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_3\omega_1c_1+\alpha_3s_1)s_{23}-\omega_3(\omega_2-\omega_3)s_1c_{23} \\ 0 & -(\omega_3\omega_1s_1-\alpha_3c_1)s_{23}+\omega_3(\omega_2-\omega_3)c_1c_{23} \\ 0 & -\omega_3(\omega_2+\omega_3)s_{23}+\alpha_3c_{23} \\ 0 & 0 \\ & -(\omega_3\omega_1c_1+\alpha_3s_1)c_{23}+\omega_3(\omega_2-\omega_3)s_1s_{23} \\ & -(\omega_3\omega_1s_1-\alpha_3c_1)c_{23}-\omega_3+\omega_3(\omega_2-\omega_3)c_1s_{23} \\ & -\omega_3(\omega_2-\omega_3)c_{23}-\alpha_3s_{23} \\ & 0 \\ & -L_3(\omega_3\omega_1c_1+\alpha_3s_1)c_{23}+L_3\omega_3(\omega_2-\omega_3)s_1s_{23} \\ & -L_3(\omega_3\omega_1s_1-\alpha_3c_1)c_{23}-L_3\omega_3(\omega_2-\omega_3)c_1s_{23} \\ & -L_3\omega_3(\omega_2+\omega_3)c_{23}-L_3\alpha_3s_{23} \\ & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

于是可得加速度方程:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = (\ddot{\boldsymbol{T}}_{31} + \ddot{\boldsymbol{T}}_{32} + \ddot{\boldsymbol{T}}_{33}) \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \ddot{\boldsymbol{T}}_3 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

式中,

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{T}}_3 &= \begin{bmatrix} -\omega_1^2c_1-\alpha_1s_1 \\ -\omega_1^2s_1+\alpha_1c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \quad (\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_3^2-2\omega_2\omega_3)s_1c_{23}-2\omega_1(\omega_2+\omega_3)c_1s_{23}-\alpha_1c_1c_{23}-(\alpha_2+\alpha_3)s_1s_{23} \\
& \quad -(\omega_1^2-\omega_2^2+\omega_3^2-2\omega_2\omega_3)c_1c_{23}-2\omega_1(\omega_2+\omega_3)s_1s_{23}-\alpha_1s_1c_{23}+(\alpha_2+\alpha_3)c_1s_{23} \\
& \quad -(\omega_2+\omega_3)^2s_{23}+(\alpha_2+\alpha_3)c_{23} \\
& \quad 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)s_1s_{23} - 2\omega_1(\omega_2 + \omega_3)c_1s_{23} - (\alpha_2 + \alpha_3)s_1c_{23} + \alpha_1c_1s_{23} \\
& (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)c_1s_{23} - 2\omega_1(\omega_2 + \omega_3)s_1c_{23} + (\alpha_2 + \alpha_3)c_1c_{23} + \alpha_1s_1s_{23} \\
& -(\omega_2 + \omega_3)^2c_{23} - (\alpha_2 + \alpha_3)s_{23} \\
& 0 \\
& -L_3(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)s_1s_{23} - 2\omega_1(\omega_2 + \omega_3)L_3c_1c_{23} - L_3(\alpha_2 + \alpha_3)s_1c_{23} + \\
& L_3\alpha_1c_1s_{23} - 2L_2\omega_1\omega_2c_1c_2 - L_2\alpha_1s_1c_2 + L_2(\omega_1^2 + \omega_2^2)s_1s_2 + L_2\alpha_1c_1s_2 + \\
& d_1\omega_1^2c_1 - d_1\alpha_1s_1 \\
& L_3(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)c_1s_{23} - 2\omega_1(\omega_2 + \omega_3)L_3s_1c_{23} + L_3(\alpha_2 + \alpha_3)c_1c_{23} + \\
& L_3\alpha_1s_1s_{23} - 2L_2\omega_1\omega_2s_1c_2 - L_2\alpha_1c_1c_2 + L_2(\omega_1^2 + \omega_2^2)c_1s_2 + L_2\alpha_1s_1s_2 - \\
& d_1\omega_1^2s_1 + d_1\alpha_1c_1 \\
& -L_3(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - 2\omega_2\omega_3)c_{23} - L_3(\alpha_2 + \alpha_3)s_{23} - L_2\alpha_2s_2 - L_2\omega_2^2c_2 \\
& 0
\end{aligned}$$

4.4 机器人的动态特性

一台操作机器人的动态特性包括其工作精度、重复能力、稳定性和空间分辨率等。这些特性取决于工具及其功能、手臂的几何结构、单独传动点的精度以及进行运动运算的计算机程序的质量等。

4.4.1 动态特性概述

机械手的动态特性用于描述下列能力：机械手能够移动得多快，它能以怎样的准确性快速地停在给定点，以及它对停止位置超调了多少距离等。当工具快速移向工件时，任何超调都可能造成重大的损害或事故。另一方面，如果工具移动得太慢，那么又会耗费过多的时间。

对于基底具有转动关节的机械手来说，要达到良好的动态性能通常是很困难的。从伺服控制的角度看，惯性负载不仅是由物体的惯量决定的，也取决于这些关节的瞬时位置和运动情况。在快速运动时，机械手上各刚性连杆的质量和转动惯量（惯量矩）给这些关节的伺服系统的总负载强加上了一个很大的摩擦负载。一台工业操作机器人，随着它的姿态变化，其第一个转动关节上的惯性负载在 10 倍范围内变化的情况并非罕见。如果单独关节伺服系统是经典的比例-积分-微分控制器（proportion integration differentiation controller, PID controller），那么这些伺服系统应以最大惯性负载来调准，以保证不会超越它们的目标。但是，这种调准方法会严重地降低它们的性能。

在机器人示教设备中，有一种用于加速运动过程的技术，即教会一个或多个附加的路径中继点，这些中继点所处的位置能够使手臂的部分运动进入低惯量姿态。一个中继点是工

具触头应当经过而不必停止的点,如图 4.7 所示。

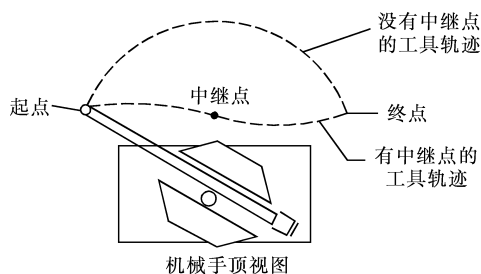


图 4.7 采用中继点加速机械手的运动

例如,可以把中继点示教为从起始位置至停止位置间直线的中点。当悬臂开始运动之后,这个过程将强制悬臂收缩进去,以减少旋转关节伺服系统所受到的转动惯量,并很可能导致较大的加速度与减速度,缩短过渡过程时间。说“很可能”,是因为大多数机械手的伺服系统具有相当明显的奇异非线性,因而要使它们的特性普遍化是很困难的。

必须谨慎地采用中继点。如果这些点设置得不适当,那么它们可能损坏某些机械臂。一般来说,不应该让主关节以全速接近其中继点,也不应在相反的方向以全速趋向中继点。

4.4.2 稳定性

稳定性(stability)涉及系统、装置或工具运动过程中的无振荡问题。振荡带来的不利影响是不言而喻的。

众所周知,振荡的类型有两种,即衰减振荡和非衰减振荡。前者随时间减弱至停止振荡(暂时振荡)。后者可能维持振荡幅值不变甚至增大(维持振荡或发散振荡)。非衰减振荡是最严重的,它们可能给周围物体和人员造成巨大的破坏或伤害。维持振荡是一种临界情况。由于把机械手作为具有严重非线性的动态系统来研究,所以有必要观察维持振荡。衰减振荡虽然不大可能造成破坏,但是它们依然是不可取的。

伺服系统的设计者确信,机械手决不会突然引起振荡。当手臂的姿态改变时,单独关节伺服装置上的惯性负载和重力负载也随之变动,这就会使振荡难以形成。此外,伺服系统必须在一个宽大的位置误差(在某些情况下还有速度误差)动态范围内运行,而且必须在所有情况下可靠地工作,不论传动装置强加的速度和加速度限制如何。

有一种机器人控制器,当它的每个关节第一次到达其设定点时,能够独立地锁定该关节。当工具进入离设定位置一定距离时,它也能使关节减速。这种锁定,可按任何次序进行。当所有关节都锁定时(称为“全体一致状态”),机械臂处于稳态,并可开始向下一位置运动。如果维持在一个位置的时间达几秒以上,那么工具将从编程位置缓慢移开。当位置误差积累达到显著值时,关节伺服系统能够使工具返回初始位置。工具位置的这一变化,是一种技术上的不稳定形式,但不影响机器人的正常运行。

另一种控制器允许各关节伺服系统连续运行。从建造数控工具的经验中得到的复杂的伺服系统设计技术,能够防止启动时产生振荡,不论负载情况如何。

一些特殊的条件可能使关节伺服系统处于极不稳定的状态。当负载突然从工具末端滑脱出去时的情况就是一个典型的例子。这会使一个或多个关节上的重力负载产生阶跃变化,并会引起设计得不好的机械手振荡。关节的运动也能产生有效惯性力、向心力和对其他关节的耦合向心力(或力矩)的各种组合。其他关节对这些力矩的作用也会使原关节产生各种作用力。这是另一个潜在的振荡根源。最后,两台非常接近的机械手在工作时也可能互

相激发振荡。这种振荡可能是由公共底座或支架等机械耦合,或者是由两者同时夹持的工件引起的。

4.4.3 空间分辨率

空间分辨率(spatial resolution)是描述机器人工具末端运动的一个重要因素。分辨率是设计机器人控制系统的特性,它指明系统能够区别工作空间所需要的最小运动增量。分辨率可以是控制系统能够控制的最小位置增量的函数,或者是控制测量系统能够辨别的最小位置增量。空间分辨率与机械偏差一起构成控制分辨率。为了确定空间分辨率,机械手上每个关节的工作范围是由控制增量数区分的。例如,图 4.8 描述了一个 1.23m 长的滑动关节,其控制系统采用 12 位存储器,因而具有 4093(或称为“4k”)的指令控制增量能力。因此,这个系统的控制分辨率是 0.3mm。然后,把控制分辨率加上机械偏差,就是空间分辨率。将在 4.4.4 节讨论机械偏差问题。

当两台机械手只有一个关节的增量不同时,称为“相邻机械手”(manipular)。机械手滑动关节的每一单位位置变化,都将使工具末端移动同样的距离,而与工具所在工作空间的位置无关。因此,一台具有 X-Y-Z 几何结构的机械手,在它的整个工作空间内基本上具有不变的空间分辨率。当示教机械手对其工作空间内一位置执行精确操作,然后在工作空间内别的位置重复这一操作时,固定不变的空间分辨率尤其重要。

然而,旋转关节位置的一个单位变化,将使工具末端移过一个距离,这一距离与从关节轴线至工具末端的垂直距离成正比。例如,有些机械手具有一个垂直轴旋转关节,这一垂直轴承受所有其他关节与连杆。驱动这一旋转关节,能够在一定的最大误差内可靠地把机械手的悬臂定位至某个相对于此垂直轴的给定方向上。这个角度-位置误差对工具末端最后位置的影响程度,明显地取决于悬臂伸展的长度。悬臂伸出的长度越长,旋转关节移至相邻位置时工具末端所移动的距离就越大,如图 4.9 所示。

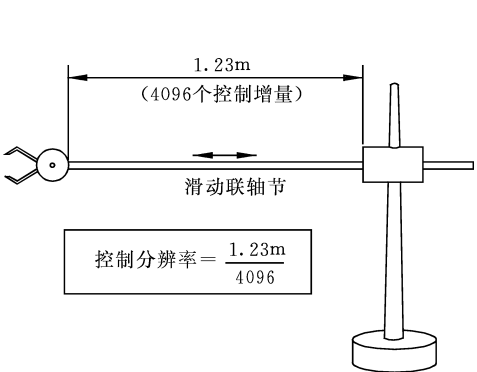


图 4.8 控制对分辨率的影响

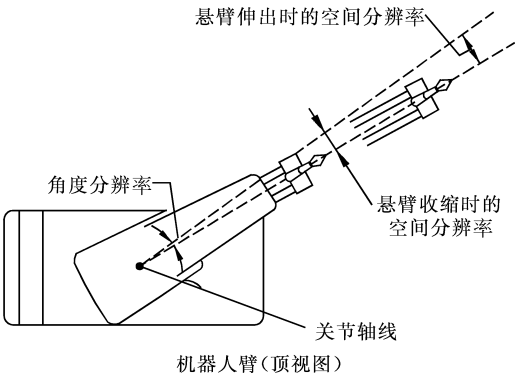


图 4.9 悬臂伸缩对空间分辨率的影响

4.4.4 精度

精度(accuracy)这一术语常常与分辨率及重复性能相混淆。用下列 3 个因素的集合来

描述机器人的精度：

- (1) 各控制部件的分辨率；
- (2) 各机械部件的偏差；
- (3) 某个任意的从未接近的固定位置(目标)。

为了进一步说明这个问题,考虑一单关节机器。此机器的机械偏差可以忽略,而其控制分辨率为 0.3mm 。此机器的精度为相邻两控制位置间距离的一半,即 0.15mm 。它能以这一精度接近某一任意目标。图 4.10 描述了这一例子。

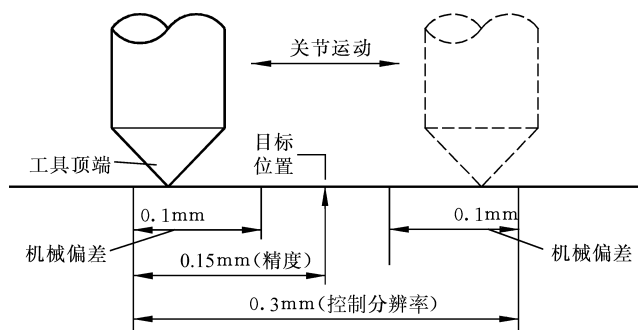


图 4.10 不考虑机械偏差时精度与空间分辨率的关系

当包括机械部件偏差时,机器的精度将变差。图 4.11 给出了考虑机械偏差时精度与空间分辨率的关系。产生最大位置偏差的机械偏差确定了最恶劣的条件,这个偏差用来决定实际的空间分辨率,并据这一分辨率来求出精度。产生这些偏差的因素有齿轮啮合间隙、连杆松动和负载影响等。在转轴情况下,反馈元件被装在旋转关节上,而且负载离轴伸出一定距离;这时,齿轮啮合间隙的影响更大。对于大负载重量,横梁偏转开始发生作用,并降低精度。在静态条件下,横梁偏转作用存在于重力作用轴(接近水平方向的轴)。在动态条件下,横梁偏转作用存在于所有轴上。如果出现驱动啮合间隙,那么横梁偏转还可能引起严重的谐振。

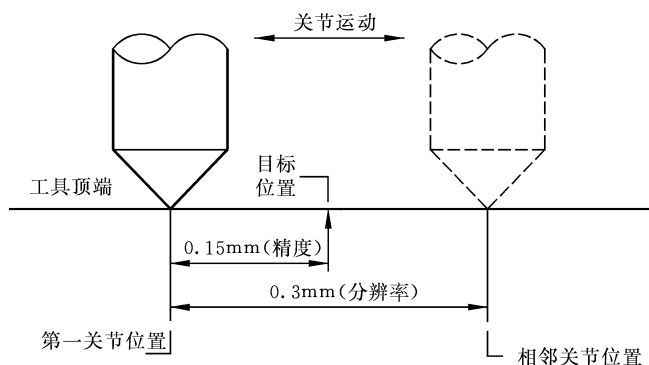


图 4.11 考虑机械偏差时精度与空间分辨率的关系

当机器人只在示教-复演模式下运行时,谈论其精度是没有意义的。在这种模式下,控制系统在机器人训练(示教)期间,只记录关节的位置,然后在作业期间复现这些位置。这时,重复性和分辨率是重要的技术性能。分辨率这一技术要求确定机械手是否能够足够接近

地到达训练(示教)时第一次作业的位置。重复性这一技术要求确定机械手在生产中第二次和以后各次作业时能否足够接近地到达目标位置。

当机器人控制系统中的计算机必须计算一系列关节位置,而且这些位置使工具顶端放置到以机械手独立坐标系描述的位置时,精度对于描述这样的机器人机械手才有意义。在下列加工时需要进行这种计算:

(1) 训练(示教)时所用的工具与生产时所用工具,具有不同的尺寸和形状。

(2) 操作顺序的训练不是对静止物体进行的,而是对正在移动的物体或处在不同位置的物体进行的。

(3) 机器人的运动是根据工件尺寸的几何信息进行计算的。

如果上述运动的计算是不准确的,那么高分辨率和精确的重复性就无济于事。因为每个位置的计算是变化的或在新的条件下进行的,而且完全取决于控制系统的计算。

在计算机器人的位置时,例如离线编程时,另一种精度,即实际测量与控制系统测量之间的符合程度是很重要的。例如,命令机器人移动 50 cm,而测量得到的实际移动为 49.75 cm。两者的绝对误差为 0.25 cm,其精度误差为 $0.25/50 \times 100\% = 0.5\%$,即在实际移动范围内保持不变,那么可对所有运动乘上一个考虑该误差的系数来修正。如果误差在整个工作范围内不是线性的,那么可能需要在控制系统内采用其他调节校正方法。这种精度误差有多种原因,不过往往是由关节位置计算时出现的数字误差或者不准确的基准测量引起的。

4.4.5 重复性

重复性(repeatability)又称为“重复定位精度”,指的是机器人自身重复到达原先被命令或训练位置的能力。重复性与精度有相似之处,不过它们被定义为稍微不同的性能概念。上面描述精度的 3 个因素,可被修正用来说明重复性。简单地说,这 3 个因素为分辨率、部件偏差和某个任意目标位置。重复性受分辨率和部件偏差的影响,但与目标位置无关。当谈及重复性时,只考虑机器返回预先训练位置的能力。根据精度的定义(最接近某个任意目标的两相邻位置间距离的一半),并且由于任意位置被消去而以优先示教过的最好分辨位置代替;所以,如果后面将要计算的其他影响减少至最小,那么重复性总是比精度好。

图 4.12 绘出了重复性的简单例子。开始时,机器人被定位在由控制分辨率所限制的尽

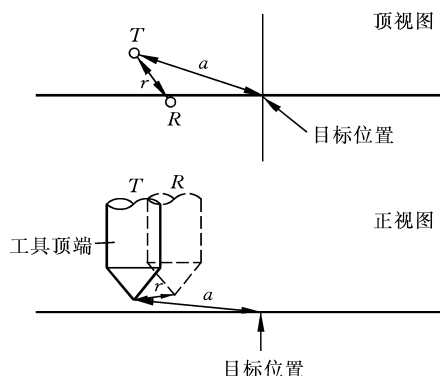


图 4.12 精度与重复性关系

a :精度; r :重复性; T :最接近的初始位置; R :重复位置

可能接近于任意目标的位置上,对应于位置 T 。接着,移动机器人,并命令它返回位置 T 。当它力图返回预先示教过的位置时,由于控制系统和机械部件的偏差,使此机器人停止在位置 R 处。位置 T 和 R 之间的差距就是此机器人重复性的一种量度。图 4.12 中的位置变化是被夸大的了。

重复性有两种:短期重复性和长期重复性。当要求机器人在几个月内执行同一任务时,要考察长期重复性问题。在一个长时期内,部件磨损和老化对重复性的影响必须加以考虑。在许多应用场合,机器人常常需要对新的任务重新编程。这时,只有短期重复性才是重要的。影响短时重复性的主要因素是控制系统和周围环境内的温度变化以及系统停车与启动之间的瞬态响应条件。同时影响长期重复性和短期重复性的因素通常为漂移。

图 4.13 关于空间分辨率、精度和重复性得出了下列结论:

- (1) 空间分辨率描述机器人所能控制的工具末端运动的最小增量。
- (2) 精度涉及一定空间分辨率下机器人对某个固定目标位置的定位能力。
- (3) 重复性描述工具末端自动返回某个预先示教过的位置时所产生的定位误差。
- (4) 一般来说,除了漂移外,重复性总是比精度好。

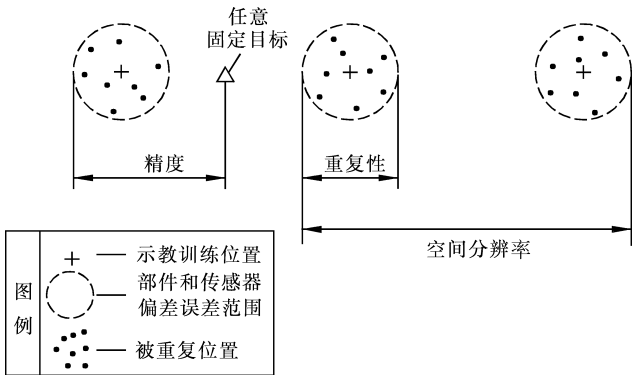


图 4.13 相邻增量工具末端示教和重复位置的二维描述

对于一台由计算机控制的机械手,当它记录工具位置时要获得良好的重复性比当它记录关节位置时困难得多。因为前者含有 3 个附加的数据处理步骤,而这 3 步计算可能导致定位误差。这 3 个处理步骤为:

(1) 把几个关节位置变换为一个工具位置,并加以存储。这叫作“返回解”(back solution)。

(2) 以某些有效方法,如平移、旋转或改变比例,对工具位置进行变换(对于简单的记录-复演式应用,这一步是不需要的)。

(3) 把所变换的工具位置变换回为一组关节位置。这叫作“手臂解”(arm solution)。

计算机执行这 3 步计算方法,可能对机械手的精度和重复性产生显著影响。这些操作运算的每一步精度取决于存储器的精度位数和算法的准确性。一般来说,位数越多,数字准确性越高。不过,对于很差的编程计算方法,有可能丢失很大一部分甚至全部准确性。有些实际系统采用浮点表示,而另一些系统则采用标量整数表示。对于所有情况,都要十分注意舍入误差;对于标量整数计算还必须防止上溢和下溢。

4.5 机械手的静态特性

稳态(或静态)问题是动态问题的特例。本节将研究机械手的稳态负荷(包括力和力矩)问题,这些问题包括:

- (1) 静力和力矩表示方法;
- (2) 不同坐标系间静负荷的变换;
- (3) 确定机械手静态关节力矩;
- (4) 确定机械手所载物体的质量。

4.5.1 静力和静力矩的表示

如同其他机械装置和运动系统一样,机器人系统中机械手上的力和力矩都是矢量,并以固定坐标系描述。用矢量 $\mathbf{f}$ 标记力,用 f_x, f_y 和 f_z 表示对于所定义坐标系各轴 x, y 和 z 的分力。同样地,用矢量 $\mathbf{m}$ 标记力矩,以 m_x, m_y 和 m_z 表示作用于任何定义的坐标系(而不是基坐标)各轴的分力矩。因为作用于物体上的力矩,其结果与作用点无关,所以,只有定义的坐标系才是有意义的。有时,还需同时考虑力和力矩两方面的作用。这时,我们用矢量 $\mathbf{F}$ 来标记:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

例如,作用于某物体的静力和力矩为 $\mathbf{f} = 10\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 150\mathbf{k}$, $\mathbf{m} = 0\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, 那么可表示为

$$\mathbf{F} = [10 \quad 0 \quad -150 \quad 0 \quad -100 \quad 0]^T$$

显然,在这里把力 $\mathbf{F}$ 理解为广义力,即包括力和力矩在内。在下文的讨论中,如果没有特别说明,就把力理解为广义力。

4.5.2 不同坐标系间的静力变换

讨论不同坐标系间的静力和静力矩变换问题,就是已知两个与一固定物体连在一起的不同坐标系以及作用在第一个坐标系原点的力和力矩,要求出作用在另一个坐标系上的以此新坐标系描述的等效力和等效力矩。等效力和等效力矩意味着它们对物体具有与原力和原力矩同样的外部作用效果。

用虚功法来求解这个问题。

设有一个作用于某个物体的力 $\mathbf{F}$, 它使物体发生假想的微分位移(虚拟位移) $\mathbf{D}$, 做出虚功 δW 。虚拟位移的极限趋向无穷小,所以系统的能量不变。这样,由许多作用在物体上的力所做的虚功必定为 0。

力 $\mathbf{F}$ 所做的虚功为

$$\delta W = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \quad (4.42)$$

式中, $\mathbf{D}$ 为表示虚拟位移的微分运动矢量:

$$\mathbf{D} = [d_x \quad d_y \quad d_z \quad \delta_x \quad \delta_y \quad \delta_z]^T \quad (4.43)$$

$\mathbf{F}$ 为力矢量

$$\mathbf{F}^T = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad m_x \quad m_y \quad m_z] \quad (4.44)$$

用坐标系 C 来描述此物体上某个不同的点。如果作用在该点的力和力矩产生同样的虚拟位移,那么应当做同样的虚功,即

$$\delta W = \mathbf{F}^T \mathbf{D} = {}^C \mathbf{F}^T {}^C \mathbf{D} \quad (4.45)$$

从而可得:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{D} = {}^C \mathbf{F}^T {}^C \mathbf{D} \quad (4.46)$$

式中,坐标系 C 内的虚拟位移 ${}^C \mathbf{D}$ 等价于参考坐标系内的虚拟位移 $\mathbf{D}$,因而可据式(3.137)求得

$$\begin{bmatrix} {}^C d_x \\ {}^C d_y \\ {}^C d_z \\ {}^C \delta_x \\ {}^C \delta_y \\ {}^C \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

或记为

$${}^C \mathbf{D} = \mathbf{J} \mathbf{D} \quad (4.48)$$

对于任何虚拟位移 $\mathbf{D}$,上述关系都是成立的,于是可得

$$\mathbf{F}^T = {}^C \mathbf{F}^T \mathbf{J}$$

稍加变换即可得

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^T {}^C \mathbf{F} \quad (4.49)$$

把式(4.49)写成矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 & 0 & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 & 0 & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & n_x & o_x & a_x \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & n_y & o_y & a_y \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z & n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^C f_x \\ {}^C f_y \\ {}^C f_z \\ {}^C m_x \\ {}^C m_y \\ {}^C m_z \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

对式(4.50)求逆可得

$$\begin{bmatrix} {}^C f_x \\ {}^C f_y \\ {}^C f_z \\ {}^C m_x \\ {}^C m_y \\ {}^C m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ o_x & o_y & o_z & 0 & 0 & 0 \\ a_x & a_y & a_z & 0 & 0 & 0 \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z & n_x & n_y & n_z \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z & o_x & o_y & o_z \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

再将式(4.51)左边和右边的前三行与后三行进行交换,有

$$\begin{bmatrix} {}^c m_x \\ {}^c m_y \\ {}^c m_z \\ {}^c f_x \\ {}^c f_y \\ {}^c f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z \\ o_x & o_y & o_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z \\ a_x & a_y & a_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_x & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_y & (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \\ 0 & 0 & 0 & o_x & o_y & o_z \\ 0 & 0 & 0 & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

比较式(4.52)和式(4.47)可见,两式右边的第一个矩阵,即雅可比矩阵是相同的。因此,不同坐标系间的力和力矩变换可用与微分平移变换及微分旋转变换一样的方法进行。因此,据式(3.137)至式(3.139)进行推论,能够得到

$$\begin{cases} {}^c m_x = \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \\ {}^c m_y = \mathbf{o} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \\ {}^c m_z = \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\begin{cases} {}^c f_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \\ {}^c f_y = \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} \\ {}^c f_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \end{cases} \quad (4.54)$$

式中, $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 分别为微分坐标变换的列矢量。用与微分平移一样的方法进行力变换,而用与微分旋转一样的方法进行力矩变换。

4.5.3 关节力矩的确定

现在,已能进行不同坐标系间力和力矩的变换。下面要用这种变换来计算与坐标系 T_6 中所加的力和力矩有关的等效关节力矩和力。再次采用虚功法来计算广义关节力。

令加于坐标系 T_6 的力和力矩所做的虚功等于各关节上所做的虚功。这一关系可由式(4.55)表示(见式(4.45)):

$$\delta W = {}^{T_6} \mathbf{F}^T {}^{T_6} \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{Q} \quad (4.55)$$

式中, $\boldsymbol{\tau}$ 为广义关节的列矢量。对于旋转关节为力矩;对于平移关节为力。 $\mathbf{Q}$ 为关节虚拟位移列矢量。对于旋转关节,为旋转 $\delta \mathbf{Q}$;对于棱柱式关节,为平移 $\delta \mathbf{d}$ 。

如果机械手处于平衡状态,那么式(4.55)的虚功为0。由式(4.55)有

$${}^{T_6} \mathbf{F}^T {}^{T_6} \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{Q} \quad (4.56)$$

据式(3.135)给出的雅可比公式的一般形式,以 $\mathbf{JQ}$ 代替式(4.56)中的 ${}^{T_6} \mathbf{D}$,可得

$${}^{T_6} \mathbf{F}^T \mathbf{JQ} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{Q} \quad (4.57)$$

式中, $\mathbf{J}$ 为雅可比矩阵。由式(4.57)可见,这个方程式与虚拟位移 $\mathbf{Q}$ 无关,因此式(4.57)变为

$${}^{T_6} \mathbf{F}^T \mathbf{J} = \boldsymbol{\tau}^T$$

倒置式(4.57)两边得

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T {}^{T_6} \mathbf{F} \quad (4.58)$$

这一关系式是十分重要的。如果已知加于坐标系 T_6 的力和力矩,那么据式(4.58)即可求出为保持机械手平衡状态而作用于各关节的力和力矩。如果机械手还能沿着作用力和力矩的方向自由运动,那么由式(4.58)所规定的关节力和力矩将得到设定的力和力矩的作用。值得进一步指出的是,式(4.58)对于具有任何自由度数的机械手都是成立的。

4.5.4 负荷质量的确定

当机械手移动一个未知负荷时,能够由关节误差力矩来求此负荷质量,其步骤如下:

- (1) 假设最严重的负荷情况,并设定速度增益高得足以防止系统产生欠阻尼响应。
- (2) 命令机械手运动,以恒速提升该负荷。
- (3) 一旦所有关节都进行运动,即可由

$$\mathbf{T} = k_e k_m \theta_e \quad (4.59)$$

计算其静态误差力矩和力。这些误差力矩和力与负荷质量有关。式(4.59)中, k_e 为关节伺服系统放大器增益, k_m 为直流伺服装置增益, θ_e 为静态位置误差。

(4) 假设机械手相对于基坐标系的位置由变换 $\mathbf{Z}$ 来表示,而且未知负荷被末端工具夹持在负荷质心上。这个末端位置由 ${}^T_6 \mathbf{E}$ 来描述(见图 2.9 和图 4.14)。

- (5) 用 $\mathbf{X}$ 表示负荷在基坐标系中的位置,即

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} \mathbf{T}_6 \mathbf{E} \quad (4.60)$$

- (6) 规定坐标系 $\{\mathbf{G}\}$ 为处于负荷质心且与基坐标系平行:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{px} \\ 0 & 1 & 0 & x_{py} \\ 0 & 0 & 1 & x_{pz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

在坐标系 $\{\mathbf{G}\}$ 中,末端夹手上 1kg 负荷所产生的力为

$${}^G \mathbf{F} = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.62)$$

- (7) 定义一个与 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{X}$ 有关的变换 $\mathbf{Y}$ (见图 4.14)

$$\mathbf{G} \mathbf{Y} = \mathbf{X}$$

即有

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_{px} \\ 0 & 1 & 0 & -x_{py} \\ 0 & 0 & 1 & -x_{pz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n_x} & x_{o_x} & x_{a_x} & x_{p_x} \\ x_{n_y} & x_{o_y} & x_{a_y} & x_{p_y} \\ x_{n_z} & x_{o_z} & x_{a_z} & x_{p_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n_x} & x_{o_x} & x_{a_x} & 0 \\ x_{n_y} & x_{o_y} & x_{a_y} & 0 \\ x_{n_z} & x_{o_z} & x_{a_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

- (8) 变换图 4.14,求取 ${}^G \mathbf{F}$ 对 ${}^T_6 \mathbf{F}$ 关节的微分变换 $\mathbf{Y} \mathbf{F}^{-1}$;再以 $\mathbf{Y} \mathbf{F}^{-1}$ 为微分坐标变换,据式(4.53)和式(4.54)求得 $\mathbf{T}_6$ 上对 1kg 负荷的作用力。

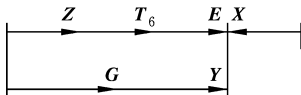


图 4.14 机械手变换图

- (9) 根据式(4.58)计算等效关节力 $\boldsymbol{\tau}$ 及 $\boldsymbol{\tau}^T$;根据式(4.59)计算机械手各关节的误差力矩 $\mathbf{T}$ 。

- (10) 进行内乘计算 $\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{T}$ 和 $\mathbf{T}^T \boldsymbol{\tau}$,并计算负荷质量

$$m = \frac{\tau^T T}{T^T \tau} \quad (4.64)$$

负荷质量一经确定,连杆 6 的质量就被修正,并重新计算动力学,以补偿此负荷质量。由于所进行的计算比较简单,所以不需要让机器人的机械手停下来。

4.6 本章小结

机器人动力学问题的研究,对于快速运动的机器人及其控制具有特别重要的意义。4.1 节研究了刚体动力学问题,着重分析了机器人机械手动力学方程的两种求法,即拉格朗日功能平衡法和牛顿-欧拉动态平衡法。4.2 节在分析二连杆机械手的基础上,总结出了建立拉格朗日方程的步骤,并据之计算出机械手连杆上一点的速度、动能和位能,进而推导出四连杆机械手的动力学方程及其简化计算公式。

在获得机器人机械手动力学方程的一般表达式之后,4.3 节举例分析计算了二连杆机械手的动力学方程和三连杆机械手的速度和加速度方程。其计算相当繁杂,必须十分细心。

机器人动力学问题的研究目的在于控制和保证机器人保持优良的动态特性和静态特性。4.4 节和 4.5 节分别讨论了该动态特性的静态特性。对于机器人动态特性,分别讨论了机器人的工作精度、稳定性、空间分辨率和重复性等。这些特性之间存在密切关系,但又是互有区别的,切不可混淆。对于静态特性,研究了机器人的力和力矩问题,包括静力和静力矩的表示、坐标系间静力的变换以及力矩和负荷质量的计算模型等。

习 题 4

4.1 建立如图 4.15 所示的二连杆机械手的动力学方程式,把每个连杆当作均匀长方形刚体,其长、宽、高分别为 l_i , W_i 和 h_i ,总质量为 m_i ($i=1,2$)。

4.2 建立如图 3.16 所示的三连杆机械手的动力学方程式。每个连杆均为均匀长方形刚体,其尺寸为长 $\times$ 宽 $\times$ 高 $=l_i \times W_i \times h_i$,质量为 m_i ($i=1,2,3$)。

4.3 二连杆机械手如图 4.16 所示。连杆长度为 d_i ,质量为 m_i ,重心位置为 $(0.5d_i, 0, 0)$,连杆惯量为 $I_{zz_i} = \frac{1}{3}m_i d_i^2$, $I_{yy} = \frac{1}{3}m_i d_i^2$, $I_{xx_i} = 0$,传动机构的惯量为 $I_{a_i} = 0$ ($i=1,2$)。

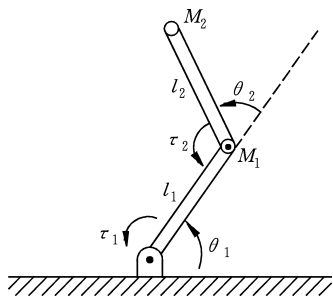


图 4.15 质量均匀分布的二连杆机械手

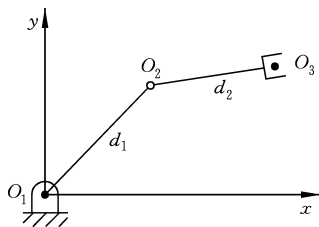


图 4.16 质量集中的二连杆机械手

(1) 用矩阵法求运动方程,即确定其参数 D_{ij} , D_{ijk} 和 D_i 。

(2) 已知 $\theta_1 = 45^\circ, \dot{\theta}_1 = \Omega, \ddot{\theta}_1 = 0, \theta_2 = -20^\circ, \dot{\theta}_2 = 0, \ddot{\theta}_2 = 0$, 求矩阵 T_1 和 T_2 。

4.4 建立如图 4.17 所示的机械手的变换矩阵和速度求解公式。假设各关节速度为已知, 只要把与第一个关节速度有关的各矩阵乘在一起即可。

4.5 建立如图 4.18 所示的二连杆机械手的动力学方程式。连杆 1 的惯量矩阵为

$${}^{c_1}I = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

假设连杆 2 的全部质量 m_2 集中在末端执行器一点上, 而且重力方向是垂直向下的。

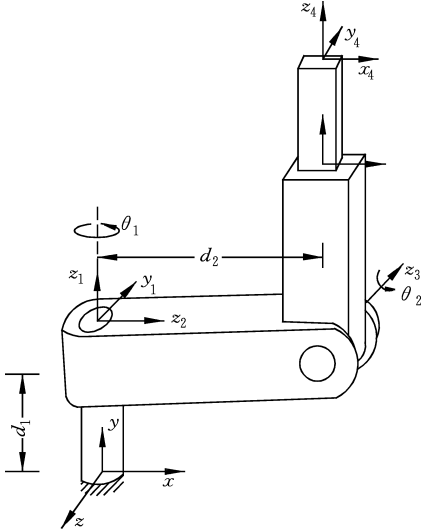


图 4.17 三连杆机械手

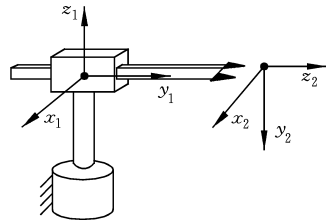


图 4.18 极坐标型二连杆机械手

4.6 求图 4.19 所示的三连杆操作手的动力学方程式。连杆 1 的惯量矩阵为

$${}^{c_1}I = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

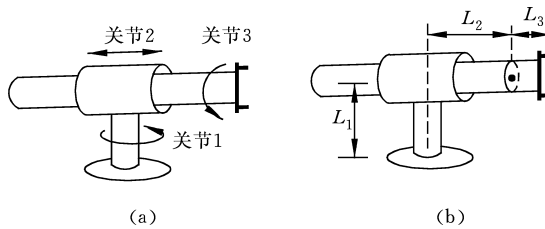


图 4.19 具有一个滑动关节的三连杆机械手

连杆 2 具有点质量 m_2 , 位于此连杆坐标系的原点。连杆 3 的惯量矩阵为

$${}^{c_3}I = \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}$$

假设重力的作用方向垂直向下,而且各关节都存在有黏性摩擦,其摩擦系数为 $v_i, i=1,2,3$ 。

4.7 有个单连杆机械手,其惯量矩阵为

$${}^{c_1}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}$$

假设这正好是连杆本身的惯量。如果电动机电枢的转动惯量为 I_m ,减速齿轮的传动比为 100,那么,从电动机轴来看,传动系统的总惯量应为多大?

4.8 试求如图 4.20 所示的三连杆机械手的动态运动方程式。已知下列机械手参数:

$$l_1 = l_2 = 0.5\text{m}, \quad m_1 = 4.6\text{kg}, \quad m_2 = 2.3\text{kg}, \quad m_3 = 1.0\text{kg}, \quad g = 9.8\text{m/s}^2$$

又假设连杆 1 和连杆 2 的质量都集中在各连杆的末端(远端)上,而连杆 3 的质心则位于坐标系 $\{3\}$ 的原点,即位于连杆 3 的近端上。连杆 3 的惯量矩为

$${}^{c_3}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

决定两个质心位置与每个连杆坐标系的关系为

$${}^1p_{c1} = I_1 X_1$$

$${}^2p_{c2} = I_2 X_2$$

$${}^3p_{c3} = 0$$

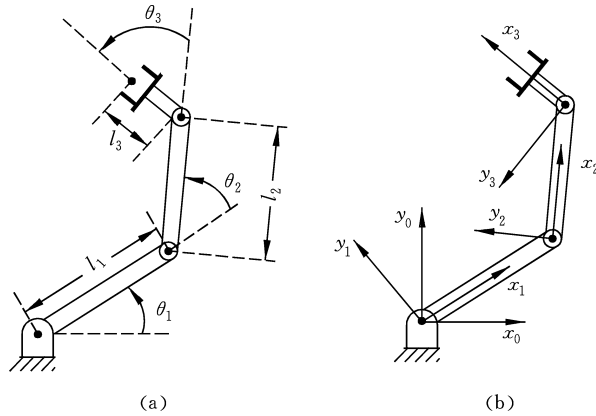


图 4.20 三连杆平面型机械手及其坐标系规定

4.9 作用于基坐标系的力和力矩等效于作用于坐标系 $\{T\}$ 的力和力矩:

$$\begin{bmatrix} {}^Tf_x \\ {}^Tf_y \\ {}^Tf_z \\ {}^Tm_x \\ {}^Tm_y \\ {}^Tm_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \\ \mathbf{o} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \\ \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \end{bmatrix}$$

(见式(4.53)和式(4.54))。式中, ${}^T\mathbf{f}$ 和 ${}^T\mathbf{m}$ 为坐标系 $\{T\}$ 中的力矩矢量,它们等效于基坐标

系中的力和力矩矢量 f 和 m 。

已知机械手在坐标系 $\{T_6\}$ 中用末端执行器 E 把物体 Q 夹持于方位 G , 使

$$T_6 E = QG$$

其中

$$T_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当物体坐标系 $\{Q\}$ 的作用力和力矩为 $[0, 0, 10, 0, 0, -100]^T$ 时, 试求相应的作用于坐标系 $\{T_6\}$ 的力和力矩。

4.10 某台具有一个旋转关节的单连杆机械手停在初始位置 $\theta = -5^\circ$ 处。要求在 4s 内平滑移动此关节至目标位置 $\theta = 80^\circ$ 。试求实现上述运动并把机械臂停到目标位置的三次方程式及其系数。

4.11 一台单连杆旋转式机械手停在初始位置 $\theta = -5^\circ$ 处, 要求在 4s 内平滑移动它至目标位置 $\phi = 80^\circ$, 并实现平滑停车。当路径为混合抛物线的线性轨迹时, 试计算此轨迹的相应参数, 并画出此关节的位置、速度和加速度随时间变化曲线。

4.12 已知

$$\phi_1(t) = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

和

$$\phi_2(t) = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3$$

为两个描述某个经过中间点的两段连续加速度仿样函数的三次方程式。令初始角度为 θ_0 , 中间点位置 θ_v , 目标点为 θ_g 。每个三次方程式将在 $t=0$ (开始时间) 至 $t=t_{fi}$ (结束时间, $i=1, 2$) 时间隔内进行计算。强加约束如下:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= a_{10} \\ \theta_v &= a_{10} + a_{11}t_{f1} + a_{12}t_{f1}^2 + a_{13}t_{f1}^3 \\ \theta_v &= a_{20} \\ \theta_2 &= a_{20} + 2a_{21}t_{f2} + a_{22}t_{f2}^2 + a_{23}t_{f2}^3 \\ 0 &= a_{11} \\ 0 &= a_{21} + 2a_{22}t_{f2} + 3a_{23}t_{f2}^2 \\ a_{11} + 2a_{12}t_{f1} + 3a_{13}t_{f1}^2 &= a_{21} \\ 2a_{12} + 6a_{13}t_{f1} &= 2a_{22} \end{aligned}$$

当 $\theta_0 = 5^\circ, \theta_v = 15^\circ, \theta_g = 40^\circ$ 以及每段持续时间为 1s 时, 画出这两段连续轨迹的关节位置、速度和加速度图。