

悦读科学丛书

发现的 乐趣

奇形怪状的维度之旅

邱为钢 黄 晶

著

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

有一种传言,认为几何的起源来自丈量土地的实际需求,但也有一些奇形怪状几何物体来自生活中,只要你有强烈的好奇心和持续的探索欲去发现和探究。儿科医生想知道削好完整的苹果皮平铺在桌面上是什么曲线,汽车工程师想知道能容纳最多糯米的四面体粽子表面是什么曲面,小视频平台观众想知道正四面体框架内的莱洛四面体肥皂泡的体积和表面积。包括以上类似问题的答案均可以在本书找到。本书从日常生活的有趣现象中收集整理了各 10 种一维曲线、二维曲面和三维立体,从数学和物理理论上严格推导了这些几何体的解析表达式,并给出了数学软件程序的代码,方便读者观看和演示。

本书适合对数学仍旧保持童心的读者阅读,也可作为中小学 STEAM(Science、Techonolgy、Engineering、Arts、Methematic)教育的参考辅导读物。

版权所有,侵权必究。举报: 010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

发现的乐趣: 奇形怪状的维度之旅/邱为钢, 黄晶著. —北京: 清华大学出版社, 2023. 8
(悦读科学丛书)
ISBN 978-7-302-62826-2

I. ①发… II. ①邱… ②黄… III. ①物理学—普及读物 IV. ①O4-49

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 060936 号

责任编辑: 鲁永芳
封面设计: 常雪影
责任校对: 欧 洋
责任印制: 曹婉颖

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编: 100084

社 总 机: 010-83470000 邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 河北华商印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 170mm×240mm 印 张: 9.75

字 数: 182 千字

版 次: 2023 年 8 月第 1 版

印 次: 2023 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 56.00 元

产品编号: 090678-01

前言

PREFACE

世

面上已经有不少有趣的数理科普书,国外的如大师加德纳系列,国内的如顾森森的《思考的乐趣》,蒋讯的《数学都知道》,曹则贤的《惊艳一击》。为何还要写一本数理的高级科普书?一是个人的喜好、风格、品味不同,多一本就是多一道风景。作为不多见的数理科普书,多多益善。二是本书中的这些小问题其他同类书多未涉及。譬如苹果皮整个削完后平铺在桌面上的曲线;自行车刹车线两端捻在一起在三维空间呈现的曲线;两个平行共轴正三角形之间的肥皂膜形状;塑料片搭建起来的超级足球烯;……这些小玩意儿,生活中随处可见,自己动手也能做得出来,但是想要完全理解这些线、面、体形状背后的数学和物理原理,则需要强烈而持续的兴趣。有些问题,我至少花了8年时间才稍微明白。本书的定位是高级科普,如何处理文字与公式之间的比重,是个十分棘手的问题。对于简单偏数学的问题,公式多一点;对于复杂有物理背景的问题,则主要给出思路,公式相对少一些。本书中的三维图形和动画,纸张不能展现其风采的十分之一,幸好有数学软件如 Mathematica, Maple 等,可以全方位展现。本书最有价值的部分就是给出了每节的计算程序,几乎都是原创的。感兴趣的读者可以扫描二维码下载、运行,方便读者动手验证,尝试一下探索的乐趣。总之本书的阅读方式是读者可以随便翻,先发现你最感兴趣的图,再尝试运行各问题后的程序,想继续探究的话再来阅读文字和公式。





我写书的一贯目的是分享。我喜欢发现有趣的东西，挑战自己的智力极限，记录发现的过程和乐趣，并十分愿意介绍给读者。书中的内容本人也并未完全掌握，希望和读者共同探索。

邱为钢

2023年6月

清华大学出版社

目录

CONTENTS

第一章 奇妙的线 /1

- 1 苹果皮曲线 /1
- 2 追击曲线 /5
- 3 自行车车轨 /8
- 4 嵌合雪花片滚动曲线 /11
- 5 方轮和轨道 /17
- 6 球的拓印滚动 /21
- 7 球面悬链线 /25
- 8 弹性曲线 /29
- 9 肥皂膜中泪滴状鱼线 /36
- 10 化圆为方曲线 /39

第二章 漂亮的面 /42

- 11 稳定漂浮的木桩轮廓 /42
- 12 蘑菇喷泉面 /47
- 13 正多边形边界的极小曲面 /51
- 14 交错闭合的薯片 /57
- 15 卷起来的双圆锥 /63



- 16 花瓣的形状 /66
- 17 注水气球的形状 /69
- 18 无重力下转动液滴的形状 /72
- 19 球面投影曲线 /79
- 20 落球牛奶面 /81

第三章 有趣的体 /85

- 21 内切四面体的迭代极限 /85
- 22 正多面体之间的变换 /89
- 23 磁棒小球多面体 /92
- 24 超级对偶多面体 /96
- 25 充气正多面体 /107
- 26 正多面体对称性的圆柱相交体 /112
- 27 正多面体对称性的肥皂泡 /121
- 28 正四面体对称性的粽子 /134
- 29 正方体挖出圆柱体后的镂空体 /138
- 30 流水中侵蚀的黏土团 /142

参考读物 /145

后记 /147



1 苹果皮曲线

微博博主“儿科医生赵娟”2020年12月16日在微博上问了这样一个有趣的问题：赵大夫一刀削了一条完整的苹果皮，想起了一道智力题，如果把苹果皮铺在桌面上，会是什么形状呢？她给出平铺在桌面上的苹果皮曲线如图 1-1 所示。



图 1-1 削下来的完整苹果皮铺在桌面上的曲线

2021 年元旦，我把这个问题转发到慕理书屋微信群里，重庆一中的物理奥赛教练李忠相老师给出了圆满的答案。他的解答如下。

为了简便起见,将苹果视为一个标准的球形,将其半径记为 R ,削出的苹果皮宽度处处相等,皆为 a 。让刀口从最高点 Q 开始切入,把刀口所在处 P 与球心 O 的连线 PO 与竖直线 OQ 的夹角记为 θ 。那么切入处 $\theta=0$;刀口每转一圈, θ 增加 a/R ;当 $\theta=\pi/2$ 时,苹果削至一半;当 $\theta=\pi$ 时,苹果削完。若果皮宽度 a 取值较小,可认为刀口转动一周的过程中 θ 变化量较小,刀口的路径接近水平。

从 $\theta=0$ 刀口切入,到 θ 处,削下苹果皮可视为一球冠,其总面积为

$$A = 2\pi R^2 (1 - \cos\theta) \quad (1-1)$$

相应果皮的总长度为

$$S = \frac{A}{a} = \frac{2\pi R^2 (1 - \cos\theta)}{a} \quad (1-2)$$

微分可得长度微元 dS 和参量 θ 微元 $d\theta$ 之间的关系为

$$dS = \frac{2\pi R^2}{a} \sin\theta d\theta \quad (1-3)$$

在 θ 处,一圈苹果皮的周长为

$$l = 2\pi R \sin\theta \quad (1-4)$$

由于果皮有宽度 a ,果皮两边对应的 θ 有差异

$$\Delta\theta = \frac{a}{R} \quad (1-5)$$

果皮两边的周长也有差异

$$\Delta l = 2\pi R \cos\theta \Delta\theta = 2\pi a \cos\theta \quad (1-6)$$

平放至平面后,由于两边周长差,导致果皮延伸方向偏转了一个角度

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta l}{a} = 2\pi \cos\theta \quad (1-7)$$

果皮长度微元 dS 对应的偏转角微元为

$$d\alpha = \frac{dS}{l} \Delta\alpha = \frac{2\pi R}{a} \cos\theta d\theta \quad (1-8)$$

积分可得从 $\theta=0$ 到 θ 处,果皮平放后延伸方向总的偏转角为

$$\alpha = \frac{2\pi R}{a} \sin\theta \quad (1-9)$$

以平放后 $\theta=0$ 处果皮的延伸方向为 x 轴,建立平面直角坐标系,则参量 θ 处,果皮伸长方向与 x 轴的夹角为 α ,于是有

$$\begin{cases} dx = dS \cdot \cos\alpha \\ dy = dS \cdot \sin\alpha \end{cases} \quad (1-10)$$

代入具体表达式为

$$\begin{cases} dx = \frac{2\pi R^2}{a} \sin\theta \cos \frac{2\pi R \sin\theta}{a} d\theta \\ dy = \frac{2\pi R^2}{a} \sin\theta \sin \frac{2\pi R \sin\theta}{a} d\theta \end{cases} \quad (1-11)$$

由(1-9)式可知,当 $0 < \theta < \pi/2$ 时,总偏转角 α 随参量 θ 的增加而增加;当 $\pi/2 < \theta < \pi$ 时,总偏转角 α 随参量 θ 的增加而减小,即开始反向绕转;当 $\theta = \pi$ 时,总偏转角 α 因为正反抵消而归零。定性分析与实际情况符合。对(1-11)式积分即可得到 x 、 y 分量坐标的参数方程,但这个积分似乎不太容易完成,可以借助数学软件来计算画图。定义一个参数 $k = R/a$,当 $k = 6.5$ 时,苹果皮的理论曲线如图 1-2 所示。

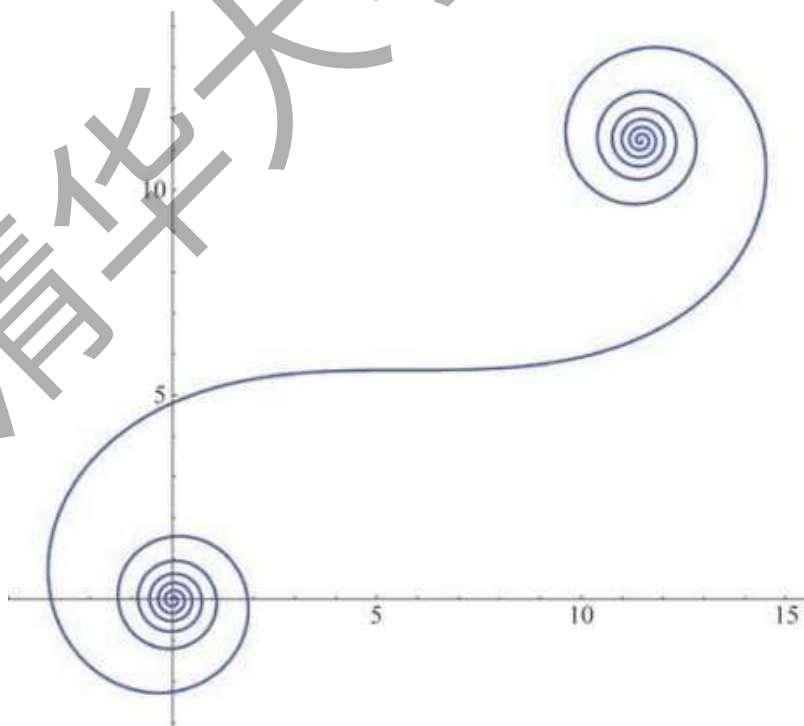


图 1-2 苹果皮的理论曲线

为了与计算模型更加贴近和操作方便,李忠相老师把一个半径为 $R=3.25\text{ cm}$ 的海洋球剪成宽度为 $a=0.5\text{ cm}$ 的条状,再将其平铺于平面上。海洋球皮展开曲线的实物如图 1-3 所示。



图 1-3 海洋球皮展开曲线的实物图

取合适的相似比和转动角度,海洋球皮展开曲线实物和理论拟合曲线对比图如图 1-4 所示。



图 1-4 海洋球皮展开曲线的实物和理论对照图

本书所用的数学软件是 Mathematica,简称 MMA。MMA 编制的程序请扫描 I 页二维码下载。

讨论如下:数学上,球面不可能完全展开为平面,实际操作中,海洋球剪下部分是不可能完全贴平在桌面上的,剪下部分的宽度不可能处处一样,种种原因,导致实物曲线与理论曲线有差别,但是两个曲线整体趋势是一样的。

2 追击曲线

正三角形三个顶点上有三个追击者,以不变的速率追击下一位。由于体系有很强的对称性,很容易知道他们会在有限时间内追击到同一点——正三角形的中心。那么任意三角形上,三个追击者需要满足什么条件能在同一点相遇?这个点是原来三角形的什么内点?

从运动学出发,如果存在一个中心点,追击者的位形是旋转缩小的相似三角形,旋转中心是中心点,追击者相对中心点的距离成比例匀速缩小,各点速度方向与矢径方向的夹角 θ 不变且相等。这种情况满足追击条件:每个追击者的速率不变,追击方向始终对准下一个。设三角形初始位置是 A_1 、 A_2 、 A_3 ,相应的边长为 l_1 、 l_2 、 l_3 ,内角为 α_1 、 α_2 、 α_3 。相遇点 P 就是三角形的布洛卡点(Brocard's point), θ 就是布洛卡角,满足

$$\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \angle PA_3A_1 = \theta, \quad \cot\theta = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{4\Delta} \quad (2-1)$$

式中 Δ 是三角形的面积。复数形式下布洛卡点的坐标和三角形三个顶点的坐标有如下关系:

$$z_B = \frac{l_2^{-2}z_1 + l_3^{-2}z_2 + l_1^{-2}z_3}{l_2^{-2} + l_3^{-2} + l_1^{-2}}$$

设 P 点到三个顶点的距离为 m_1 、 m_2 、 m_3 ,由于追击速度与矢径的夹角不变,那么速率之比等于径向速度之比,而径向速度又正比于矢径的长度。这样,三个追击速率之比为

$$v_1 : v_2 : v_3 = m_1 : m_2 : m_3 = \frac{l_2}{l_1} : \frac{l_3}{l_2} : \frac{l_1}{l_3} = k_1 : k_2 : k_3 \quad (2-2)$$

只有满足这样的初始速度条件,才能相遇到布洛卡点 P 。设第一个追击者的速率为 $k_1 v$,起始点与布洛卡点的距离 $m_1 = k_1 r$,那么矢径与时间的关系是

$$r_1(t) = k_1(r - vt \cos\theta) \quad (2-3)$$



角速度满足

$$\omega(t)r_1(t) = k_1 v \sin \theta \quad (2-4)$$

积分得到

$$\phi(t) - \phi_1 = \tan \theta \ln[m_1/r_1(t)] \quad (2-5)$$

化简得到

$$r_1 = m_1 \exp[-\cot \theta (\phi - \phi_1)] \quad (2-6)$$

在极坐标下是对数螺线。等腰直角三角形上的追击曲线如图 2-1 所示。

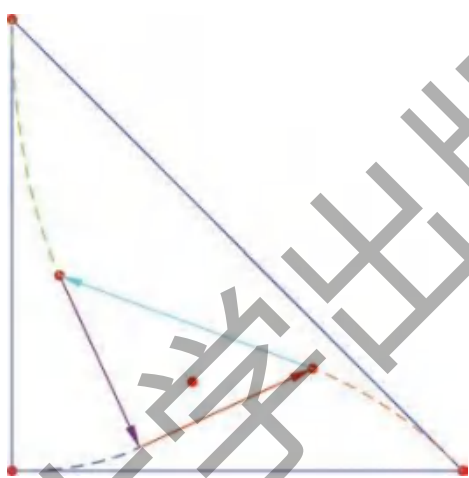


图 2-1 等腰直角三角形上的追击曲线

如果把以上处理方法推广到四面体,认为四个空间追逐者也是以四面体的布洛卡点为中心(相遇点),矢径按比例匀速减小,同时转动。这样的处理方法,对于最简单的正四面体追逐问题就会出现矛盾。假定四个追逐者的速率为 1,正四面体的四个顶点分别为 $A_1(1,1,1), A_2(1,-1,-1), A_3(-1,-1,1), A_4(-1,1,-1)$,那么相邻两个追击者相遇时间为 $T=4\sqrt{2}/3=1.8856$ 。任意一个追逐者到达相遇点的时间为 $T=3/\sqrt{2}=2.1213$ 。这两个时间显然不等。所以追击者的位形不同于三角形的结论,同一时刻的四个点不再组成一个正四面体。我们可以通过数值求解追击方程来验证。数值计算得到追击时间为 $T=2.2956$,相遇到原点。在追击过程中任一时刻满足

$$l_{12} = l_{23} = l_{34} = l_{41}, \quad l_{13} = l_{24}, \quad l_{13} \perp l_{24} \quad (2-7)$$

即追击者位于绕 z 轴旋转的不断缩小的长方体的四个顶点上,长宽相等,而不是原先设想的正方体的四个顶点上。某一时刻四个追击者的追击曲线如图 2-2 所示。

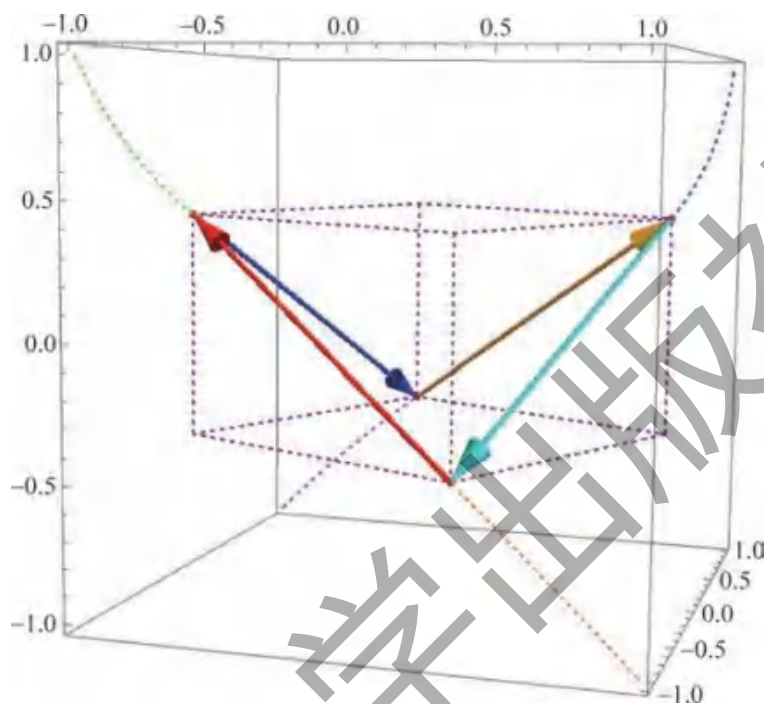


图 2-2 正四面体上四个相互追击者的追击曲线

对于任意的四面体,四个追击者相遇到一点的初始条件,目前我还没有算出来。期望有读者来解决这个难题。

MMA 编制的程序请扫描 I 页二维码下载。

3 自行车车轨

自行车前后两个轮胎在雪地上滚动,留下两条轨迹,如何判断哪条是前、哪条是后? 参考书籍 *Which Way Did The Bicycle Go* 封面就是两个侦探在研究雪地上的自行车轨迹,如图 3-1 所示。

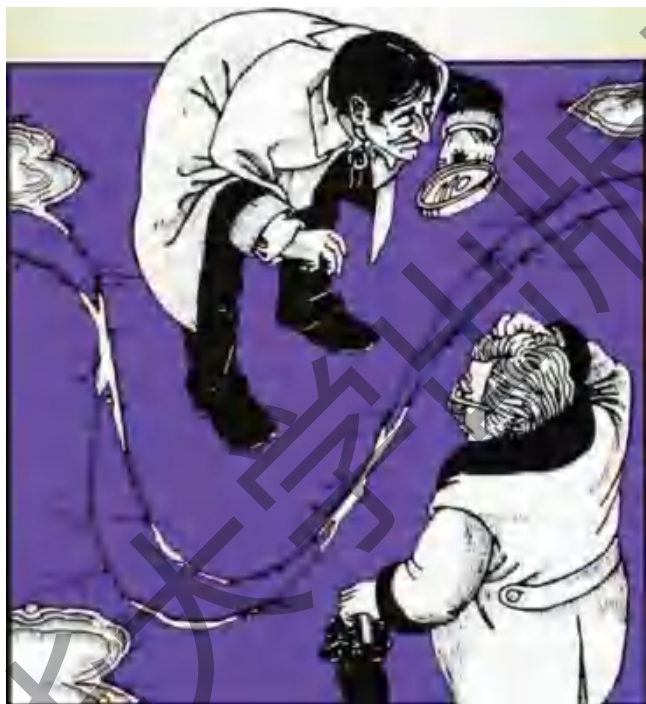


图 3-1 哪个轨迹是前轮的

实践和理论表明,方向变化剧烈的是前胎轨迹,方向变化缓慢的是后胎轨迹。这个有趣的问题可以抽象为以下数学物理模型:一个质点在一段曲线(后胎轨迹)上运动,沿着切线方向延伸固定长度为另一点,这个点的运动轨迹就是前胎轨迹。假定后胎曲线的弧长参数坐标是 $r(s)$,那么 $r'(s)$ 就是切线方向。沿着这个切线方向延伸 l 距离,就是正方向的前胎坐标

$$r_1(s) = r(s) + lr'(s) \quad (3-1)$$

沿着这个切线反方向延伸 l 距离,另一个“虚拟”对偶前胎坐标是

$$r_2(s) = r(s) - lr'(s) \quad (3-2)$$

先考查正方向的前胎,其表达式为(3-1)式,两边对弧长参数 s 求导,得到

$$r_1'(s) = r'(s) + lr''(s) \quad (3-3)$$

由弧长参数本身定义

$$r'(s) \cdot r'(s) = 1 \quad (3-4)$$

两边对弧长 s 求导,得到

$$r'(s) \cdot r''(s) = 0 \quad (3-5)$$

这说明 $r'(s)$ 和 $r''(s)$ 是垂直的。为计算方便,采用复数形式

$$r''(s) = i\kappa r'(s) \quad (3-6)$$

式中 κ 是后胎曲线的曲率

$$\kappa = |r''(s)| \quad (3-7)$$

这样(3-3)式可以写为

$$r_1'(s) = r'(s) + i\kappa l r'(s) = (1 + i\kappa l) r'(s) \quad (3-8)$$

设前胎曲线弧长参数为 s_1 ,那么由(3-8)式可知

$$ds_1 = |dr_1(s)| = |r_1'(s)| ds = \sqrt{1 + l^2 \kappa^2} ds \quad (3-9)$$

设前胎曲线切线方向与后胎曲线切线方向的夹角为 θ ,由(3-3)式可以看出, $r'(s)$ 和 $lr''(s)$ 是直角三角形的两条边,即

$$\tan \theta = l\kappa \quad (3-10)$$

由前后胎轨迹的联系(3-8)式,计算得到前胎曲率表达式

$$\kappa_1 = \frac{\sin \theta}{l} + \frac{d\theta}{ds_1} \quad (3-11)$$

考虑一个最简单的例子,前胎轨迹是直线,譬如说 x 轴,那么 $\kappa_1 = 0$, (3-11)式化为

$$\frac{\sin \theta}{l} + \frac{d\theta}{ds_1} = 0 \quad (3-12)$$

作变量代换 $p = \tan(\theta/2)$, (3-12)式化为

$$\frac{p}{l} + \frac{dp}{ds_1} = 0$$

其解为

$$p = c \exp(-s_1/l)$$

如果取待定参数 c 为 1, 那么

$$\theta = 2 \arctan [\exp(-s_1/l)]$$

后胎曲线的参数方程是

$$x(s_1) = s_1 - l \cos \{2 \arctan [\exp(-s_1/l)]\}$$

$$y(s_1) = l \sin \{2 \arctan [\exp(-s_1/l)]\}$$

虚拟对偶前胎的参数方程是

$$x_f(s_1) = s_1 - 2l \cos \{2 \arctan [\exp(-s_1/l)]\}$$

$$y_f(s_1) = 2l \sin \{2 \arctan [\exp(-s_1/l)]\}$$

这个曲线和前胎轨迹曲线- x 轴, 文献上称为“自行车对应”(bicycle correspondence)。

这三个曲线如图 3-2 所示, 其中虚线是虚拟对偶前胎的轨迹。

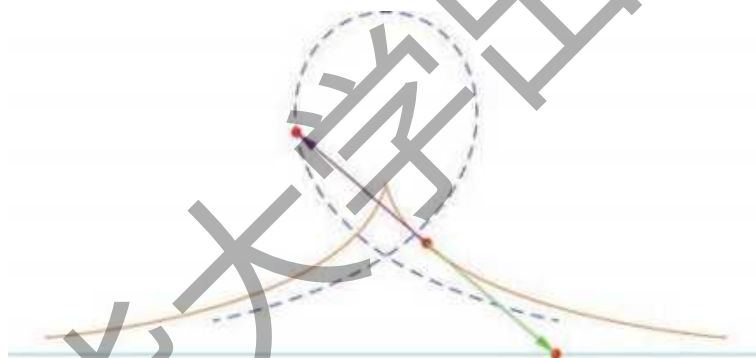


图 3-2 前胎轨迹是直线的后胎轨迹, 以及“反向”滚动的前胎轨迹

与实际自行车轨迹相比, 图 3-2 中虚线表示的“反向”前胎, 是真实的前胎, 方向剧烈变化。

MMA 编制的程序请扫描 I 页二维码下载。

4 嵌合雪花片滚动曲线

儿童玩具雪花片一般有 8 个缺口,每个缺口之间正好能相互嵌合。嵌合的雪花片能在地面上扭摆地滚动起来,如图 4-1 所示。请扫右侧二维码观看视频。



那么,如何从运动学的角度来解释这种滚动行为? 它的质心轨迹是什么? 它与地面两个接触点的轨迹又是什么? 从模型角度看,就是两个一样的圆盘,垂直相交,主要参数是圆盘的半径和圆心距。我们要研究这个约束刚体-嵌合圆盘在地面上纯滚动的模式。

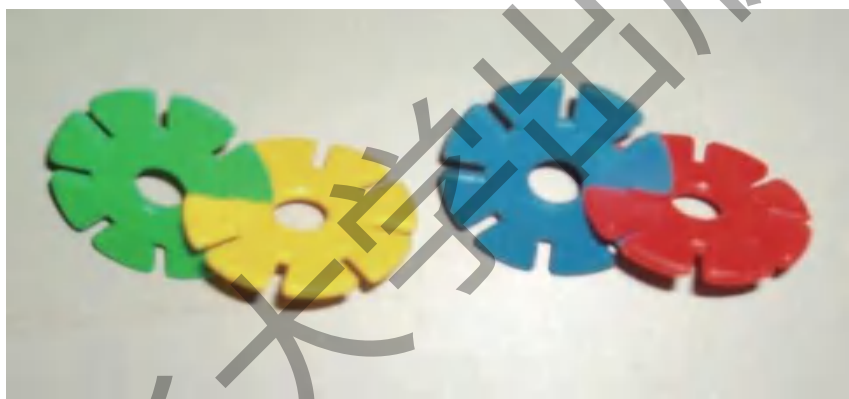


图 4-1 垂直嵌合的雪花片

如图 4-2 所示, O_1 、 O_2 是两个圆的圆心, O 是体系的质心,位于线段 O_1O_2 的中点。 A_1 、 A_2 是两个圆与地面的接触点,在点 A_1 、 A_2 处两个圆的切线和 O_2O_1

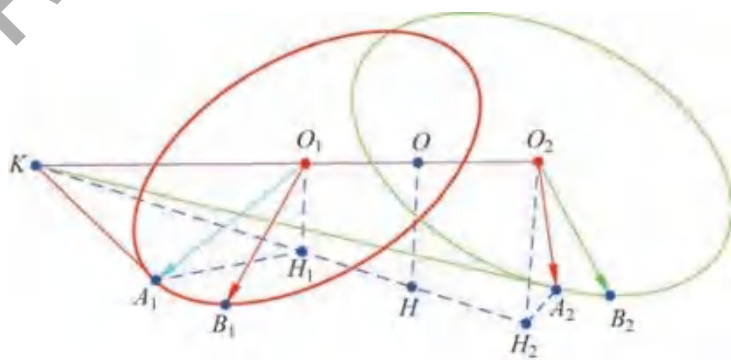


图 4-2 嵌合圆盘的几何描述

的延长线交于地面同一点 K 。 B_1 、 B_2 是两个圆上的固定点,起始时刻与地面接触。 H_1 、 H 、 H_2 分别是 O_1 、 O 、 O_2 在地面的投影(垂足)。

定义 θ_1 、 θ_2 是两个圆的角度参数, β 是圆心连线与地面的倾斜角,那么有

$$\angle O_1KA_1 = \angle A_1O_1B_1 = \theta_1, \quad \angle O_2KA_2 = \angle A_2O_2B_2 = \theta_2, \quad \angle OKH = \beta$$

于是

$$O_1K \sin \theta_1 = O_1A_1, \quad O_2K \sin \theta_2 = O_2A_2$$

设两个圆的半径为单位 1,圆心距 $O_1O_2 = k$,由 $O_2K - O_1K = O_1O_2$ 得到

$$\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} = k \quad (4-1)$$

由立体几何知识可知

$$\tan \beta = \frac{\tan \theta_1 \tan \theta_2}{\sqrt{\tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2}} \quad (4-2)$$

由图 4-2 可知

$$OH = OK \sin \beta, \quad 2OK = O_1K + O_2K$$

由(4-1)式、(4-2)式计算得到嵌合圆盘质心的纵坐标 $z_c = OH$ 为

$$z_c = \left(\frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{k}{2} \right) \sin \beta = \frac{1 + \frac{k}{2} \sin \theta_1}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2 \theta_1 + 2k \sin \theta_1 + 2}} \quad (4-3)$$

此时如果(4-3)式两边对 θ_1 求导,得到

$$\frac{dz_c}{d\theta_1} = - \frac{(k^2 - 2) \cos \theta_1 \sin \theta_1}{2[2 + 2k \sin \theta_1 + (k^2 - 1) \sin^2 \theta_1]^{3/2}} \quad (4-4)$$

可以看出,当圆心距 $k = \sqrt{2}$ 时,嵌合圆盘滚动时,质心高度会保持 $\sqrt{2}/2$ 不变。

接下来求圆盘 1 所在平面与竖直平面的夹角 δ 的余弦。设 $\overrightarrow{O_1B_1}$ 延长线交于地面一点 F ,从 O_1 作一条垂直于 O_1O_2 的线交地面于 G 。那么

$$O_1G = O_1K \tan \beta, \quad O_1F = O_1K \tan \theta_1$$

$\triangle O_1GF$ 是一个直角三角形, 且 $\delta = \angle GO_1F$

$$\cos\delta = \frac{O_1G}{O_1F} = \frac{\tan\beta}{\tan\theta_1} = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{(k^2 - 2)\sin^2\theta_1 + 2k\sin\theta_1 + 2}} \quad (4-5)$$

设起始时刻圆心的连线 O_1O_2 与地面平行, 并以此为 x 轴方向, 垂直地面向上为 z 轴方向, 与 x 轴和 z 轴都垂直的方向定为 y 轴方向。而绕质心 O 的转动可以分解为三个连续转动: 第一个转动是绕 z 轴转动 ϕ 角度, 这时 $Oxyz$ 转化为 $Ox'y'z'$; 第二个转动是绕 y' 轴转动 $-\beta$ 角度, 这时 $Ox'y'z'$ 转化为 $Ox''y''z''$; 第三个转动是绕 x'' 轴转动 $-\psi$ 角度; 设 $R(\mathbf{n}, \varphi)$ 表示绕 $\mathbf{n}$ (单位矢量) 方向转动 φ 角度的转动矩阵, 质心系坐标系为 $\mathbf{r}$ 的一点在体系滚动后相对地面的坐标系的位矢是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + R(\mathbf{i}'', -\psi)R(\mathbf{j}', -\beta)R(\mathbf{k}, \phi)\mathbf{r}' \quad (4-6)$$

式中,

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1), \quad \mathbf{j}' = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (4-7)$$

$$\mathbf{i}'' = (\cos\beta\cos\phi, \cos\beta\sin\phi, \sin\beta) \quad (4-8)$$

由图 4-2 可以看出, A_1 点相对 O 点的矢量为 $\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A_1}$, $\overrightarrow{O_1A_1}$ 可以沿着两个正交方向 $\overrightarrow{O_1B_1}$ 和 $\overrightarrow{O_1K}$ 分解, 由此计算得到 A_1 、 A_2 在质心系中坐标分别为

$$\mathbf{r}'_1 = (-k/2 - \sin\theta_1, -\cos\theta_1/\sqrt{2}, -\cos\theta_1/\sqrt{2}) \quad (4-9)$$

$$\mathbf{r}'_2 = (-k/2 - \sin\theta_2, \cos\theta_2/\sqrt{2}, -\cos\theta_2/\sqrt{2}) \quad (4-10)$$

体系滚动后 A_1 、 A_2 与地面接触, 即相对地面坐标的第三分量始终为零, 计算得到 ψ 角度满足的条件为

$$\cos(\psi + \pi/4) = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{(k^2 - 2)\sin^2\theta_1 + 2k\sin\theta_1 + 2}} \quad (4-11)$$

这个结果与立体几何计算得到的结果(4-5)式一致。

再看体系绕质心转动的角速度, 总角速度是三个转动角速度的矢量和

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{k} - \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}' - \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{i}'' \quad (4-12)$$

体系作纯滚动的必要条件是 A_1 、 A_2 相对地面的速度为零,即

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) = \mathbf{0} \quad (4-13)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c) = \mathbf{0} \quad (4-14)$$

(4-14)式减去(4-13)式,得到

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{0} \quad (4-15)$$

(4-15)式意味着角速度与 A_1A_2 连线平行,或角速度的第三分量为零,由(4-12)式计算得到公转角 ϕ 与自转角 ψ 的关系式

$$d\phi = \sin\beta d\psi \quad (4-16)$$

以及角速度的表达式

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\beta}{dt} \sin\phi - \frac{d\psi}{dt} \cos\beta \cos\phi, -\frac{d\beta}{dt} \cos\phi - \frac{d\psi}{dt} \cos\beta \sin\phi, 0 \right) \quad (4-17)$$

由图 4-2 可以看到,在地面固定坐标系中, $\mathbf{r}_1$ (A_1 点位移)减去 $\mathbf{r}_c$ (O 点位移)为

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = (x_1 - x_c, y_1 - y_c, -z_c) \quad (4-18)$$

把(4-17)式和(4-18)式代入(4-13)式,计算得到

$$\begin{cases} dx_c = -z_c (\cos\beta \sin\phi d\psi + \cos\phi d\beta) \\ dy_c = z_c (\cos\beta \cos\phi d\psi - \sin\phi d\beta) \end{cases} \quad (4-19)$$

数值求解微分方程组(4-19)、(4-16)、(4-11)、(4-3),就能得到质心坐标 x_c 、 y_c 、 z_c ,转动角度 ϕ 、 β 、 ψ 与参数角 θ_1 或 θ_2 的关系式,进而画出体系与地面接触点形成的轨迹以及滚动动画模拟。当圆心距等于圆盘半径的 $\sqrt{2}$ 倍时,即质心高度保持不变,嵌合圆盘滚动模拟如图 4-3 所示。

计算还发现,当两个圆盘大小不一时,圆心距取合适的长度,嵌合圆盘能作周期对称性运动,三重对称性的嵌合圆盘的滚动模拟如图 4-4 所示。



图 4-3 质心高度不变嵌合圆盘的滚动模拟

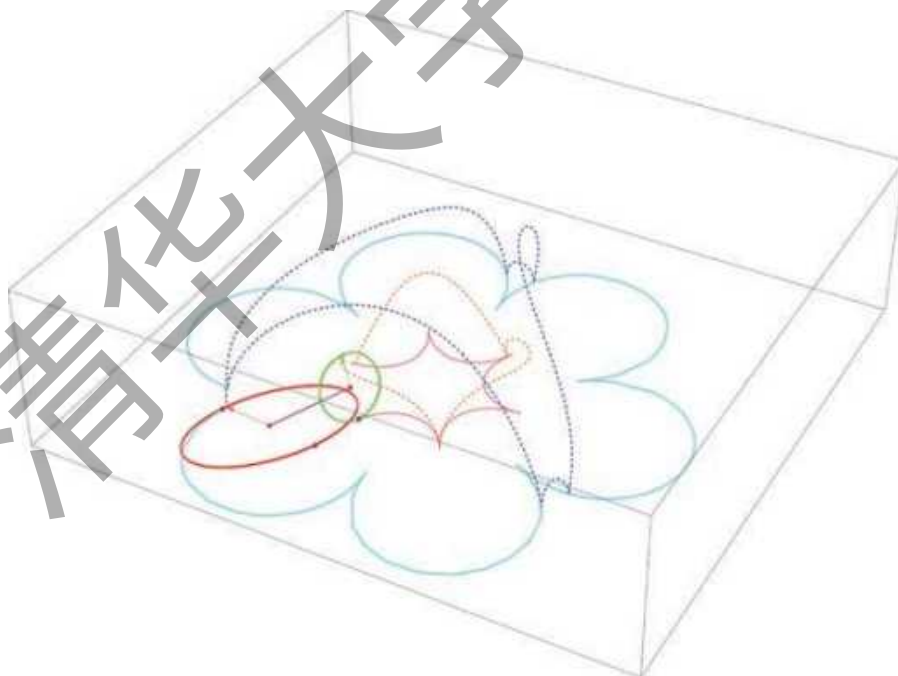
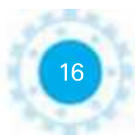


图 4-4 大小不同嵌合圆盘的滚动模拟



本节的程序和 Hiroshi Ira 用数学方法编制的程序,都是 2011 年开始的。用物理方法编制的程序,相对数学方法更加简洁,且能推广到大小不同的圆环。

MMA 编制的程序请扫描 I 页二维码下载。

参 考 文 献

- [1] HIROSHI I. Two circle roller[EB/OL]. <http://ilabo.buhsiz.jp/>.

清华大学出版社

5 方轮和轨道

人类发明的圆形车轮大大解决了运输东西的困难,但是为何没有正方形车轮呢?这种方轮在什么样的轨道上能平稳行驶,保持轴心高度不变?有大量的文献讨论过这个问题,不少科技馆中还有实物模型,如图 5-1 所示。



图 5-1 方轮自行车和轨道

我们继续脑洞大开,任意给出一个车轮形状曲线,给定轴心位置,是否存在一个统一的处理方法,把对应的轨道曲线求出来?轨道曲线给定了,反过来能求出来对应的车轮曲线吗?这个对应是唯一的吗?这个问题于 2016 年首先被巴西的瓦拉达雷斯(Valadares)解决,但他的表达式用横坐标 x 来表达,不是很简洁。我们从简单的物理原理出发,找到了一种优美的解法。

设起始时刻车轮质心(轴心)与地面参考系的原点重合,在此质心参考系中,车轮曲线坐标是 (x', y') ,在时刻 t ,质心向右正方向运动到 (x_c, y_c) ,同时车轮绕质心顺时针转动 θ 角度。那么在地面参考系中,车轮上一点的坐标是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (5-1)$$

设在时刻 t , (x, y) 是车轮与轨道的接触点, 即 (x, y) 满足轨道曲线方程 $F(x, y) = 0$, 对应的质心参考系坐标 (x', y') 满足车轮曲线方程 $G(x', y') = 0$ 。纯滚动约束要求车轮上这点相对地面的速度为零, 即

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_c/dt \\ dy_c/dt \end{pmatrix} + \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5-2)$$

平稳行驶要求车轮质心纵坐标 y_c 保持不变, 所以(5-2)式第二行等式为

$$d\theta/dt (\cos\theta x' + \sin\theta y') = 0 \quad (5-3)$$

角速度一般不为零, (5-3)式有解:

$$\cos\theta x' + \sin\theta y' = 0 \quad (5-4)$$

我们猜测(5-4)式有以下的参数方程表达式:

$$\begin{cases} x' = f(\theta) \sin\theta \\ y' = -f(\theta) \cos\theta \end{cases} \quad (5-5)$$

(5-5)式代入车轮曲线方程 $G(x', y') = 0$, 就能确定 $f(\theta)$ 的形式。另外, (5-2)式中的第一行可以化为

$$dx_c = d\theta (\sin\theta x' - \cos\theta y') \quad (5-6)$$

把(5-5)式代入(5-6)式, 积分得到质心横坐标 x_c 与转动角 θ 的表达式

$$x_c = \int_0^\theta f(\theta) d\theta = F(\theta) \quad (5-7)$$

通过(5-1)式, 地面轨道上的接触点 (x, y) 能表达为转动角 θ 的参数方程形式

$$x = F(\theta), \quad y = -f(\theta) \quad (5-8)$$

(5-8)式就是地面轨道曲线的参数方程, 它以形状函数 $f(\theta)$ 为联系, 与车轮形状参数方程(5-5)式, 形成一对耦合方程。

为了保证车轮在周期轨道上能转 l 次, 形状函数 $f(\theta)$ 必须是周期性函数, 且满足

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi/l) \quad (5-9)$$

此时,车轮形状具有 l 重对称性,并称 $2\pi/l$ 为转动角的最小正周期。

首先研究最典型的方轮,设正方形边长为 2,起始位置一个顶点在最下面,那么方轮的其中一段曲线方程是 $x' - y' = \sqrt{2}$,代入(5-5)式,得到方轮形状函数是

$$f(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta + \sin\theta} \quad (5-10)$$

其中转动角参数为 $0 < \theta < \pi/2$,即方轮具有 4 重对称性。把(5-10)式代入(5-8)式,计算得到地面轨道曲线的参数方程是

$$x = F(\theta) = \ln \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \ln \tan\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad y = -f(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta + \sin\theta} \quad (5-11)$$

消去参数 θ ,在直角坐标系中(5-11)式可以转化为双曲余弦函数的形式,

$$y = -\cosh(x + a) \quad (5-12)$$

式中 $a = \ln \tan(\pi/8)$ 。当转动角超过 $\pi/2$ 时,轨道形状由(5-11)式周期延伸而成。所以正方形车轮对应的是周期性双曲余弦函数轨道。

如果这个轨道还能对应其他车轮形状,那么这个车轮大小应该不一样。假定新车轮的轴心还是在水平线上平行移动,那么轨道必须竖直方向移动。把(5-11)式对应的轨道整体向下平移距离 c ,轨道曲线是

$$x = F(\theta), \quad y = -f(\theta) - c \quad (5-13)$$

平移后的新轨道参数方程(5-13)中 θ 是参数角,而不是物理上的转动角。设新车轮的形状函数为 $g(\phi)$,这里的 ϕ 才是物理上的转动角。由(5-8)式,新轨道形状是

$$x = G(\phi) = \int_0^\phi g(\phi) d\phi, \quad y = -g(\phi) \quad (5-14)$$

一个周期轨道上,这两种表达式是完全一样的,所以

$$y = -g(\phi) = -f(\theta) - c \quad (5-15)$$

$$dx = g(\phi) d\phi = f(\theta) d\theta \quad (5-16)$$

由(5-15)式和(5-16)式,可以得到新的轨道上车轮转动角 ϕ 与旧轨道参数角 θ 的

关系式

$$\phi = \int_0^\theta \frac{f(\theta)}{f(\theta) + c} d\theta \quad (5-17)$$

如果要求一个周期轨道上对应参数角 $0 < \theta < \pi/2$, 转动角 ϕ 转过 $2\pi/l$, 即新的车轮具有 l 重对称性, 那么轨道竖直平移距离 c_l 必须满足以下等式:

$$\frac{2\pi}{l} = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + c_l} d\theta \quad (5-18)$$

虽然平移距离 c_l 可能有解析表达式, 但是对于数学软件来说, 解析解和数值解效果其实是一样的, 有时数值解反而更方便用于画图 and 动画模拟, 所以统一采用数值解。平移距离 c_l 数值解得到后, 代回(5-17)式, 仍旧以 θ 为参数, 新轨道上 l 重对称性车轮的形状参数方程为

$$\begin{aligned} X_l &= (f(\theta) + c_l) \sin(\phi(\theta, c_l)) \\ Y_l &= -(f(\theta) + c_l) \cos(\phi(\theta, c_l)) \end{aligned} \quad (5-19)$$

对于(5-18)式, 数值求得竖直平移距离是

$$c_3 = -0.276819, \quad c_5 = 0.278219$$

由数学软件, 得到同一个周期性双曲余弦函数轨道上可以平稳滚动的(3, 4, 5)重对称性车轮, 如图 5-2 所示。

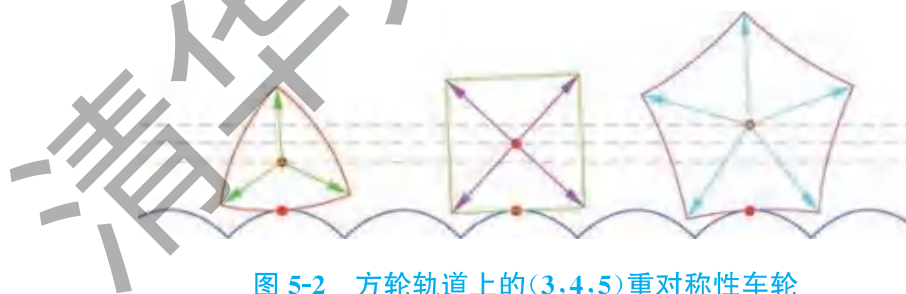


图 5-2 方轮轨道上的(3, 4, 5)重对称性车轮

MMA 编制的程序请扫描 I 页二维码下载。

参考文献

- [1] VALADARES E D C. Periodic roads and quantized wheels[J] American Journal of Physics, 2016, 84(8): 581-587.

6 球的拓印滚动

星球大战中球形机器人 Sphero BB8 的滚动非常滑稽,从物理角度看,球的滚动是相对最稳定的,也是最容易改变方向的。在打网球休息过程中,我们无意间发现网球的一种滚动也是非常有趣的。网球的表面有一条白色的闭合曲线,当网球在平直地面滚动起来的时候,球面上这段白线始终紧贴在地面上。这与中国传统文化中的拓印非常类似,如图 6-1 所示。

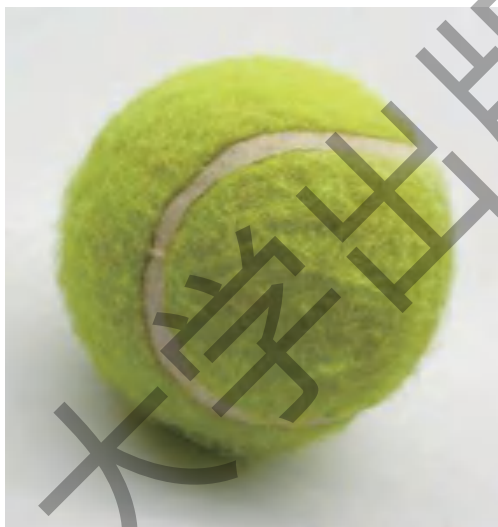


图 6-1 网球和球面上的白线

从物理模型角度看,就是要求球心与曲线的连线与地面接触点始终垂直于地面。那么,这个网球是怎么滚动的? 地面上的拓印曲线是什么形状? 拓印曲线是闭合的吗? 举一个最简单的例子,球面上的闭合曲线就是大圆,很显然,地面上对应的拓印曲线就是长度为大圆周长的线段的周期延伸,即一条直线。

设球面上闭合曲线的参数形式是

$$\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (6-1)$$

其中 s 是弧长参数。这个曲线的切向矢量是

$$\mathbf{p}(s) = (dx/ds, dy/ds, dz/ds) \quad (6-2)$$

设球半径为 1,起始时刻球心在 origin。球面曲线和拓印曲线的弧长参数是一样的。

设地面上的拓印曲线的参数形式是

$$\mathbf{m}(s) = (a(s), b(s), -1)$$

切向量是

$$\mathbf{q}(s) = (da/ds, db/ds, 0)$$

设从 $\mathbf{r}(s)$ 转到 $\mathbf{r}(0)$ 的三维转动矩阵是 $R(\mathbf{r}(s), \mathbf{r}(0))$, 那么这个转动操作使得转动后的 $\mathbf{r}(s)$ 垂直于地面, 且使得球面曲线的切向量 $\mathbf{p}(s)$ 变为地面拓印曲线的切向量 $\mathbf{q}(s)$, 即

$$\begin{pmatrix} da/ds \\ db/ds \\ 0 \end{pmatrix} = R(\mathbf{r}(s), \mathbf{r}(0)) \cdot \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \\ dz/ds \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

解析或者数值求解以上方程, 就能得到地面拓印曲线的表达式。球的滚动就能这样描述: 球心(质心)先平移到拓印曲线的正上方, 然后从 $\mathbf{r}(s)$ 转到 $\mathbf{r}(0)$ 。举一个容易算的例子, 设球面闭合曲线的参数形式是

$$\mathbf{r}(\phi) = \left(\sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \frac{\sin\phi}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\cos\phi}{2} \right) \quad (6-4)$$

其中参数 ϕ 的取值范围是 $0 < \phi < 4\pi$, 这个球面闭合曲线的形状是 8 字形曲线, 如图 6-2 所示。

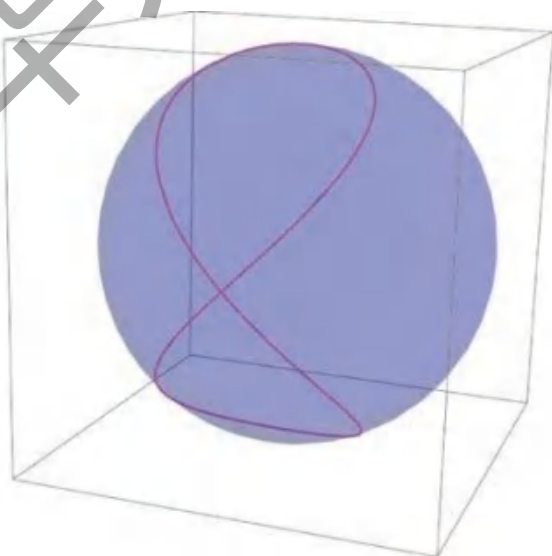


图 6-2 球面上的闭合曲线

由(6-3)式,计算化简得到的拓印曲线的微分方程是

$$\frac{da}{d\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) (5 - \cos\phi) \left[1 + \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^{1/2} (3 + \cos\phi)^{-3/2} \quad (6-5)$$

$$\frac{db}{d\phi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 3\cos\phi) \left[1 + \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right]^{1/2} (3 + \cos\phi)^{-3/2} \quad (6-6)$$

我的好友默遇给出了这组微分方程的解析解

$$a = \sqrt{2} \ln \left[\frac{1 + \sin(\phi/2)/\sqrt{2}}{1 - \sin(\phi/2)/\sqrt{2}} \right] - \sin(\phi/2) \quad (6-7)$$

$$b = \frac{3}{2}\phi - 2\sqrt{2} \arctan \left[\frac{\tan(\phi/2)}{\sqrt{2}} \right] - 2\sqrt{2} \left(\frac{\phi}{2\pi} + \frac{1}{2} \right) \quad (6-8)$$

设起始时刻 8 字形曲线的交点与地面重合,那么地面上的拓印曲线如图 6-3 所示。

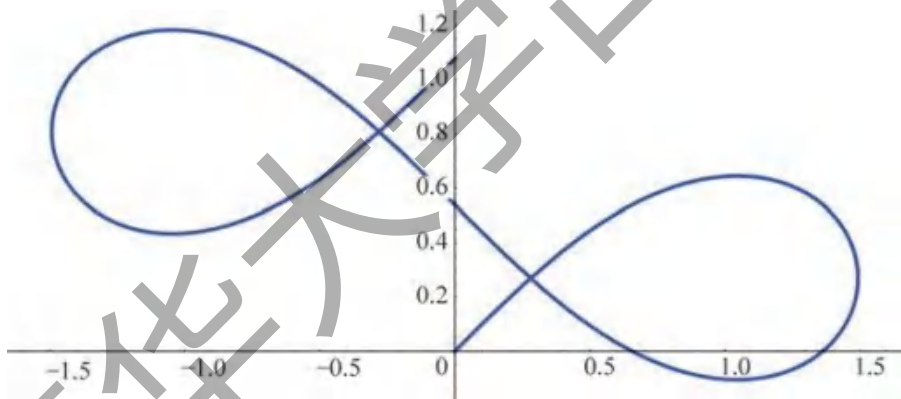


图 6-3 地面上的拓印曲线的一个周期

由图 6-3 可以看出,拓印曲线并不闭合。由数学软件 MMA 编制的程序,得到三维滚动动画模拟的一个片段,如图 6-4 所示。

MMA 编制的程序请扫描 I 页二维码下载。

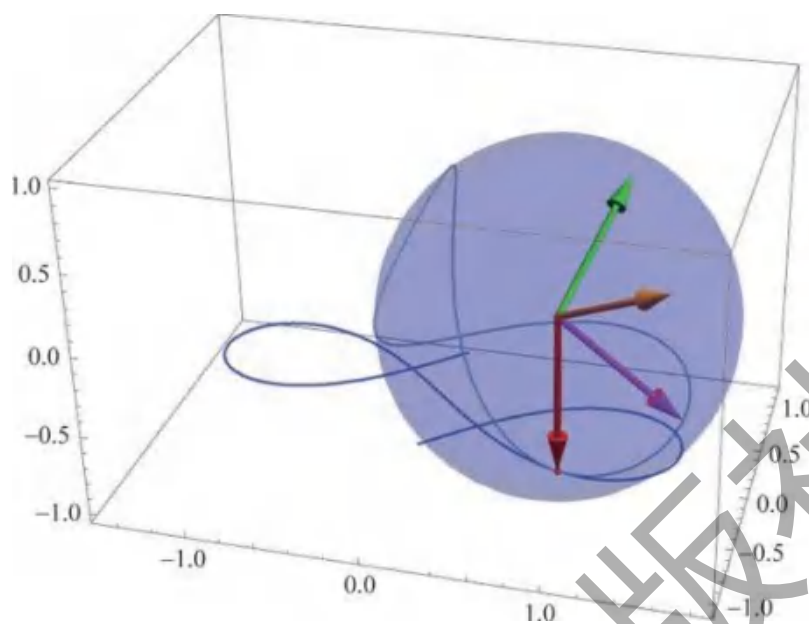


图 6-4 网球拓印滚动模拟