



5.1 不定积分的概念与性质

要计算积分,可使用 sympy 中的 `integrate()` 函数。该函数既可计算不定积分,也可计算定积分。本章先学习不定积分的计算,使用时仅需将函数表达式及变量传递给 `integrate()` 函数,即 `integrate(f, var)`。下面来看几个例子。

【例 5.1】 求 $\int x^2 dx$ 。

解 代码如下:

```
from sympy import *  
x = symbols('x')  
init_printing()  
integrate(x**2, x)
```

运行结果为: $x^3/3$ 。

注意: 积分结果不会自动添加任意常数(+C)。

【例 5.2】 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$ 。

解 代码如下:

```
x = symbols('x')  
init_printing()
```

```
ex_2 = (x-1)**3/(x**2)
integrate(ex_2,x)
```

运行结果为： $x^2/2 - 3x + 3\log(x) + 1/x$ 。

注意：返回结果中，对数函数没有加绝对值，它默认 x 为正数。

【例 5.3】 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
ex_3 = lambda x: (sin(x/2))**2
integrate(ex_3(x),x)
```

运行结果为： $x/2 - \sin(x/2)\cos(x/2)$ 。

【例 5.4】 求 $\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
def ex_4(x):
    return (2*x**4 + x**2 + 3)/(x**2 + 1)
integrate(ex_4(x),x)
```

运行结果为： $2x^3/3 - x + 4\operatorname{atan}(x)$ 。



5.2 换元积分法

我们不必关心 sympy 是如何求出一个不定积分的，仅需熟练使用 `integrate()` 函数就可以。再来看几个例子。

【例 5.5】 求 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx (a \neq 0)$ 。

解 代码如下：

```
from sympy import *
x,a = symbols('x a',real=True)
init_printing()
integrate(1/(x**2 + a**2),x)
```

运行结果为： $\operatorname{atan}(x/a)/a$ 。



【例 5.6】 求 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x', real = True)
init_printing()
f = sin(x) ** 2 * cos(x) ** 4
result = integrate(f, x)
result
```

运行结果为： $x/16 - \sin(x)\cos^5(x)/6 + \sin(x)\cos^3(x)/24 + \sin(x)\cos(x)/16$ 。

该结果可进一步化简,代码如下：

```
simplify(result)
```

运行结果为： $x/16 - (\cos(2x) + 1)^2 \sin(2x)/48 + \sin(2x)/24 + \sin(4x)/192$ 。

注释：这里 `simplify()` 化简结果不太理想。

【例 5.7】 求 $\int \csc x dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x', real = True)
init_printing()
result = integrate(csc(x), x)
result
```

运行结果为： $\log(\cos(x) - 1)/2 - \log(\cos(x) + 1)/2$ 。

再一次测试化简函数 `simplify()`,代码如下：

```
simplify(result)
```

运行结果为： $\log(\cos(x) - 1)/2 - \log(\cos(x) + 1)/2$ 。

注释：`simplify()` 的化简结果有时可能不尽如人意。

【例 5.8】 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx (a > 0)$ 。

解 代码如下：

```
a = symbols('a', positive = True)
x = symbols('x', real = True)
init_printing()
integrate(sqrt(a ** 2 - x ** 2), x)
```

运行结果为： $a^2 \operatorname{asin}\left(\frac{x}{a}\right)/2 + x\sqrt{a^2 - x^2}/2$ 。

【例 5.9】 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx (a > 0)$ 。

解 代码如下：

```
a = symbols('a', positive = True)
x = symbols('x', real = True)
init_printing()
f = 1/(sqrt(x**2 + a**2))
integrate(f, x)
```

运行结果为： $\operatorname{asinh}(x/a)$ 。

注释：该结果可进一步手工验证，与积分表中的结果一致。

【例 5.10】 求 $\int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x', real = True)
init_printing()
integrate(x**3/((x**2 - 2*x + 2)**2), x)
```

运行结果为： $-\frac{x}{x^2 - 2x + 2} + \log(x^2 - 2x + 2)/2 + 2\operatorname{atan}(x - 1)$ 。



5.3 分部积分法

【例 5.11】 求 $\int x \arctan x dx$ 。

解 代码如下：

```
from sympy import *
x = symbols('x')
init_printing()
integrate(x * atan(x), x)
```

运行结果为： $x^2 \operatorname{atan}(x)/2 - x/2 + \operatorname{atan}(x)/2$ 。

【例 5.12】 求 $\int e^x \sin x dx$ 。

解 代码如下：



```
from sympy import *
x = symbols('x')
init_printing()
integrate(E**x*sin(x), x)
```

运行结果为： $e^x \sin(x)/2 - e^x \cos(x)/2$ 。

【例 5.13】 求 $\int \sec^3 x dx$ 。

解 代码如下：

```
from sympy import *
x = symbols('x')
init_printing()
res = integrate(sec(x)**3, x)
res
```

运行结果为： $-\log(\sin(x)-1)/4 + \log(\sin(x)+1)/4 - \frac{\sin(x)}{2\sin^2(x)-2}$ 。

化简代码如下：

```
simplify(res)
```

运行结果为： $-\log(\sin(x)-1)/4 + \log(\sin(x)+1)/4 + \frac{\sin(x)}{2\cos^2(x)}$ 。

注释：读者通过这个例子应进一步理解 sympy 为符号运算的含义，它不负责检验式子是否合理，就像这里的 $\log(\sin(x)-1)$ 。



5.4 有理函数的积分

首先介绍几个初等运算的函数。

1. cancel() 函数

代码如下：

```
from sympy import *
x = symbols('x')
init_printing()
# 约分:cancel()
cancel((x**2-2*x+1)/(x**2-1))
```

运行结果为： $\frac{x-1}{x+1}$ 。

注释：`cancel()`用于有理函数的约分,输出形式为分式的规范标准型,即分子与分母为整系数的多项式,且分子与分母无公因子。

2. `expand()`函数

代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
# 展开:expand()
expand((x + 1) ** 3)
```

运行结果为： $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 。

注释：`expand()`可将函数展开成标准多项式的形式,它同时提供了多种展开方法,可根据实际需要选取。这里仅考虑函数的展开功能。

3. `factor()`函数

代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
# 分解因式:factor()
factor(x ** 3 + 3 * x ** 2 + 3 * x + 1)
```

运行结果为： $(x+1)^3$ 。

注释：`factor()`可将函数分解为有理数域上的不能再分解的因子乘积(分解因式)。

4. `apart()`函数

代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
# 将假分式拆分为几个真分式的和:apart()
apart((2 * x ** 4 + x ** 2 + 3) / (x ** 2 + 1), x)
```

运行结果为： $2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1}$ 。

注释：`apart()`对有理函数执行部分分式分解。

上述几个函数也可被看作“化简”函数,当`simplify()`的化简结果偏离预期时,可考虑上述特定功能的“化简”函数。下边来看几个有理函数的积分。

【例 5.14】 求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$ 。



解 代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
ex_1 = (x + 2)/((2 * x + 1) * (x**2 + x + 1))
integrate(ex_1, x)
```

运行结果为： $\log(x+1/2) - \log(x^2+x+1)/2 + \sqrt{3} \operatorname{atan}(2\sqrt{3}x/3 + \sqrt{3}/3)/3$ 。

【例 5.15】 求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
ex_2 = (x - 3)/((x - 1) * (x**2 - 1))
integrate(ex_2, x)
```

运行结果为： $\log(x-1) - \log(x+1) + \frac{1}{x-1}$ 。

【例 5.16】 求 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
ex_3 = (1 + sin(x))/(sin(x) * (1 + cos(x)))
integrate(ex_3, x)
```

运行结果为： $\log(\tan(x/2))/2 + \tan^2(x/2)/4 + \tan(x/2)$ 。

【例 5.17】 求 $\int \frac{1}{(1 + \sqrt[3]{x}) \sqrt{x}} dx$ 。

解 代码如下：

```
x = symbols('x')
init_printing()
ex_4 = 1/(sqrt(x) + x** (S(5)/6))
integrate(ex_4, x)
```

运行结果为： $6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{atan}(\sqrt[6]{x})$ 。

对于 sympy 来说，积分要比求导复杂得多（当然，对于手工计算也一样）！